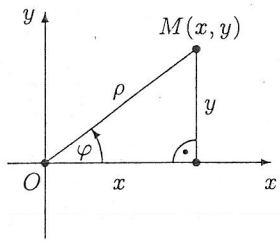
1. UVODNI ZADACI

1.1. KRIVOLINIJSKI KOORDINATNI SISTEMI

1. U polarnom koordinatnom sistemu[1] $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ odrediti koordinatne linije $\rho = \text{const}$ i $\varphi = \text{const}$.

Rešenje. Sa slike je $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, gde je $OM = \rho$ $(\rho \geq 0)$ polarni radijus (poteg) tačke M i $\sphericalangle xOM = \varphi$ $(-\pi < \varphi \leq \pi$ ili $0 \leq \varphi < 2\pi)$ polarni ugao tačke M.



(ρ, φ) su polarne koordinate. Svakoj tački $M(x, y)$ u ravni odgovara samo jedan par (ρ, φ) (izuzimajući pol O (koordinatni početak) za koji je $\rho = 0$, a φ proizvoljno). Obrnuto, svakom paru (ρ, φ) $(\rho \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi)$ odgovara samo jedna tačka u ravni za koju ρ predstavlja polarni radijus a φ polarni ugao.

Na osnovu ove analize: $\rho = \text{const}$ je krug poluprečnika ρ sa centrom u polu O (ovde koordinatni početak); $\varphi = \text{const}$ je poluprava sa početnom tačkom u polu O i koja sa polarnom osom (ovde pozitivan deo x-ose) zaklapa ugao φ.

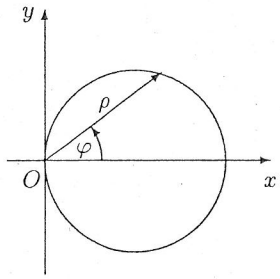
2. Napisati jednačine krivih

1° $x^2 + y^2 = 2x$; 2° $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (Bernoulli-jeva lemniskata)

u polarnim koordinatama.

Rešenje. 1° Kako je $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, imamo $x^2 + y^2 = \rho^2$. Stoga iz $x^2 + y^2 = 2x$ izlazi

$$\rho^2 = 2\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = 2\cos\varphi.$$

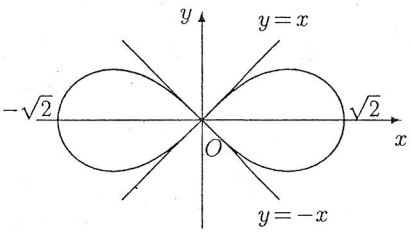


Iz $\rho \geq 0$ dobijamo $\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Prema tome, tražena jednačina je

$$\rho = 2\cos\varphi, \quad \varphi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

2° Neka je $k : (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$. Ako tačka $M(x, y) \in k$, onda i tačke $M_1(x, -y) \in k$ i $M_2(-x, y) \in k$, tj. kriva je simetrična u odnosu na x-osu i y-osu (osna simetrija), kao i tačka $M_3(-x, -y) \in k$, tj. kriva je centralno simetrična u odnosu na koordinatni početak. Grafik krive k pripada u ravni oblasti $x^2 - y^2 \geq 0$, tj. $|x| \geq |y|$.



Kriva seče x-osu u tačkama $x = \pm\sqrt{2}$, $x = 0$.

[1] Polarne koordinate uveo je Ojler (Leonhard Euler (1707–1785)), veliki švajcarski matematičar u svom delu *Introductio in Analysin infinitorum* (1748).

Ako uvedemo polarne koordinate, dobijamo $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$. Pošto mora biti ispunjen uslov $\cos 2\varphi \geq 0$, imamo

$$-\pi/2 \leq 2\varphi \leq \pi/2 \vee 3\pi/2 \leq 2\varphi \leq 5\pi/2, \text{ tj. } \varphi \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4].$$

NAPOMENA. Kao što krivu u Dekartovom koordinatnom sistemu možemo zadavati u obliku $y = f(x)$ (ili $F(x, y) = 0$), isto tako u polarnom koordinatnom sistemu možemo zadavati krivu jednačinom $\rho = f(\varphi)$ (ili $F(\rho, \varphi) = 0$), kao što je bilo u slučaju $\rho = 2\cos\varphi$.

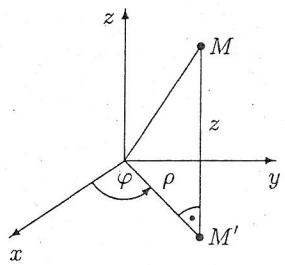
3. U cilindričnom koordinatnom sistemu, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, odrediti

1° koordinatne površi: a) $\rho = \text{const}$; b) $\varphi = \text{const}$, c) $z = \text{const}$;

2° koordinatne linije: a) $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$; b) $\rho = \text{const}$, $z = \text{const}$; c) $z = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$.

Rešenje. Uvedimo sledeće oznake: $OM' = \rho$ $(\rho \geq 0)$, $\sphericalangle xOM' = \varphi$ $(-\pi < \varphi \leq \pi$ ili $0 \leq \varphi < 2\pi)$, $MM' = z$ $(-\infty < z < +\infty)$. Trojka (ρ, φ, z) naziva se cilindrične koordinate (ili polarno cilindrične). Sada je

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,$$



pa je:

1° a) $\rho = \text{const}$ je kružna cilindrična površ sa z-osom kao osovinom i poluprečnikom kruga ρ;

b) $\varphi = \text{const}$ je poluravan sa rubnom pravom z-osom koja sa koordinatnom ravni Oxz $(y = 0)$ obrazuje ugao φ;

c) $z = \text{const}$ je ravan koja je paralelna koordinatnoj ravni Oxy $(z = 0)$ na odstojanju z.

2° a) $\rho = \text{const}, \varphi = \text{const}$ je koordinatna linija koja nastaje presekom koordinatnih površi $\rho = \text{const}$ i $\varphi = \text{const}$. Dakle, to je prava paralelna z-osi;

b) krug koji pripada ravni paralelnoj ravni $z = 0$, poluprečnika ρ i čiji je centar na z-osi;

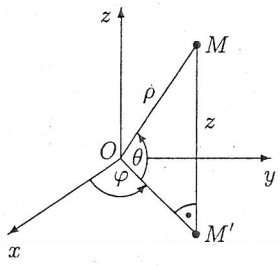
c) poluprava paralelna ravni $z = 0$ čija je početna tačka na z-osi.

4. U sfernom koordinatnom sistemu $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$ odrediti

1° koordinatne površi: a) $\rho = \text{const}$ b) $\varphi = \text{const}$; c) $\theta = \text{const}$;

2° Koordinatne linije: a) $\rho = \text{const}$ $\varphi = \text{const}$; b) $\varphi = \text{const}$; $\theta = \text{const}$; c) $\rho = \text{const}$ $\theta = \text{const}$.

Rešenje. Neka je $OM = \rho$ ($\rho \geq 0$) radijus vektor (ili poteg) tačke M, $\sphericalangle xOM = \varphi$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$ ili $0 \leq \varphi < 2\pi$), $\sphericalangle M'OM = \theta$ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$). Trojka (ρ, φ, θ) naziva se sferne koordinate.



Sa slike je $z = M'M = \rho \sin\theta$, $OM' = \rho\cos\theta$, a kako je $x = OM' \cos\varphi$, $y = OM' \sin\varphi$, dobijamo vezu između Dekartovih i sfernih koordinata:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta,\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ z = \rho\sin\theta.$$

1° a) $\rho = \text{const}$ je sfera poluprečnika ρ sa centrom u koordinatnom početku;

b) $\varphi = \text{const}$ je poluravan sa rubnom pravom z-osom (isto kao kod cilndričnih koordinata);

c) $\theta = \text{const}$ je kružna kupasta površ sa vrhom u koordinatnom početku. Za $0 < \theta < \pi/2$ površ je iznad ravni $z = 0$; za $-\pi/2 < \theta < 0$ površ je ispod ravni $z = 0$; za $\theta = \pi/2$ pozitivan deo z-ose; za $\theta = -\pi/2$ negativan deo z-ose;

2° a) veliki polukrugovi sa krajnjim tačkama na z-osi;

b) poluprave sa početnom tačkom u koordinatnom početku;

c) krugovi sa centrom na z-osi i koji se nalaze u ravni koja je paralelna ravni $z = 0$.

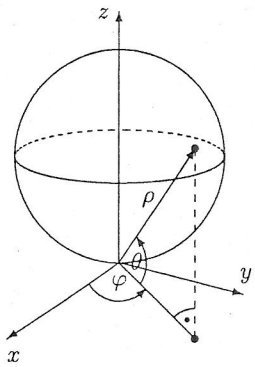
5. Napisati jednačine površi

1° $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (sfera); 2° $x = 1$ (ravan)

u sfernim koordinatama.

Rešenje. Kako je kod sfernih koordinata $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ i $z = \rho\sin\theta$, imamo $x^2 + y^2 + z^2 = 2z \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\sin\theta$, odakle je

$$\rho = 2\sin\theta. \tag{1}$$



Pošto je $\rho \geq 0$, imamo $\sin\theta \geq 0$, pa dobijamo $\theta \in [0, \pi/2]$. Kako jednačina sfere (1) ne sadrži promenljivu φ, možemo uzeti da je $\varphi \in [0, 2\pi)$. Konačno nalazimo

$$\rho = 2\sin\theta,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \pi/2],$$

što odgovara geometrijskoj predstavi (videti sliku).

2° Kako je $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, imamo

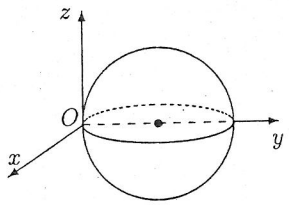
$$x = 1 \Rightarrow \rho\cos\varphi\cos\theta = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\varphi\cos\theta}.$$

1.2. POVRŠI DRUGOG REDA

6. Odrediti centar i poluprečnik sfere

1° $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 3$;

2° $x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$ (skicirati ovu sferu).



Rezultat. 1° $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$, centar $(1, -1, 2)$, poluprečnik 3;

2° $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$, centar $(0, 2, 0)$, poluprečnik 2. Sfera je prikazana na slici.

7. U odnosu na Dekartov koordinatni sistem dati geometrijsko tumačenje skupovima tačaka:

1° $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ z \geq 0\} \cup \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq r^2,\ z = 0\}$;

2° $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2\} \cup \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq r^2\}$.

Rezultat. 1° Zatvorena gornja polusfera.

2° Ako je $r < R$, loptin sloj, $r = R$ sfera, $r > R$ prazan skup.

8. Skicirati površi drugog reda:

1° $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (elipsoid).

2° $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (jednograni hiperboloid).

3° $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (jednograni hiperboloid).

4° $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (dvograni hiperboloid).

5° $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (dvograni hiperboloid).

6° $2z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$ $(p, q > 0)$ (eliptički paraboloid).

7° $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{z^2}{3}$ (eliptički paraboloid).

8° $z = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3}$ (eliptički paraboloid).

9° $2z = \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q}$ $(p, q > 0)$ (hiperbolički paraboloid (sedlasta površ)).

10° $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (eliptički konus).

11° $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ (kružni konus sa vrhom u tački $(0, 0, 1)$).

12° $(y-1)^2 = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{z^2}{3}$ (eliptički konus sa vrhom u tački $(0, 1, 0)$).

13° $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (eliptički cilindar).

14° $z = y^2$ (parabolički cilindar).

1.3. TRANSFORMACIJA OBLASTI

9. Transformacijom $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ preslikati oblasti u ravni:

1° $D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2x\}$;

2° $D_2 = \{(x,y) : 2x \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

3° $D_3 = \{(x,y) : 2x \le x^2 + y^2 \le 4x,\ y \le 0\}$;

4° $D_4 = \{(x,y) : 2x \le x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 2y,\ x \ge 0\}$.

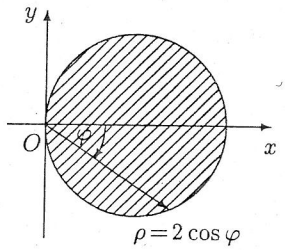
Rešenje. 1° Oblast $D_1 : x^2 + y^2 \le 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$ šrafirana je na slici. Jednačina kruga $x^2 + y^2 = 2x$ u polarnim koordinatama je $\rho = 2\cos\varphi$. Sada možemo da zaključimo da je

$$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\,, \quad 0 \le \rho \le 2\cos\varphi.$$

Prema tome, oblast D_1 se preslikava na oblast

$$G_1 = \{(\rho,\varphi) : -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi\}$$

u ravni $O\rho\varphi$.



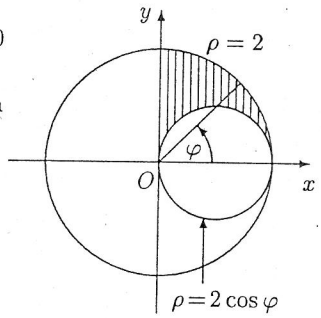
2° Oblast $D_2 : 1 \le (x-1)^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ šrafirana je na slici.

Jednačine krugova $x^2 + y^2 = 2x$ i $x^2 + y^2 = 4$ u polarnim koordinatama su $\rho = 2\cos\varphi$ i $\rho = 2$, pa je

$$0 \le \varphi \le \pi/2, \qquad 2\cos\varphi \le \rho \le 2.$$

Prema tome, oblast D_2 se preslikava na oblast

$$G_2 = \{(\rho,\varphi) : 0 \le \varphi \le \pi/2,\ 2\cos\varphi \le \rho \le 2\}.$$



Rezultat.

3° $G_3 = \{\rho,\varphi) : -\pi/2 \le \varphi \le 0,\ 2\cos\varphi \le \rho \le 4\cos\varphi\}$.

4° $G_4 = \{\rho,\varphi) : \pi/4 \le \varphi \le \pi/2,\ 2\cos\varphi \le \rho \le 2\sin\varphi\}$.

2. FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

2.1. OPŠTE OSOBINE FUNKCIJA

1. Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

$$1^\circ\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad 2^\circ\ z=x^2+y^2,\quad 3^\circ\ z=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$4^\circ\ z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)},\quad 5^\circ\ z=\sqrt{x^2-4}+\frac{1}{y},\quad 6^\circ\ z=x\sqrt{x^2+y^2-1}.$$

Skicirati grafike funkcija pod tačkama 1°, 2°, 3°.

Rešenje. 1° Neka je $z=f(z,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ i pošto $z\in\mathbb{R}$, tada mora biti ispunjen uslov $1-x^2-y^2\geq 0$, pa je stoga oblast definisanosti funkcije f skup

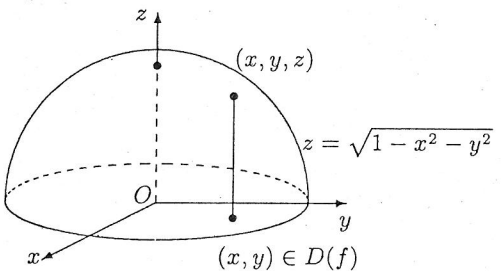
$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}.$$

Da bismo skicirali grafik funkcije $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, svakoj tački $(x,y)\in D(f)$ pridružimo tačku $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, gde je $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Na taj način dobijamo skup $\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ (x,y)\in D(f)\}$ koji predstavlja grafik date funkcije, prikazan na Slici 1.

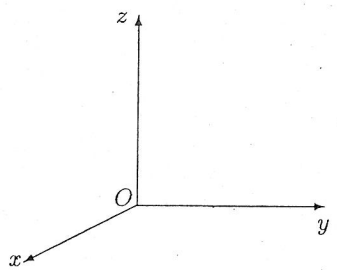
S obzirom da je $z\geq 0$, kvadriranjem jednačine kojom je definisana funkcija, dobijamo

$$x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0,$$

pa je grafik gornja polusfera jedinične sfere sa centrom u koordinatnom početku.



Slika 1.



Slika 2.

NAPOMENA. U opštem slučaju ako je data funkcija $z=f(x,y)$, njen grafik je skup

$$\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in F(f),\ z=f(x,y))\},$$

što predstavlja površ u $\mathbb{R}^3$ (videti Sliku 2).

2° Oblast definisanosti je $D(f) = \mathbb{R}^2$. Grafik funkcije je obrtni paraboloid $z = x^2 + y^2$, prikazan na slici.

3° Oblast definisanosti je $D(f) = \mathbb{R}^2$. Grafik funkcije je deo konusne površi $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, prikazan na slici.

3° Funkcija je definisana ako je $\sin(x^2 + y^2) \geq 0$, tj. kada je

$$2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

pa je oblast definisanosti skup

$$D(f) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k, \text{ gde je } D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi\}.$$

Može se dokazati da je $D(f)$ zatvoren, neograničen i nepovezan skup u $\mathbb{R}^2$.

5° Ovde je $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 2,\ y \neq 0\}$. Skup $D(f)$ je neograničen, nepovezan a nije ni otvoren ni zatvoren.

Funkcije u primerima 1° – 4° su *simetrične* u odnosu na nezavisne promenljive x i y, tj. ispunjen je uslov $f(x, y) = f(y, x)$.

2. Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

1° $u = \ln(xyz)$; 2° $u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$;

3° $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$; 4° $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$.

Rešenje. 1° Funkcija je definisana pod uslovom $xyz > 0$. Ovaj uslov je ispunjen ako je

$$(x > 0, y > 0, z > 0) \vee (x < 0, y < 0, z > 0) \vee (x < 0, y > 0, z < 0) \vee (x > 0, y < 0, z < 0).$$

Dakle, funkcija je definisana u I, III, VI i VIII oktantu.

NAPOMENA. Koordinatne ravni $z = 0, y = 0, x = 0$ dele prostor $\mathbb{R}^3$ na osam disjunktnih

delova koje nazivamo oktantima.

$$\begin{aligned}
\text{I oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\};\\
\text{II oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y > 0, z > 0\};\\
\text{III oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y < 0, z > 0\};\\
\text{IV oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y < 0, z > 0\};\\
\text{V oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z < 0\};\\
\text{VI oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y > 0, z < 0\};\\
\text{VII oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y < 0, z < 0\};\\
\text{VIII oktant je } &\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y < 0, z < 0\}.
\end{aligned}$$

2° $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, otvorena jedinična kugla sa centrom u koordinatnom početku.

3° $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, I oktant sa svojim rubnim tačkama.

4° $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$, kocka ograničena ravnima $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, uključujući i rubne tačke kocke.

Primetimo da su funkcije u primerima 1° – 4° simetrične u odnosu na svoje nezavisne promenljive x, y, z, tj. ispunjeni su uslovi $f(x,y,z) = f(x,z,y) = \cdots = f(z,y,x)$. 4

3. Data je funkcija $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. Naći $f(-3,4)$ i $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.

Rešenje. Imamo

$$f(-3,4) = \frac{2\cdot(-3)\cdot 4}{(-3)^2+4^2} = -\frac{24}{25},$$

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{2\cdot 1\cdot \frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} = f(x,y) \qquad (x \neq 0).$$

4. Odrediti funkcije f i g iz uslova

1° $g(y,x) = x + y + f(x-y), \quad g(x,0) = x^2;$

2° $g(x,y) = \sqrt{y} + f(\sqrt{x}-1), \quad g(x,1) = x \ \ (x \geq 0,\ y \geq 0).$

Rešenje. 1° Posle zamene $y = 0$ imamo $g(x,0) = x + f(x)$. Pošto je $g(x,0) = x^2$, iz jednakosti $x + f(x) = x^2$ nalazimo $f(x) = x^2 - x$, odakle je

$$g(x,y) = x + y + (x-y)^2 - (x-y), \text{ tj. } g(x,y) = 2y + (x-y)^2.$$

2° **Rezultat.** $f(t) = t^2 + 2t, \quad g(x,y) = \sqrt{y} + x - 1.$

2.2. NEPREKIDNOST I DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJA

1. Naći $L = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+4}-2}{x^2+(y-1)^2}$.

Rešenje. Uvedimo funkciju

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+4}-2}{x^2+(y-1)^2}.$$

Zadatak je da nađemo $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$, gde je $M(x,y)$ proizvoljna tačka u xy-ravni, a $M_0(0,1)$. Ako stavimo $\rho = d(M,M_0) = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$, tada je

$$M \to M_0 \Leftrightarrow x \to 0 \text{ i } y \to 1,$$

$\wedge\ \rho \to 0+ \Leftrightarrow$

tj. drugačije rečeno, *konvergencija po metrici u prostoru* $\mathbb{R}^2$ *ekvivalentna je konvergenciji po koordinatama.* Stoga je

$$L = \lim_{M\to M_0} f(M) = \lim_{\rho\to 0+} \frac{\sqrt{\rho^2+4}-2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0+}\left(\frac{\sqrt{\rho^2+4}-2}{\rho^2}\cdot\frac{\sqrt{\rho^2+4}+2}{\sqrt{\rho^2+4}+2}\right)$$

$$= \lim_{\rho\to 0+}\frac{\rho^2+4-4}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)} = \lim_{\rho\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

NAPOMENA. Vidimo da funkcija f u tački M_0 ima tzv. it otklonjiv prekid, pa možemo da je dodefinišemo i dobijemo funkciju

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\neq(0,1)),\\ 1/4 & ((x,y)=(0,1)),\end{cases}$$

koja je neprekidna u tački $(0,1)$.

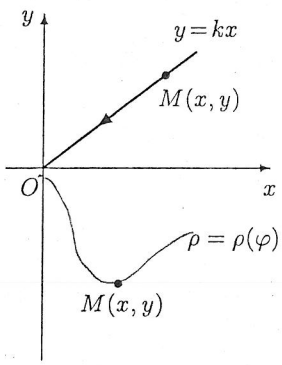
2. Ispitati da li je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0)),\end{cases}$$

neprekidna u tački $(0,0)$.

Rešenje. Na osnovu definicije neprekidnosti funkcije, treba da proverimo da li je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$



Ako proizvoljna tačka $M(x,y)$ teži ~~ka~~ tački $(0,0)$ po polupravoj $y = kx$ (videti sliku), tada imamo

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \lim_{x\to 0} f(x,kx)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Dakle, granična vrednost zavisi od pravca po kome se približavamo koordinatnom početku. Stoga ta granična vrednost ne postoji, pa je funkcija f prekidna u tački $(0,0)$.

NAPOMENA 1. Pod pravcem približavanja tačke $M(x,y)$ koordinatnom početku možemo podrazumevati proizvoljnu neprekidnu krivu sa jednačinom (u polarnim koordinatama) $\rho = \rho(\varphi)$ (videti sliku) i osobinom $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} = \rho(\varphi_0) = 0$ (gde φ_0 može biti konačno ili beskonačno. Na primer, $\rho = 2\cos\varphi$, $\varphi_0 = \pi/2$ ili $\rho = e^{-\varphi}$, $\varphi_0 = +\infty$). U slučaju da postoji $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$, to znači da ova granična vrednost ima istu vrednost ma kojim se pravcem tačka $M(x,y)$ približavala koordinatnom početku $(0,0)$.

NAPOMENA 2. Da je funkcija prekidna u tački $(0,0)$ moglo se utvrditi ako uočimo nizove tačaka $M_n'\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ i $M_n''\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Tada $M_n' \to (0,0)$ i $M_n'' \to (0,0)$ kada $n \to +\infty$. Kako je

$$f(M_n') = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \to 1 \ (n \to +\infty), \quad f(M_n'') = f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{4}{5} \to \frac{4}{5} \ (n \to +\infty),$$

onda na osnovu Heineove definicije neprekidne funkcije zaključujemo da je f prekidna u $(0,0)$.

3. Ispitati da li je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big), \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

neprekidna u tački $(0,0)$.

Rešenje. Ako uvedemo polarne koordinate $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, tada je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0+} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \lim_{\rho\to 0+} \frac{2\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2}$$
$$= 2\lim_{\rho\to 0+} \rho\cos\varphi\sin^2\varphi = 0.$$

Pošto je $f(0,0) = 0$, zaključujemo da je funkcija f neprekidna u tački $(0,0)$.

Da je funkcija neprekidna u tački $(0,0)$, moglo se utvrditi sledećom procenom:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| = 2\rho|\cos\varphi\sin^2\varphi| \le 2\rho < \varepsilon.$$

Prema tome, imamo

$$\sqrt{x^2+y^2} = \rho < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon,$$

gde je $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$. Dakle, f je neprekidna u $(0,0)$.

4. Naći $f_x(x_0, 1)$ $(0 \le x_0 \le 1)$, ako je $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{x/y}$.

Rešenje. Kako je $f(x_0, 1) = x_0$, $f(x_0 + \Delta x, 1) = x_0 + \Delta x$, na osnovu definicije prvog parcijalnog izvoda imamo

$$f_x(x_0, 1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, 1) - f(x_0, 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

5. Naći parcijalne izvode prvog reda sledećih funkcija:

$$1^\circ \quad u = x^4 + y^4 - 3x^2y; \qquad 2^\circ \quad u = xy + \frac{x}{y}; \qquad 3^\circ \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Rešenja. 1° Diferenciranjem u po x, smatrajući da je y konstantno, dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 6xy.$$

S druge strane, diferenciranjem u po y, smatrajući da je x konstantno, nalazimo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 3x^2.$$

2° $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y}, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}.$

3° $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2},$

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$

Primetimo da je funkcija $u = u(x, y, z)$ u primeru 3° simetrična u odnosu na promenljive, što znatno olakšava nalaženje parcijalnih izvoda.

6. Naći $z_x(1, 1)$ i $z_y(1, 1)$ ako je $z = \ln(x + \ln y)$.

Rezultat. $z_x(1, 1) = z_y(1, 1) = 1$.

7. Ispitati da li je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)} & (x^2 + y^2 > 0), \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$$

diferencijabilna u tački $(0, 0)$.

Rešenje. Primetimo najpre da je $x^2 + y^2 > 0 \Leftrightarrow (x, t) \neq (0, 0)$ i $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Da bismo dokazali da je funkcija f diferencijabilna u tački, dovoljno je dokazati da se njen totalni priraštaj $\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)$ može prikazati u obliku

$$\Delta f(0, 0) = f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y + \rho\omega(\rho), \tag{1}$$

gde je $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ i $\lim\limits_{\rho \to 0+} \omega(\rho) = 0$.

Izračunajmo $f_x(0,0)$. Po definiciji je

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/\Delta x^2}}{\Delta x}.$$

Uvođenjem smene $1/\Delta x = t$, za koju $t \to \pm\infty$ ako $\Delta x \to 0$, imamo

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to \pm\infty} te^{-t^2} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Zbog simetrije funkcije f u odnosu na promenljive, izlazi da je $f_y(0,0) = 0$. Tada jednakost (1) postaje $f(\Delta x, \Delta y) = \rho\omega(\rho)$. Kako je

$$f(\Delta x, \Delta y) = e^{-1/(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = e^{-1/\rho^2},$$

dobijamo $e^{-1/\rho^2} = \rho\omega(\rho)$, odnosno $\omega(\rho) = \dfrac{e^{-1/\rho^2}}{\rho}$. S obzirom da je

$$\lim_{\rho \to 0+} \omega(\rho) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{e^{-1/\rho^2}}{\rho} = 0,$$

zaključujemo da je funkcija diferencijabilna u tački $(0,0)$.

8. Ispitati da li je funkcija $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ diferencijabilna u tački $(0,0)$.

Rešenje. Izračunajmo parcijalne izvode funkcija f u tački $(0,0)$. Imamo

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x} = 1.$$

Zbog simetrije funkcije f dobijamo $f_y(0,0) = 1$. Ispitajmo da li se totalni priraštaj $\Delta f(0,0)$ može prikazati u obliku (1) (videti prethodni zadatak). Tada je

$$\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} = \Delta x + \Delta y + \rho\omega(\rho) \qquad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

pa je

$$\omega(\rho) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Stavimo $\Delta y = k\Delta x$ $(\Delta x > 0)$. Imamo da $\Delta x \to 0+ \Leftrightarrow \rho \to 0+$ i onda je

$$\lim_{\rho \to 0+} \omega(\rho) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + k^2 \Delta x^2}} = \frac{\sqrt[3]{1 + k^3} - 1 - k}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Odavde zaključujemo da ne postoji $\lim\limits_{\rho \to 0+} \omega(\rho)$, što znači da funkcija f nije diferencijabilna u tački $(0,0)$.

Iz ovog primera možemo zaključiti da iz egzistencije prvih parcijalnih izvoda u tački ne proizilazi da je funkcija diferencijabilna u toj tački. To nas navodi da postavimo pitanje: Koje dodatne uslove moraju da zadovolje prvi parcijalni izvodi, da bi funkcija bila diferencijabilna u tački?

9. Dokazati sledeću teoremu (dovoljni uslovi diferecnijabilnosti): *Ako funkcija $f(x,y)$ ima u okolini tačke $M(x,y)$ parcijalne izvode po svakoj promenljivoj x i y i*

ako su parcijalni izodi neprekidni u tački $M(x,y)$, tada je funkcija f diferencijabilna u tački $M(x,y)$.

Dokaz. Totalni priraštaj funkcije $f(x,y)$ u tački $M(x,y)$ možemo prikazati u obliku

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

tj.

$$\Delta f(x,y) = \big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\big) + \big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\big). \tag{1}$$

Primenom LAGRANGEove teoreme za funkcije jedne promenljive, imamo

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) \quad (0<\theta_1<1), \tag{2}$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \cdot f_y(x, y+\theta_2\Delta y) \quad (0<\theta_2<1). \tag{3}$$

Kako su po pretpostavci izvodi f_x, f_y neprekidne funkcije u tački $M(x,y)$, tada je

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y), \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y).$$

Stoga je

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) + \varepsilon_1, \quad f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y) + \varepsilon_2,$$

gde $\varepsilon_1 \to 0$ i $\varepsilon_2 \to 0$ kada $\Delta x \to 0$ i $\Delta y \to 0$. Ako ove jednakosti zamenimo u (2) i (3), iz (1) dobijamo

$$\Delta f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y. \tag{4}$$

Neka je sada $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Pošto je $\dfrac{|\Delta x|}{\rho} \le 1$, $\dfrac{|\Delta y|}{\rho} \le 1$, imamo

$$\frac{1}{\rho}\,|\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y| \le |\varepsilon_1|\,\frac{|\Delta x|}{\rho} + |\varepsilon_2|\,\frac{|\Delta y|}{\rho} \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0 \qquad (\rho \to 0+),$$

pa možemo staviti da je $\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = \rho\omega(\rho)$, gde je $\lim\limits_{\rho\to 0+} \omega(\rho) = 0$.

Time smo dokazali da se priraštaj funkcije može prikazati u obliku

$$\Delta f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \rho\omega(\rho),$$

gde je $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ i $\lim\limits_{\rho\to 0+} \omega(\rho) = 0$, tj. da je funkcija diferencijabilna u tački $M(x,y)$.

NAPOMENA. U formulaciji teoreme i njenom dokazu pod okolinom tačke $M(x,y)$ podrazumevali smo konveksnu okolinu. Zatim, iz samog dokaza uočavamo da možemo pretpostaviti slabije uslove za funkciju f. Na primer, dovoljno je pretpostaviti da funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode f_x i f_y u tački $M(x,y)$.

Da se zaista radi samo o dovoljnim uslovima za diferencijabilnost funkcija, možemo se uveriti na osnovu sledećeg primera.

10. Dokazati da funkcija $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ $\big((x,y) \neq (0,0)\big)$ i $f(0,0) = 0$ ima u okolini tačke $(0,0)$ prekidne parcijalne izvode f_x, f_y i neograničene u svakoj njenoj okolini, a ipak je diferencijabilna u tački $(0,0)$.

Dokaz. Odredimo parcijalne izvode u tački $(0,0)$. Imamo

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x^2}\right) = 0.$$

Koristeći se simetrijom funkcije f u odnosu na promenljive, dobijamo $f_y(0,0) = 0$, pa je

$$f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + \rho\omega(\rho),$$

tj.

$$(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \rho\omega(\rho).$$

Kako je $\rho^2 = \Delta x^2+\Delta y^2$, dobijamo $\omega(\rho) = \rho\sin\dfrac{1}{\rho^2} \to 0$ $(\rho\to 0+)$. Prema tome, funkcija f je diferencijabilna u tački $(0,0)$. Ako je $(x,y)\neq(0,0)$, tada je

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Uočimo nizove tačaka $M_n'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)$ i $M_n''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi+\pi}},0\right)$, koji teže $(0,0)$ kada $n\to+\infty$. Tada je

$$f_x(M_n') = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty \ (n\to+\infty),$$
$$f_x(M_n'') = 2\sqrt{2n\pi+\pi} \to +\infty \ (n\to+\infty),$$

pa zaključujemo da je funkcija $(x,y)\mapsto f_x(x,y)$ prekidna u tački $(0,0)$ i neograničena u proizvoljnoj okolini tačke $(0,0)$.

Analogno važi i za $f_y(x,y)$.

11. Dokazati da funkcija $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2-y}$ teži nuli kada tačka (x,y) teži ka $(0,0)$ duž svake prave koja prolazi kroz tačku $(0,0)$, a da ipak ova funkcija nema graničnu vrednost u tački $(0,0)$.

Uputstvo. Primetimo da je $f(x,x^2) = 1 \to 1$ $(x\to 0)$.

12. Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \ \big((x,y)\neq(0,0)\big), \qquad f(0,0) = 0$$

u tački $(0,0)$.

Rezultat. Funkcija je neprekidna ali nije diferencijabilna u tački $(0,0)$.

13. Dokazati da postoji funkcija koja ima parcijalne izvode u tački ali je prekidna u toj tački.

UPUTSTVO. Videti zadatak 2. Iz ovog primera možemo zaključiti da egzistencija parcijalnih izvoda u tački ne implicira neprekidnost funkcije u istoj tački.

14. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\alpha} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big), \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big). \end{cases}$$

Dokazati da funkcija f ima sledeće osobine:

1° Za $0 < \alpha \leq 1/2$ neprekidna je ali nije diferencijabilna u $(0,0)$.

2° Za $1/2 < \alpha \leq 3/2$ diferencijabilna je u $(0,0)$ ali ima neprekidne parcijalne izvode u $(0,0)$.

3° Za $3/2 < \alpha$ ima neprekidne parcijalne izvode u $0,0)$. Da li je tada diferencijabilna u $(0,0)$?

15. Odrediti jednačinu tangentne ravni i normale površi

1° $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$, u tački $(2,1,3)$;

2° $z = xy$, u tački $(3,-4,-12)$.

Rešenje. 1° Neka je jednačina površi data u eksplicitnom obliku, $z = f(x,y)$. Tada jednačina tangentne ravni i normale u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$, gde je $z_0 = f(x_0,y_0)$, glase

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Za funkciju $f(x,y) = 3x^2+2y^2-11$ je $f_x = 6x$, $f_y = 4y$, pa je $f_x(2,1) = 12$, $f_y(2,1) = 4$. Jednačina tangentne ravni glasi

$$z - 3 = 12(x-2) + 4(y-1) \Rightarrow 12x + 4y - z = 25,$$

a normale

$$\frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

2° **Rezultat.** $4x - 3y + z = 12$, $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z+12}{1}$.

16. Odrediti jednačine tangentne ravni i normale površi

1° $2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0$, u tački $(1,-2,-3)$;

2° $x^2 + 2z^2 = 3y^2$, u tački $(2,-2,-2)$.

Rešenje. 1° Ako je jednačina površi data u implicitnom obliku, $F(x,y,z) = 0$, tada jednačine tangentne ravni i normale u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $\big(F(M_0) = 0\big)$ glase

$$F_x(M_0)(x-x_0) + F_y(M_0)(y-y_0) + F_z(M_0)(z-z_0) = 0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F_x(M_0)}.$$

Za površ $f(x,y,z) = 2x^2+2xy+y^2+z+1 = 0$ imamo $F_x = 4x+2y$, $F_y = 2x+2y$, $F_z = 1$, pa je u tački $M_0(1,-2,-3)$: $F_x(M_0) = 0$, $F_y(M_0) = -2$, $F_z(M_0) = 1$. Stoga, jednačina tangentne ravni glasi

$$0 \cdot (x-1) + (-2) \cdot (y+2) + 1 \cdot (z+3) = 0 \Rightarrow z - 2y = 1,$$

a normale

$$x - 1 = 0, \quad \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}.$$

2° **Rezultat.** $x + 3y - 2z = 0, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{-2}.$

17. Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ odsecaju na koordinatnim osama odsečke čija je suma konstantna.

Dokaz. Neka je $F(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a} = 0$ i $M_0(x_0,y_0,z_0)$ proizvoljna tačka površi. Kako je $F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $F_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}$, jednačina tangentne ravni u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$ glasi

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

tj.

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} - \left(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}\right) = 0.$$

Pošto tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ pripada površi, onda je $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0} = \sqrt{a}$, pa zamenom u poslednju jednačinu, dobijamo segmentni oblik jednačine tangentne ravni

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1.$$

Dužine odsečaka na koordinatnim osama su $\sqrt{ax_0}$, $\sqrt{ay_0}$, $\sqrt{az_0}$, a njihova suma je

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}\left(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}\right) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a,$$

čime je dokaz završen.

18. Dokazati da tangentna ravan u proizvoljnoj tački u prvom kvadrantu površi $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{a}$ odseca na koordinatnim osama odsečke čiji je zbir kvadratnih korena konstantan.

19. Dokazati da tangentne ravni površi $a(xy + yz + zx) = xyz$ u tačkama preseka ove površi sa sferom $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, odsecaju od koordinatnih osa odsečke čiji je zbir konstantan.

20. Naći du i $du(1,1)$ ako je

1° $u = xy + \frac{x}{y^2} + xy^3$; 2° $u = x \sin \frac{y^2}{x}$.

Rešenje. 1° Kako je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y^2} + y^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - \dfrac{2x}{y^3} + 3xy^2$, imamo

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \Big(y + \frac{1}{y^2} + y^3\Big)\mathrm{d}x + \Big(x - \frac{2x}{y^3} + 3xy^2\Big)\mathrm{d}y,$$

tako da je $\mathrm{d}u(1,1) = 3\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y$.

21. Odrediti $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}u(1,1,2)$ ako je

1° $u = x^2 + z^2 + xy + yz$; 2° $u = \dfrac{1}{3}y^3 + \dfrac{z}{x}$.

Rešenje. 1° Kako je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z + y$, dobijamo

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z = (2x + y)\,\mathrm{d}x + (x + z)\,\mathrm{d}y + (2z + y)\,\mathrm{d}z.$$

Na osnovu toga je $\mathrm{d}u(1,1,2) = 3\,\mathrm{d}x + 3\,\mathrm{d}y + 5\,\mathrm{d}z$.

22. Data je funkcija $u = 3x^2 - 3y^2 + z^2 - 2xyz$ i tačka $M_0(1,-1,2)$. Odrediti grad $u(M_0)$ i naći izvod funkcije u u tački M_0 u pravcu vektora $\vec{\ell} = (2,-2,-1)$.

Rešenje. Polazeći od

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y - 2xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2xy,$$

imamo

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = (6x - 2yz)\vec{i} + (-6y - 2xz)\vec{j} + (2z - 2xy)\vec{k},$$

pa je $\operatorname{grad} u(M_0) = \operatorname{grad} u(1,-1,2) = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Primenom formule

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\ell}\right|_{M_0} = \vec{\ell}_0 \cdot \operatorname{grad}(M_0),$$

gde je $\vec{\ell}_0 = \dfrac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = \dfrac{2}{3}\vec{i} - \dfrac{2}{3}\vec{j} - \dfrac{1}{3}\vec{k}$, dobijamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\ell}\right|_{M_0} = \Big(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}\Big) \cdot (10\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}) = \frac{10}{3}.$$

23. Odrediti izvod funkcije $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ u tački $M(x,y,z)$ u pravcu vektora položaja te tačke.

Rešenje. Vektor položaja tačke $M(x,y,z)$ je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Kako je

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{M} = \vec{r}_0 \cdot \operatorname{grad} f,$$

gde je $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\operatorname{grad} f = \dfrac{2x}{a^2}\,\vec{i} + \dfrac{2y}{b^2}\,\vec{j} + \dfrac{2z}{c^2}\,\vec{k}$, dobijamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_M = \left(\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2z^2}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2f(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

pri čemu je $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

24. Naći izvod funkcije $u = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$ u tački $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ u pravcu unutrašnje normale površi $F = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Rešenje. Kako je $\operatorname{grad} u = -\dfrac{2x}{a^2}\,\vec{i} - \dfrac{2y}{b^2}\,\vec{j} - \dfrac{2z}{c^2}\,\vec{k}$, u tački M je

$$\operatorname{grad} u\big|_M = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}\,\vec{i} + \frac{1}{b}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\,\vec{k}\right)$$

i neka je $\vec{n}_0$ vektor unutrašnje normale. Tada je $\vec{n}_0 = \vec{n}/|\vec{n}|$, gde je

$$\vec{n} = -\operatorname{grad} F = -\left(\frac{2x}{a^2}\,\vec{i} + \frac{2y}{b^2}\,\vec{j} + \frac{2z}{c^2}\,\vec{k}\right).$$

Odavde dobijamo jedinični vektor unutrašnje normale

$$\vec{n}_0 = -\left.\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}\right|_M = -\left.\frac{\frac{x}{a}\,\vec{i} + \frac{y}{b^2}\,\vec{j} + \frac{z}{c^2}\,\vec{k}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}\right|_M = -\frac{\frac{1}{a}\,\vec{i} + \frac{1}{b}\,\vec{j} + \frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Dakle,

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right|_M = \vec{n}_0 \cdot \operatorname{grad} u\big|_M = -\frac{\frac{1}{a}\,\vec{i} + \frac{1}{b}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\,\vec{k}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{a}\,\vec{i} + \frac{1}{b}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

2.3. PARCIJALNI IZVODI SLOŽENE FUNKCIJE

Neka je $z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, gde su

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

i $x_1, x_2, \ldots, x_m$ nezavisne promenljive. Tada su parcijalni izvodi funkcije z po nezavisnim promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dati formulama

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_m} &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_m} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Da bi važile formule (1), dovoljno je pretpostaviti da je funkcija f diferencijabilna kao funkcija n promenljivih, a funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ imaju parcijalne izvode po svim nezavisno promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_m$. U ovom odeljku primenjivaćemo formule (1).

1. Naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ako je $z = f(u, v)$ i $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$.

Rešenje. Ovo je specijalan slučaj formula (1), tj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Kako je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = ye^{xy}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = xe^{xy}$, imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot(-2y) + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot xe^{xy}.$$

2. Naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ako je $z = f(u)$ i $u = xy + \dfrac{y}{x}$.

Rešenje. Imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\Big(y - \frac{y}{x^2}\Big), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\Big(x + \frac{1}{x}\Big).$$

3. Naći $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ako je $u = f(x, y, z)$ i $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

Rešenje. Primenom formula (1) imamo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}.$$

4. Proveriti da li funkcija $f(x,y,z) = F\left(\frac{xy}{z},\, x^2+y^2+z^2\right)$ zadovoljava jednačinu

$$x(y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial x} - y(x^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial y} - z(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

gde je $F(u,v)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija.

Rešenje. Neka je $f(x,y,z) = F(u,v)$, gde je $u = xy/z$, $v = x^2+y^2+z^2$. Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{y}{z} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot 2x, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{x}{z} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot 2y, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\left(-\frac{xy}{z^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot 2z. \tag{4}$$

Ako (2), (3) i (4) zamenimo u izrazu na levoj strani jednačine (1), posle sređivanja dobijamo da je taj izraz identički jednak nuli.

5. Naći $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ i $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ ako je $u = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, pri čemu je

$$x_3 = g(x_1,x_2), \quad x_4 = h(x_1,x_2,x_3).$$

Rešenje. Imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_4}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_4}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right).\end{aligned}$$

$\frac{\partial g}{\partial x_1} +$

$\frac{\partial g}{\partial x_1} +$

Analogno se nalazi $\frac{\partial u}{\partial x_2}$.

6. Naći $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ako je $z = \frac{x}{y}$ i $x = e^t$, $y = \ln t$.

Rezultat. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y}e^t - \frac{x}{y^2}\frac{1}{t}$.

7. Ako je $u = f(x,y)$ i $x = \rho\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\right)$, $y = \left(\frac{1}{\cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi\right)$, dokazati jednakost

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 - \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = 4\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

8. Ako je $u = F(x^2+y^2+z^2)$, gde je $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = \rho\sin\varphi$, dokazati da je $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial\theta} = 0$.

9. Ako je $t \mapsto f(t)$ diferencijabilna funkcija, proveriti da li funkcije $(x,y) \mapsto z$, date pomoću

$$2^\circ \quad z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad 2^\circ \quad z = yf(x^2-y^2), \qquad 3^\circ \quad z = yf\left(\frac{x}{y^2}\right),$$

zadovoljavaju redom sledeće parcijalne diferencijalne jednačine:

$$1^\circ \quad y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad 2^\circ \quad \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}, \qquad 3^\circ \quad 2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

Odrediti

10. $\boxed{\text{Naći}}$ rešenje $z = z(x,y)$ jednačine $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ koje zadovoljava uslov $z(x,x^2) = 1$.

Rešenje. Ako datu jednačinu integralimo po promenljivoj y, tj.

$$\int \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int (x^2+2y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x),$$

dobijamo

$$z(x,y) = x^2y + y^2 + \varphi(x), \tag{1}$$

gde je φ proizvoljna diferencijabilna funkcija nezavisno promenljive x. Sada imamo $z(x,x^2) = x^2\cdot x^2 + (x^2)^2 + \varphi(x)$, a pošto je $z(x,x^2) = 1$, dobijamo $2x^4 + \varphi(x) = 1$, tj. $\varphi(x) = 1 - 2x^4$. Zamenom $\varphi(x)$ u (1), nalazimo

$$z(x,y) = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1.$$

11. Data je funkcija $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$, gde je $x = t$, $y = t$.

Dokazati da ova funkcija nije diferencijabilna u tački $(0,0)$ i da postoje parcijalni izvodi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ali da ne važi formula

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

2.4. PARCIJALNI IZVODI I DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

1. Naći parcijalne izvode drugog reda sledećih funkcija:

1° $z = x^3 + xy^2 + x\sin y$;

2° $z = e^{-x/y}$;

3° $u = x\cos y + \sin(xz)$.

Rešenje. 1° Imamo po definiciji:

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + y^2 + \sin y) = 6x;$$
$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^2 + \sin y) = 2y + \cos y;$$
$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + x\cos y) = 2y + \cos y;$$
$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + x\cos y) = 2x - x\sin y.$$

Primetimo da je $z_{xy} = z_{yx}$ za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2° $z_{xx} = \frac{1}{y^2}e^{-x/y}$, $z_{xy} = \frac{1}{y^2}\left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{-x/y}$, $z_{yy} = \frac{x}{y^3}\left(\frac{x}{y} - 2\right)e^{-x/y}$;

3° $u_{xx} = -z^2\sin(xz)$, $u_{xy} = u_{yx} = -\sin y$,
$u_{xz} = u_{zx} = \cos(xz) - xz\sin(xz)$, $u_{yy} - x\cos y$, $u_{yz} = u_{zy} = 0$,
$u_{xx} = -x^2\sin(xz)$.

2. Naći: 1° $\mathrm{d}^2 z\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ako je $z = x\sin(xy)$;

2° $\mathrm{d}^2 u(1, -1, 0)$ ako je $u = xy^2 e^{xz}$.

Rešenje. 1° Kako je

$$z_{xx} = 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy), \quad z_{xx}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4},$$
$$z_{xy} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(x, y), \quad z_{xy}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$
$$z_{yy} = -x^3\sin(xy), \quad z_{yy}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

L y

imamo

$$\mathrm{d}^2 z\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = z_{xx}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x^2 + 2z_{xy}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z_{yy}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}y^2$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}\mathrm{d}x^2 - \pi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mathrm{d}y^2.$$

2° Koristeći se parcijalnim izvodima drugog reda

$$u_{xx} = y^2x(2+xz)e^{xz}, \quad u_{xy} = 2y\,(1+xz)e^{xz},$$
$$u_{xz} = xy^2(2+xz)e^{xz}, \quad u_{yy} = 2xe^{xz}, \quad u_{yz} = 2x^2ye^{xz}, \quad u_{zz} = x^3y^2e^{xz}$$

i formulom

$$\mathrm{d}^2u = u_{xx}\mathrm{d}x^2 + u_{yy}\mathrm{d}y^2 + u_{zz}\mathrm{d}z^2 + 2y_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2u_{yz}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2u_{xz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

nalazimo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u(1,-1,0) &= u_{xx}(1,-1,0)\,\mathrm{d}x^2 + u_{yy}(1,-1,0)\,\mathrm{d}y^2 + u_{zz}(1,-1,0)\,\mathrm{d}z^2\\ &\quad + 2u_{xy}(1,-1,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2u_{yz}(1,-1,0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2u_{xz}(1,-1,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ &= 2\,\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - 4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

3. 1° Neka je $z = z(u,v)$ i $u = xe^y$, $v = xe^{-y}$. Dokazati jednakost

$$x^2z_{xx} - xz_x + z_{yy} = 2(u^2z_{uu} \overset{!}{=} v^2z_{vv}).$$

2° Dokazati da funkcija $z = z(u,v)$, gde je $u = x^2/y$, $v = y^2/x$, zadovoljava jednačinu

$$x^2z_{xx} - y^2z_{yy} = 3(u^2z_{uu} - v^2z_{vv}).$$

Rešenje. 1° Pođimo od jednakosti $z_x = z_uu_x + z_vv_x$, tj. od

$$z_x = z_ue^y + z_ve^{-y}. \tag{1}$$

Odavde je

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}z_x = \frac{\partial}{\partial x}(z_ue^y + z_ve^{-y}) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}z_u\Big)e^y + \Big(\frac{\partial}{\partial x}z_v\Big)e^{-y}.$$

Ovde je važno primetiti da parcijalni izvodi z_u i z_v zavise od promenljivih u i v, pri čemu su u i v funkcije nezavisno promenljivih x i y, pa izvode $\dfrac{\partial}{\partial x}z_u$ i $\dfrac{\partial}{\partial x}z_v$ tražimo kao parcijalne izvode složene funkcije. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}z_{xx} &= \Big(\frac{\partial z_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)e^y + \Big(\frac{\partial z_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)e^{-y}\\ &= (z_{uu}e^y + z_{uv}e^{-y})e^y + (z_{vu}e^y + z_{vv}e^{-y})e^{-y},\end{aligned}$$

tj.

$$z_{xx} = z_{uu}e^{2y} + 2z_{uv} + z_{vv}e^{-2y}, \tag{2}$$

sa pretpostavkom da je $z_{uv} = z_{vu}$.

Na sličan način dobijamo z_{yy} :

$$
\begin{aligned}
z_y &= z_u u_y + z_v v_y = z_u x e^y - z_v x e^{-y}, \\
z_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(z_u x e^y - z_v x e^{-y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y} z_u\right) x e^y + z_u x \frac{\partial}{\partial y} e^y - \left(\frac{\partial}{\partial y} z_v\right) x e^{-y} - z_v x \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial z_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) x e^y + z_u x e^y - \left(\frac{\partial z_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) x e^{-y} - z_v x \cdot (-1) e^{-y} \\
&= (z_{uu} x e^y - z_{uv} x e^{-y}) x e^y + z_u x e^y - (z_{vu} x e^y - z_{vv} x e^{-y})\, x e^{-y} + z_v x e^{-y}.
\end{aligned}
$$

Prema tome,

$$
z_{yy} = z_{uu} x^2 e^{2y} - 2 z_{uv} x^2 + z_{vv} x^2 e^{-2y} + z_u x e^y + z_v x e^{-y}. \tag{3}
$$

Zamenom (1), (2) i (3) u izraz $x^2 z_{xx} - x z_x + z_{yy}$ dobijamo da je

$$
x^2 z_{xx} - x z_x + z_{yy} = 2\left(u^2 z_{uu} + v^2 z_{vv}\right).
$$

4. Neka je $z = \varphi(u,v)$, $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$, tako da su zadovoljeni uslovi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Dokazati jednakosti:

$$
1^\circ \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.
$$

$$
2^\circ \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right).
$$

5. Odrediti funkciju $F(r)$ iz jednakosti $F(r) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, gde je $u = f(r)$ dva puta diferencijabilna funkcija i $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Da li može da se odredi funkcija f tako da je $F(r) = 0$?

Rešenje. Pođimo od parcijalnog izvoda prvog reda

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{f'(r)}{r} \cdot x.
$$

Izvod drugog reda u_{xx} jednak je

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'(r)}{r} x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'(r)}{r}\right) x + \frac{f'(r)}{r}\frac{\partial}{\partial x} x \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} \cdot x + \frac{f'(r)}{r} = \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{x}{r} x + \frac{f'(r)}{r} \\
&= \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} x^2 + \frac{f'(r)}{r}.
\end{aligned}
$$

Kako je funkcija $(x, y, z) \mapsto r$ simetrična u odnosu na promenljive x, y, z, imamo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\, y^2 + \frac{f'(r)}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\, z^2 + \frac{f'(r)}{r}.$$

Zamenom nađenih parcijalnih izvoda drugog reda u $F(r)$, dobijamo

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\,(x^2 + y^2 + z^2) + 3\,\frac{f'(r)}{r} \\ &= \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\, r^2 + 3\,\frac{f'(r)}{r} = f''(r) + 2\,\frac{f'(r)}{r}. \end{aligned}$$

Jednačina $F(r) = 0$ svodi se na diferencijalnu jednačinu $f''(r) + 2\,\dfrac{f'(r)}{r} = 0$, čije je opšte rešenje $f(r) = -\dfrac{C_1}{r} + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

6. Naći najopštiju funkciju $u = u(r)$, gde je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, koja zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{4u}{x^2 + y^2} = 0.$$

Rezultat. $u(r) = C_1 r^2 + C_2 r^{-2} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

7. Naći opšte rešenje $z = z(x, y)$ parcijalne diferencijalne jednačine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, a zatim izdvojiti ono rešenje koje zadovoljava uslove $z(x, 0) = 1$, $z_y(x, 0) = x$.

Rešenje. Integracijom date jednačine po y dobijamo $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + \varphi(x)$. Još jednom integracijom po y imamo

$$z(x, y) = y^2 + y\varphi(x) + \psi(x),$$

gde su φ, ψ proizvoljne diferencijabilne funkcije nezavisno promenljive x. Prema tome, dobili smo opšte rešenje date parcijalne jednačine. Izdvojimo ono rešenje koje zadovoljava date uslove.

Kako je $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=0} = z_y(x, 0) = \varphi(x)$, iz uslova $z_y(x, 0) = x$ dobijamo da je $\varphi(x) = x$. Slično tome, imamo $z(x, 0) = \psi(x)$ i početni uslov $z(x, 0) = 1$, što znači da je $\psi(x) = 1$. Na taj način dobili smo rešenje parcijalne jednačine

$$z(x, y) = y^2 + xy + 1,$$

koje zadovoljava date uslove.

8. Naći opšte rešenje $z = z(x, y)$ parcijalne diferencijalne jednačine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, a zatim izdvojiti ono rešenje koje zadovoljava uslove $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

Rešenje. Opšte rešenje je $z(x, y) = \dfrac{1}{2}\, xy(x + y) + \varphi(x) + \psi(y)$. Rešenje koje zadovoljava date uslove je $z(x, y) = \dfrac{1}{2}\, xy\,(x + y) + x + y^2$.

9. Dati primer funkcije $(x, y) \mapsto f(x, y)$ takve da je $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ali da ima prekidan mešoviti izvod $(x, y) \mapsto f_{xy}(x, y)$.

Rešenje. Neka je $f(x, y) = (x^2 + y^2)(\ln(x^2 + y^2) - 1)$, $(x, y) \neq (0, 0)$ i $f(0, 0) = 0$.

Tada je

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{4xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$
$$f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 0.$$

Jasno je da je funkcija $(x, y) \mapsto f_{xy}(x, y)$ prekidna u tački $(0, 0)$.

Iz ovog primera zaključujemo da je neprekidnost mešovitih izvoda $(x, y) \mapsto f_{xy}(x, y)$ i $(x, y) \mapsto f_{yx}(x, y)$ u tački (x_0, y_0) dovoljan uslov da važi jednakost $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$, ali nije potreban.

2.5. EKSTREMUMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

1. Odrediti lokalne ekstremume sledećih funkcija:

1° $z = (x+y)^3 - 3xy^2 - 60y$; 2° $z = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$.

Rešenje. 1° Odredimo prve parcijalne izvode. Imamo

$$z_x = 3(x+y)^2 - 3y^2, \quad z_y = 3(x+y)^2 - 6xy - 60.$$

Stacionarne tačke određujemo iz sistema $z_x = 0$, $z_y = 0$, tj.

(1) $3(x+y)^2 - 3y^2 = 0$, (2) $3(x+y)^2 - 6xy - 60 = 0$.

Iz jednačine (1) dobijamo $x + y = \pm y$, tj. $x = 0$ ili $x = -2y$. Za $x = 0$ iz jednačine (2) nalazimo $y = \pm 2\sqrt{5}$. Dakle, imamo dve stacionarne tačke $M_{1/2}(0, \pm 5)$.

Za $x = -2y$ jednačina (2) daje $y = \pm 2$, tako da je $x = \mp 4$, što znači da imamo još dve stacionarne tačke, $M_{3/4}(\pm 4, \mp 2)$.

Da bismo ispitali prirodu stacionarnih tačaka, pođimo od drugih parcijalnih izvoda: $z_{xx} = 6(x+y)$, $z_{xy} = 6x$, $z_{yy} = 6y$.

U tački $M_1(0, 2\sqrt{5})$ imamo

$$A = z_{xx}(M_1) = 12\sqrt{5} > 0, \quad B = z_{xy}(M_1) = 0, \quad C = z_{yy}(M_1) = 12\sqrt{5}.$$

Kako je $A > 0$ i $AC - B^2 = 720 > 0$, u tački M_1 funkcija ima lokalni minimum $z_{\min} = -80\sqrt{5}$.

Za tačku $M_2(0, -2\sqrt{5})$ je

$$A = z_{xx}(M_2) = -12\sqrt{5}, \quad B = z_{xy}(M_2) = 0, \quad C = z_{yy}(M_2) = -12\sqrt{5}.$$

Pošto je $A < 0$ i $AC - B^2 = 720 > 0$, u tački M_2 imamo lokalni maksimum $z_{max} = 80\sqrt{5}$.

Za tačke $M_{3/4}(\pm 4, \mp 2)$ je $A = \pm 2$, $B = \pm 24$, $C = \mp 12$. Kako je$AC - B^2 = -600 < 0$, u ovim tačkama nemamo lokalne ekstremume, što znači da su $M_{3/4}$ sedlaste tačke.

2° U tački $(2, 2)$ je $z_{\min} = -4$.

2. Odrediti lokalne ekstremume sledećih funkcija:

1° $z = (x + 2y + 3xy)e^{-(x+2y)}$;

2° $z = (5x + 7y - 25)e^{(-x^2+xy+y^2)}$;

3° $z = 2x - 2y + \ln(2x - x^2 - y^2)$.

Rešenje. 1° Stacionarne tačke određujemo iz sistema:

$$z_x = (1 - x + y - 3xy)e^{-(x+2y)} = 0,$$
$$z_y = (2 + x - 4y - 6xy)e^{-(x+2y)} = 0.$$

S obzirom da je $e^{-(x+2y)} > 0$, ovaj sistem se svodi na

(1) $1 - x + y - 3xy = 0$, (2) $2 + x - 4y - 6xy = 0$.