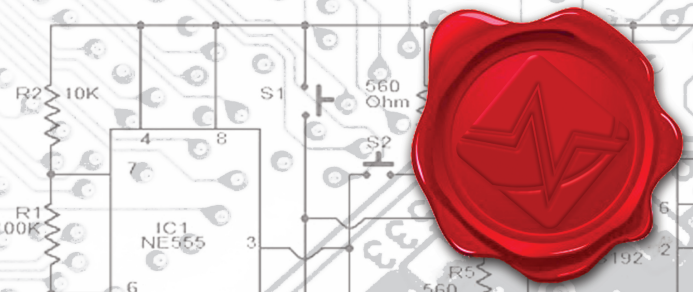
Јелена С. Поповић
Жељко Ј. Алексић



ЛИНЕАРНА ЕЛЕКТРОНИКА

● Збирка решених проблема ●

●●

(Прво издање)

СУ ЕТФ
Београд
2004.

Linearna elektronika - zbirka rešenih problema
I izdanje

Autori:
Dr Jelena S. Popovć,
docent Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Dr Željko J. Aleksić,
docent Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Recenzent:
Dr Dragan M. Vasiljević,
redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Autorsko izdanje

Štampa:
ŽIG, Beograd

Tiraž:
400 primeraka

ISBN 86-905707-0-5

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Narodne biblioteke Srbije, Beograd

621.37/.38(075.8)(076)

POPOVIĆ, Jelena S.
Linearna elektronika: zbirka rešenih problema / Jelena S. Popović, Željko J. Aleksić. – 1. izd. – Beograd: J. Popović : Ž. Aleksić, 2004 (Beograd : ŽIG). - 185 str. : graf. prikazi; 24 cm

Tiraž 400. – Bibliografija uz svako poglavlje.

ISBN 86-905707-0-5
1. Aleksić, Željko J.
a) Elektronika – Zadaci
COBISS.SR-ID 115650316

NAPOMENA: Nije dozvoljeno fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige – u celini ili u delovima.

PREDGOVOR

Materija iz oblasti linearne elektronike je dugi niz godina sastavni deo plana studija na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, kao i na drugim tehničkim fakultetima u zemlji. Međutim, ova oblast još uvek nije u dovoljnoj meri pokrivena udžbeničkom literaturom na našem jeziku, kao ni odgovarajućim zbirkama zadataka. Učestvujući u izvođenju nastave iz predmeta Linearna elektronika na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, autori ove zbirke su prikupili dovoljno materijala za izdavanje zbirke koja se nalazi pred čitaocem. Gotovo svi zadaci iz ove zbirke u istoj ili sličnoj formi bili su na ispitu. Stoga je zbirka prvenstveno namenjena studentima Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu za savladavanje gradiva iz Linearne elektronike, ali i studentima drugih tehničkih fakulteta. Pored toga, u inženjerskoj praksi može da bude izvor korisnih rešenja problema iz oblasti projektovanja pojačavača i filtara.

Imajući u vidu da se materija koja je obuhvaćena ovom zbirkom ne predaje u okviru uvodnog kursa iz elektronike, odnosno da studenti već imaju određeno predznanje, autori su se opredelili za zbirku problemskih zadataka. Ovakvi zadaci su bliži realnim problemima u inženjerskoj praksi, ali zahtevaju od studenta kompleksniji i sveobuhvatniji pristup materiji, obzirom da podrazumevaju postojanje stručnih osnova koje omogućavaju sintetički, kreativni pristup u rešavanju problema. Zadaci su u cilju lakšeg savladavanja dati sa detaljnim rešenjima, uz objašnjenja i komentare kojima se obrazlažu dati proračuni.

Za rešavanje zadataka problemskog tipa neophodna je kombinovana primena znanja iz nekoliko nastavnih tema u okviru linearne elektronike, pa je zbirka podeljena samo u tri poglavlja. Autor prvog i trećeg poglavlja je Jelena Popović, a autor drugog poglavlja je Željko Aleksić.

U prvom poglavlju su obrađeni problemi frekvencijskih ograničenja i pojave šuma u pojačavačkim kolima. Pokazane su metode za približnu analizu rada pojačavača u frekvencijskom domenu. Posebna pažnja je posvećena pojavi slurejta kod operacionih pojačavača. Takođe je pokazano kako se vrši analiza šuma u linearnim kolima sa poluprovodničkim komponentama.

Stabilnost i kompenzacija pojačavača su obuhvaćeni zadacima u drugom poglavlju. Rešenim primerima obuhvaćeni su svi značajniji tipovi kompenzacije u kolu

СУНЕТФ

pojačavača i u kolu povratne sprege. U većini zadataka pojačavači ili pojačavački stepeni su definisani isključivo spoljašnjim parametrima, sem u nekoliko primera na kraju poglavlja. Ovakvim pristupom je u centru pažnje zadržana suština problema, a rešavanja kola i izračunavanja su svedena na prihvatljivu meru.

Na velikom broju primera u trećem poglavlju pokazan je postupak projektovanja analognih filtara. Obuhvaćene su sve faze u projektovanju, od zadavanja gabarita do pasivnih i aktivnih realizacija filtara. Obrađene su sve poznatije bikvadratne sekcije koje se koriste u realizaciji analognih filtara.

Izdavanje ove zbirke je finansirano korišćenjem sredstava Tempus projekta JEP 17028-02. Posebnu zahvalnost autori duguju recenzentu prof. Draganu Vasiljeviću, kao i kolegi Vladanu Božoviću koji je uradio sve slike u trećem poglavlju.

Autori će sa zahvalnošću primiti sve primedbe čitalaca i nastojati da uočene greške u tekstu uklone iz eventualnih budućih izdanja.

U Beogradu, 28.06.2004. godine. Autori

SADRŽAJ

Frekvencijska ograničenja i šum u pojačavačkim kolima 1

Stabilnost i kompenzacija pojačavača 27

Analogni filtri 107

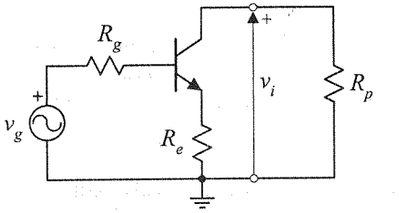
СУНЕТФ

I

Frekvencijska ograničenja i šum u pojačavačkim kolima

1.1. Primenom postupka unilateralizacije na pojačavač prikazan na slici 1.1.1, odrediti izraz za naponsko pojačanje $A(s)=\frac{v_i}{v_u}$. Zatim izračunati gornju graničnu učestanost pojačavača, pojačanje u propusnom opsegu i proizvod pojačanja i širine propusnog opsega. Objasniti uticaj otpornika u emitoru R_e na vrednosti tih parametara.

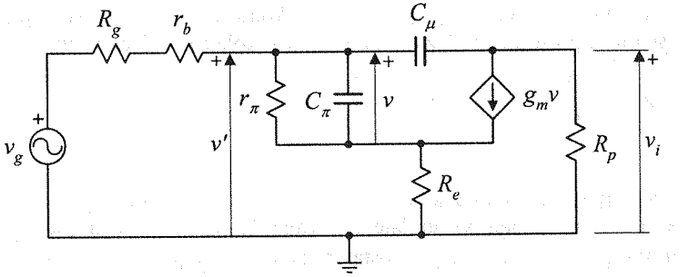
Napomena: Struja zavisnog strujnog generatora približno je jednaka struji kroz R_e u neunilateralizovanom kolu. Koristiti Milerovu teoremu za približan račun.



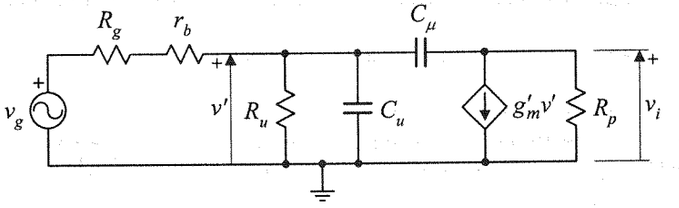
Slika 1.1.1.

Rešenje:

Ekvivalentna šema za analizu malih signala u pojačavaču sa slike 1.1.1. prikazana je na slici 1.1.2. Da bi se izvršila unilateralizacija ove šeme, odnosno da bi prenos signala bio unilateralan od ulaza ka izlazu kola, potrebno je ukinuti prenos signala u suprotnom smeru [1]. U kolu prikazanom na slici 1.1.2. prenos signala od izlaza ka ulazu se vrši kroz kondenzator C_μ i kroz otpornik R_e. Prema tome, nije dovoljno preslikati kondenzator C_μ u ulazni i u izlazni deo kola korišćenjem Milerove teoreme, već se mora raskinuti i povratna



Slika 1.1.2.



Slika 1.1.3.

sprega kroz otpornik R_e. Zbog toga će kolo sa slike 1.1.2. prvo biti ekvivalentirano šemom prikazanom na slici 1.1.3. Da bi ove dve šeme bile ekvivalentne, raspodela napona u čvorovima i struja u granama koje nisu transformisane mora biti ista u obe šeme, odnosno:

$$v' = v + R_e\left(g_m v + \frac{v}{Z_\pi}\right), \qquad (1.1.1)$$

$$\frac{v'}{Z_u}=\frac{v}{Z_\pi}, \tag{1.1.2}$$

$$g'_m v' = g_m v. \tag{1.1.3}$$

Prema tekstu zadatka, struja zavisnog strujnog generatora približno je jednaka struji kroz R_e u neunilateralizovanom kolu, odnosno struja kroz impedansu Z_π se može zanemariti u jednačini (1.1.1), pa je:

$$v' \approx (1+g_m R_e)v. \tag{1.1.4}$$

Na osnovu jednačine (1.1.3) sledi:

$$g'_m(1+g_m R_e)v = g_m v \;\Rightarrow\; g'_m = \frac{g_m}{1+g_m R_e}, \tag{1.1.5}$$

a na osnovu jednačine (1.1.2):

$$\frac{1}{Z_u}=\frac{1}{Z_\pi}\cdot\frac{v}{v'} \;\Rightarrow\; \frac{1}{R_u}+sC_u=\left(\frac{1}{r_\pi}+sC_\pi\right)\cdot\frac{1}{1+g_m R_e}, \tag{1.1.6}$$

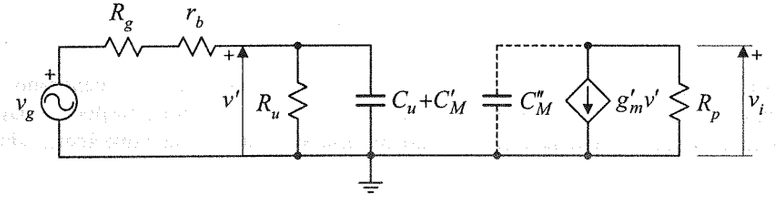
odnosno:

$$R_u = r_\pi(1+g_m R_e),\quad C_u=\frac{C_\pi}{1+g_m R_e}. \tag{1.1.7}$$

Primenom Milerove teoreme [2], impedansa kondenzatora C_μ u kolu prikazanom na slici 1.1.3. se može preslikati u ulazni i u izlazni deo kola na sledeći način:

$$Z'_M=\frac{1}{sC_\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{v_i}{v'}},\quad Z''_M=\frac{1}{sC_\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{v'}{v_i}}. \tag{1.1.8}$$

Pošto se postupak unilateralizacije koristi za procenu gornje granične učestanosti pojačavača, odnosno dobija se unilateralizovana šema za analizu rada pojačavača u propusnom opsegu, opravdano je pretpostaviti da je pojačanje v_i/v' približno konstantno i da ima vrednost $v_i/v' \approx -g'_m R_p$. Prema tome, kondenzator C_μ se preslikava u kapacitivnost $C'_M = C_\mu(1+g'_m R_p)$ u ulaznom delu kola sa slike 1.1.3, koja će biti vezana paralelno sa C_u (slika 1.1.4.). U izlaznom delu kola se C_μ preslikava u $C''_M = C_\mu(1+\frac{1}{g'_m R_p}) \approx C_\mu$ (slika 1.1.4.). Ova kapacitivnost je mnogo manja od ekvivalentne kapacitivnosti u ulaznom delu kola i može se isključiti iz daljeg razmatranja, jer je njen uticaj bitan na veoma visokim učestanostima, odnosno izvan propusnog opsega pojačavača [1].



Slika 1.1.4.

Prema oznakama na slici 1.1.4, može se odrediti naponsko pojačanje:

$$A(s)=\frac{v_i}{v_g}=-g'_m R_p\frac{v'}{v_g}=-g'_m R_p\frac{\frac{R_u}{1+sR_u(C_u+C'_M)}}{R_g+r_b+\frac{R_u}{1+sR_u(C_u+C'_M)}}, \tag{1.1.9}$$

odnosno:

$$A(s)=-g'_m R_p\frac{R_u}{R_u+R_g+r_b}\cdot\frac{1}{1+s\frac{R_u(R_g+r_b)}{R_u+R_g+r_b}(C_u+C'_M)}. \tag{1.1.10}$$

Funkcija naponskog pojačanja ovog pojačavača ima jedan pol, pa je gornja granična učestanost jednaka učestanosti tog pola. Pod uslovom $r_\pi >> R_g$, r_b, ta učestanost je:

$$f_g=\frac{1+g_m R_e}{2\pi(R_g+r_b)\left[C_\pi+C_\mu(1+g_m R_e+g_m R_p)\right]}, \tag{1.1.11}$$

a naponsko pojačanje u propusnom opsegu je:

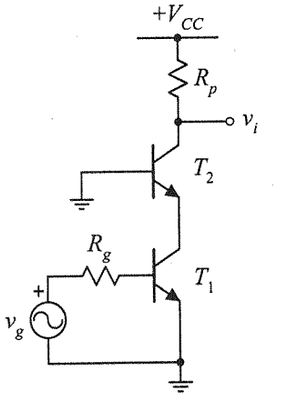
$$A(0)=\frac{-g_m}{1+g_m R_e}R_p. \tag{1.1.12}$$

Proizvod pojačanja i širine propusnog opsega ovog pojačavača je:

$$|A(0)|f_g=\frac{g_m R_p}{2\pi(R_g+r_b)\left[C_\pi+C_\mu(1+g_m R_e+g_m R_p)\right]}. \tag{1.1.13}$$

Na osnovu prethodnih izraza se može zaključiti da otpornik R_e povećava širinu propusnog opsega pojačavača sa zajedničkim emitorom približno $1+g_m R_e$ puta, a naponsko pojačanje smanjuje $1+g_m R_e$ puta. To znači da je proizvod pojačanja i širine propusnog opsega pojačavača sa zajedničkim emitorom sa i bez otpornika R_e približno jednak.

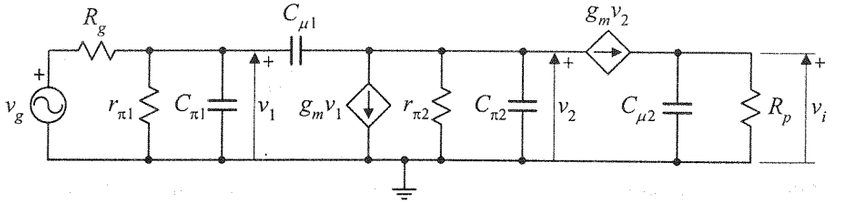
1.2. Odrediti red funkcije prenosa $H(s)=\frac{v_i}{v_g}$ pojačavača prikazanog na slici 1.2.1, kao i sve konačne nule ove funkcije. Metodom nultih vremenskih konstanti proceniti gornju graničnu učestanost ovog pojačavača ako je: $R_g=R_p=R=1\text{k}\Omega$, $r_{\pi 1}=r_{\pi 2}=r_\pi=1\text{k}\Omega$, $C_{\pi 1}=C_{\pi 2}=C_\pi=15\text{pF}$, $C_{\mu 1}=C_{\mu 2}=C_\mu=0.5\text{pF}$ i $g_m r_\pi >> 1$. Objasniti pod kojim uslovima se može primenjivati metod nultih vremenskih konstanti i da li je procenjena vrednost za gornju graničnu učestanost manja ili veća od stvarne.



Slika 1.2.1.

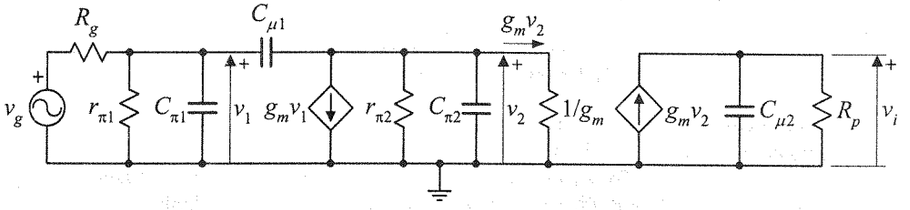
Rešenje:

Na slici 1.2.2. je prikazana ekvivalentna šema za analizu malih signala u pojačavaču sa slike 1.2.1. Polaritet napona v_2 je usklađen sa smerom zavisnog strujnog generatora $g_m v_2$ kontrolisanog tim naponom. U ovoj šemi kondenzatori $C_{\pi 1}$, $C_{\mu 1}$ i $C_{\pi 2}$ čine zatvorenu konturu i tako umanjuju za jedan red funkcije prenosa u odnosu na ukupan broj kondenzatora [3], pa je funkcija prenosa ovog kola trećeg reda.



Slika 1.2.2.

Grana sa zavisnim strujnim generatorom $g_m v_2$ se može predstaviti preko dva ista takva generatora vezana između čvora v_2 i mase, odnosno mase i izlaznog čvora. Ako je $g_m v_2$ struja elementa na kome je pad napona v_2, onda taj element predstavlja otpornik vrednosti $1/g_m$ (slika 1.2.3.). Ovakvom transformacijom je zadržana ista raspodela struja i napona u netransformisanom delu kola sa slike 1.2.2, ali će dalja analiza toka signala u novom kolu biti jednostavnija.



Slika 1.2.3.

Konačne nule funkcije prenosa su učestanosti ulaznog napona v_g ($v_g \neq 0$), na kojima dolazi do takve raspodele struja i napona u kolu koja daje izlazni napon jednak nuli. Prema slici 1.2.3, da bi izlazni napon bio jednak nuli neophodno je da struja $g_m v_2$ bude jednaka nuli, odnosno da $v_2 = 0$. Pošto je v_2 pad napona na impedansi koju čini paralelna veza tri pasivna elementa ($r_{\pi 2}$, $C_{\pi 2}$ i $1/g_m$), struja kroz tu impedansu mora biti jednaka nuli. Sa druge strane, ako je $v_g \neq 0$ i $v_2 = 0$, napon v_1 se određuje preko razdelnika impedansi i sigurno je $v_1 \neq 0$, što znači da postoji struja kroz kondenzator $C_{\mu 1}$. Jedino u slučaju da ta struja kompletno ide u granu sa zavisnim strujnim generatorom $g_m v_1$, kroz paralelnu vezu $r_{\pi 2}$, $C_{\pi 2}$ i $1/g_m$ neće biti struje, pa će polazna pretpostavka da je $v_2 = 0$ biti zadovoljena. Prema tome, postoji jedna konačna nula funkcije prenosa ovog kola čija je učestanost:

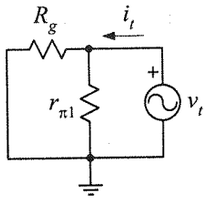
$$\left| j\omega_z C_{\mu 1} \right| v_1 = g_m v_1 \;\Rightarrow\; \omega_z = \frac{g_m}{C_{\mu 1}}. \tag{1.2.1}$$

Nulta vremenska konstanta svakog kondenzatora u kolu prikazanom na slici 1.2.3. se računa kao proizvod kapacitivnosti i dinamičke otpornosti izmedju tačaka u kojima je

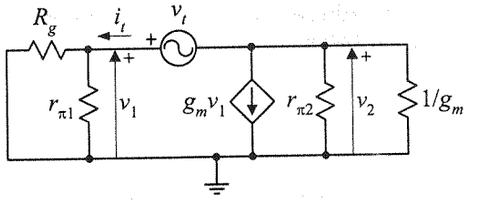
vezan kondenzator, pri čemu se svi ostali kondenzatori zamenjuju otvorenim vezama [4]. Za određivanje pomenute dinamičke otpornosti neophodno je poništiti nezavisne generatore u kolu, a na mesto kondenzatora za koji se računa nulta vremenska konstanta vezati test generator.

Primenom ovog postupka na kolo sa slike 1.2.3, dobijena je šema za određivanje nulte vremenske konstante za kondenzator $C_{\pi 1}$ prikazana na slici 1.2.4. Preostali deo kola koji se nalazi desno od test generatora nije bitan za određivanje ove vremenske konstante. Dinamička otpornost i nulta vremenska konstanta kondenzatora $C_{\pi 1}$ su:

$$R_{C_{\pi 1}} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{r_{\pi 1} R_g}{r_{\pi 1} + R_g} = 0{,}5\text{k}\Omega \;\Rightarrow\; \tau_1 = R_{C_{\pi 1}} C_{\pi 1} = 7{,}5\text{ns}. \tag{1.2.2}$$



Slika 1.2.4.



Slika 1.2.5.

Nulta vremenska konstanta za kondenzator $C_{\mu 1}$ određuje se iz kola prikazanog na slici 1.2.5. Iz jednačine:

$$v_t = \frac{r_{\pi 1} R_g}{r_{\pi 1} + R_g} i_t + \frac{r_{\pi 2} 1/g_m}{r_{\pi 2} + 1/g_m} \left(g_m \frac{r_{\pi 1} R_g}{r_{\pi 1} + R_g} i_t + i_t \right), \tag{1.2.3}$$

uz uslov $g_m r_\pi >> 1$, sledi:

$$R_{C_{\mu 1}} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{r_{\pi 1} R_g}{r_{\pi 1} + R_g} + \left(\frac{r_{\pi 1} R_g}{r_{\pi 1} + R_g} + \frac{1}{g_m} \right) \approx 2 \frac{r_{\pi 1} R_g}{r_{\pi 1} + R_g} = 1\text{k}\Omega, \tag{1.2.4}$$

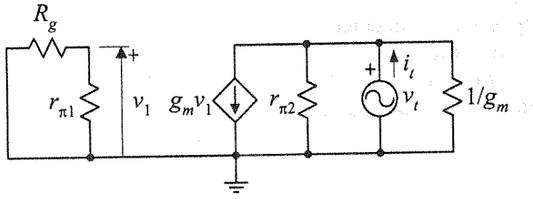
odnosno:

$$\tau_2 = R_{C_{\mu 1}} C_{\mu 1} = 0{,}5\text{ns}. \tag{1.2.5}$$

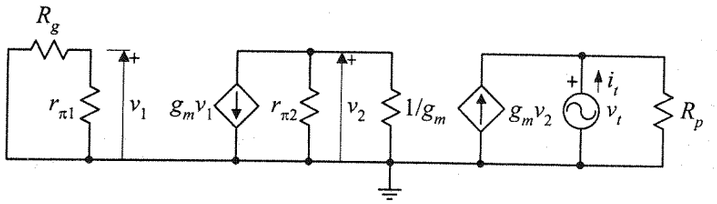
Na sličan način se određuju nulte vremenske konstante za kondenzatore $C_{\pi 2}$ i $C_{\mu 2}$ iz kola prikazanih na slikama 1.2.6. i 1.2.7, respektivno:

$$R_{C_{\pi 2}} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{r_{\pi 2} 1/g_m}{r_{\pi 2} + 1/g_m} \approx \frac{1}{g_m} \;\Rightarrow\; \tau_3 = R_{C_{\pi 2}} C_{\pi 2} = \frac{1}{g_m} C_\pi, \tag{1.2.6}$$

$$R_{C_{\mu 2}} = \frac{v_t}{i_t} = R_p \;\Rightarrow\; \tau_4 = R_{C_{\mu 2}} C_{\mu 2} = 0{,}5\text{ns}. \tag{1.2.7}$$



Slika 1.2.6.



Slika 1.2.7.

Treba primetiti da je u prethodne dve šeme $v_1 = 0$, pa zavisni strujni generator $g_m v_1$ daje struju jednaku nuli, tj. predstavlja otvorenu vezu, tako da se obe šeme mogu bitno uprostiti.

Kada su određene sve nulte vremenske konstante, gornja granična učestanost pojačavača se računa prema sledećoj formuli, [4]:

$$f_g = \frac{1}{2\pi \sum_{i=1}^{4} \tau_i}. \qquad (1.2.8)$$

Prema uslovu zadatom u tekstu zadatka $g_m r_\pi >> 1$, može se zaključiti da je $\tau_3 << \tau_1, \tau_2, \tau_4$, pa je gornja granična učestanost ovog pojačavača:

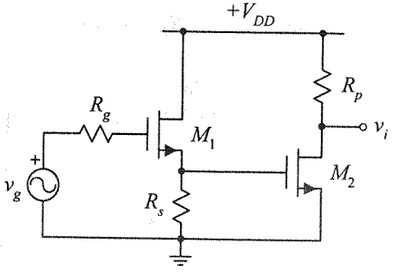
$$f_g = \frac{1}{2\pi(\tau_1 + \tau_2 + \tau_4)} = 184{,}7\text{MHz}. \qquad (1.2.9)$$

Metod nultih vremenskih konstanti daje dobru procenu granične učestanosti pod uslovom da kolo ima jednostuki dominantan pol, a svi ostali polovi i konačne nule ako ih ima, moraju biti nedominantni. Primenom ovog metoda se dobja konzervativna procena granične učestanosti pojačavača, tj. procenjena granična učestanost je manja od stvarne [4].

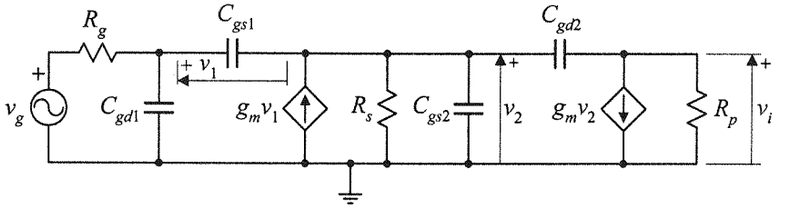
1.3. U dvostepenom pojačavaču sa kompaundovanom spregom zajednički drejn – zajednički sors izvršiti unilateralizaciju drugog stepena. Zatim proceniti širinu propusnog opsega pojačavača metodom nultih vremenskih konstanti. Na raspolaganju su MOS tranzistori sa C_{gs}=0.5pF, C_{gd}=0.1pF, C_{ds}=0, $r_{ds} \to \infty$, g_m=0.5mA/V i otpornici $R_s = R_p$=20kΩ, a unutrašnja otpornost pobudnog generatora je R_g=1kΩ. Elementi za jednosmernu polarizaciju se mogu zanemariti.

Rešenje:

a) Pojačavač sa kompaundovanom spregom zajednički drejn – zajednički sors prikazan je na slici 1.3.1, a ekvivalentna šema za analizu malih signala u tom pojačavaču prikazana je na slici 1.3.2.



Slika 1.3.1.



Slika 1.3.2.

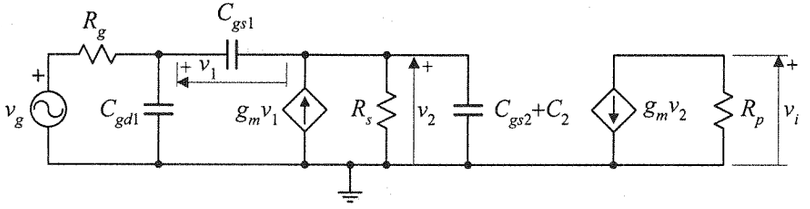
Na osnovu zadatih vrednosti za C_{gd}, g_m i R_p, može se pretpostaviti da će u propusnom opsegu pojačavača (tj. na relativno niskim učestanostima) struja kroz kondenzator C_{gd2} biti zanemariva u odnosu na ostale struje u izlaznom čvoru kola. To znači da se veza kondenzatora C_{gd2} sa izlaznim čvorom može raskinuti, pa će biti:

$$g_m v_2 + \frac{v_i}{R_p} = 0 \Rightarrow \frac{v_i}{v_2} = -g_m R_p. \qquad (1.3.1)$$

Korišćenjem ove relacije kondenzator C_{gd2} se na drugoj strani kola može preslikati u odgovarajuću kapacitivnost vezanu između čvora v_2 i mase:

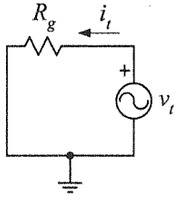
$$sC_{gd2}(v_2 - v_i) = sC_{gd2}(1 + g_m R_p)v_2 \Rightarrow C_2 = C_{gd2}(1 + g_m R_p). \qquad (1.3.2)$$

Na ovaj način je izvršena unilateralizacija stepena sa zajedničkim sorsom u pojačavaču sa kompaundovanom spregom i dobijena je ekvivalentna šema prikazana na slici 1.3.3.

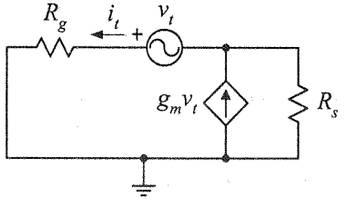


Slika 1.3.3.

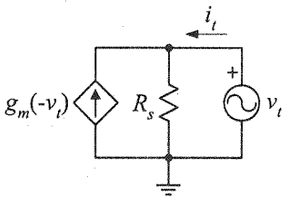
Primenom postupka opisanog u prethodnom zadatku mogu se dobiti šeme za određivanje nultih vremenskih konstanti za kondenzatore C_{gd1}, C_{gs1} i $C_{gs2}+C_2$ koje su prikazane na slikama 1.3.4, 1.3.5. i 1.3.6, respektivno.



Slika 1.3.4.



Slika 1.3.5.



Slika 1.3.6.

Nulte vremenske konstante za odgovarajuće kondenzatore su:

$$\tau_1 = R_g C_{gd1} = 100\text{ps}, \qquad (1.3.3)$$

$$\tau_2 = \frac{R_g + R_s}{1 + g_m R_s} C_{gs1} = 954\text{ps}, \qquad (1.3.4)$$

$$\tau_3 = \frac{R_s}{1 + g_m R_s}\left[C_{gs2} + C_{gd2}(1 + g_m R_p)\right] = 2{,}9\text{ns}, \qquad (1.3.5)$$

a gornja granična učestanost pojačavača je:

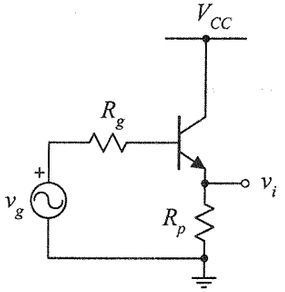
$$f_g = \frac{1}{2\pi(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} = 40{,}2\text{MHz}. \qquad (1.3.6)$$

1.4. a) Za stepen sa zajedničkim kolektorom i potrošačem R_p, koji se pobuđuje iz naponskog generatora unutrašnje otpornosti R_g ($R_g << R_p$), metodom nultih vremenskih konstanti proceniti učestanost dominantnog pola. Da li se tom metodom može proceniti granična učestanost analiziranog pojačavača i zašto? Smatrati da je u modelu tranzistora $r_e = r_c = 0$ i da je poznato ω_T.

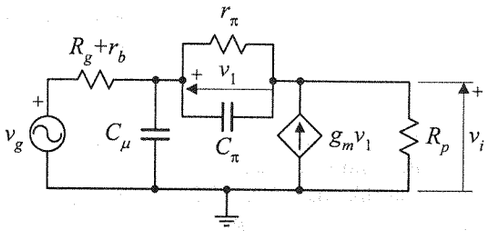
b) Ako se u kolu pojačavača iz prethodne tačke uzmu u obzir svi termički izvori šuma, izračunati spektralnu gustinu snage šuma na izlazu. Smatrati da je $C_\mu = 0$ i da je poznata funkcija prenosa $H(s) = v_i / v_g$.

Rešenje:

a) Pojačavač sa zajedničkim kolektorom i ekvivalentna šema za analizu malih signala u tom pojačavaču prikazani su na slikama 1.4.1. i 1.4.2., respektivno.



Slika 1.4.1.



Slika 1.4.2.

Nulta vremenska konstanta za kondenzator C_μ se može odrediti sa slike 1.4.3. Dinamička otpornost između tačaka u kojima je vezan taj kondenzator je:

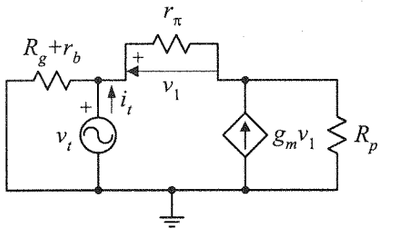
$$R_{C_\mu} = (R_g + r_b) \parallel \left[r_\pi + (1 + \beta) R_p\right] \approx R_g + r_b, \qquad (1.4.1)$$

pa je nulta vremenska konstanta za kondenzator C_μ:

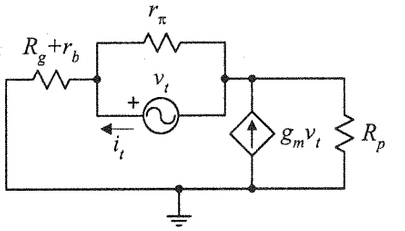
$$\tau_1 = (R_g + r_b) C_\mu. \qquad (1.4.2)$$

Nulta vremenska konstanta kondenzatora C_π se može odrediti sa slike 1.4.4. i iznosi:

$$\tau_2 = \frac{R_g + R_p}{1 + \frac{1}{r_\pi}(R_g + R_p) + g_m R_p} C_\pi \approx \frac{R_p}{1 + g_m R_p} C_\pi. \qquad (1.4.3)$$



Slika 1.4.3.



Slika 1.4.4.

Uz pretpostavku da je $g_m R_p >> 1$, dobija se $\tau_2 \approx C_\pi / g_m$. U poređenju sa vremenskom konstantom τ_1 u kojoj su i dinamička otpornost i kapacitivnost manje, može se zaključiti da će učestanost dominantnog pola ovog pojačavača odgovarati vremenskoj konstanti τ_2 ($\tau_2 >> \tau_1$), odnosno:

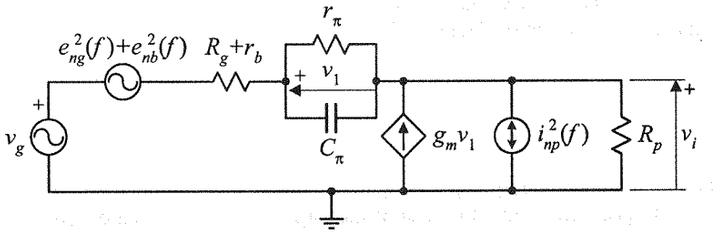
$$\omega_d \approx \frac{1}{\tau_2} = \frac{g_m}{C_\pi} \approx \omega_T. \qquad (1.4.4)$$

Granična učestanost naponskog pojačanja ovog pojačavača se ne može izračunati primenom metode nultih vremenskih konstanti, jer postoji konačna nula te funkcije u levoj poluravni u blizini dominantnog pola [4]. Konačna nula se može izračunati sa slike 1.4.2. ako se pretpostavi da će ukupna struja iz zavisnog strujnog generatora $g_m v_1$ teći kroz paralelnu vezu r_π i C_π:

$$\frac{v_1}{r_\pi} + s_z C_\pi v_1 + g_m v_1 = 0 \;\Rightarrow\; s_z = -\frac{1}{C_\pi}\left(g_m + \frac{1}{r_\pi}\right) = -\left(\omega_T + \frac{1}{r_\pi C_\pi}\right). \qquad (1.4.5)$$

Pošto je $g_m >> 1/r_\pi$, učestanost konačne nule je nešto veća od ω_T, odnosno od učestanosti dominantnog pola (jednačina (1.4.4.)).

b) Izvori termičkog šuma u kolu prikazanom na slici 1.4.2. su otpornici R_g, r_b i R_p, dok r_π ne predstavlja izvor termičkog šuma, jer je to dinamička otpornost [5]. Ekvivalentna šema za analizu šuma u ovom kolu prikazana je na slici 1.4.5. Termički šum koji unose otpornici R_g i r_b je predstavljen preko naponskih generatora šuma spektralne gustine snage $e_{ng}^2(f) = 4kTR_g$ i $e_{nb}^2(f) = 4kTr_b$, a šum otpornika R_p preko strujnog generatora spektralne



Slika 1.4.5.

gustine snage $i_{np}^2(f)=\frac{4kT}{R_p}$. Tip ovih generatora šuma je izabran prema načinu na koji ih treba povezati u dato kolo tako da račun bude jednostavniji (na primer, u izlaznom čvoru je pogodnije staviti strujni generator paralelno, nego naponski na red sa R_p). Smatrajući da su ovi izvori šuma statistički međusobno nezavisni, analiza šuma u ovom kolu se može izvršiti primenom postupka superpozicije [5].

Pošto se naponski generatori šuma $e_{ng}^2(f)+e_{nb}^2(f)$ nalaze na ulazu kola, njihov uticaj na šum na izlazu će biti:

$$v_{i1}^2(f)=|H(j\omega)|^2\cdot\left[e_{ng}^2(f)+e_{nb}^2(f)\right]. \tag{1.4.6}$$

Uticaj strujnog generatora šuma $i_{np}^2(f)$ na izlazu kola se računa iz sledeće jednačine:

$$\left|\frac{1}{R_p}+\frac{g_mZ_\pi(j\omega)+1}{R_g+r_b+Z_\pi(j\omega)}\right|^2 v_{i2}^2(f)=i_{np}^2(f), \tag{1.4.7}$$

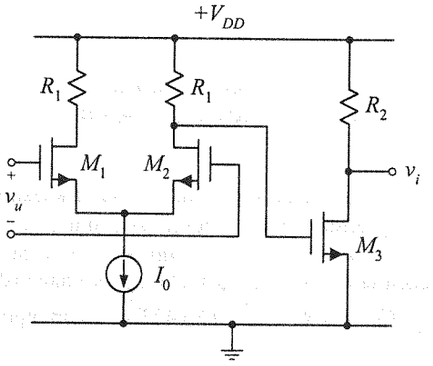
pa je spektralna gustina snage ukupnog šuma na izlazu:

$$v_i^2(f)=v_{i1}^2(f)+v_{i2}^2(f),$$

$$v_i^2(f)=|H(j\omega)|^2\left[e_{ng}^2(f)+e_{nb}^2(f)\right]+\frac{i_{np}^2(f)}{\left|\frac{1}{R_p}+\frac{g_mZ_\pi(j\omega)+1}{R_g+r_b+Z_\pi(j\omega)}\right|^2}. \tag{1.4.8}$$

1.5. a) Na slici 1.5.1. je prikazana uprošćena šema CMOS operacionog pojačavača. Metodom nultih vremenskih konstanti proceniti graničnu učestanost diferencijalnog naponskog pojačanja ako je: $R_1=R$, $R_2=100R$, pobudni naponski generator v_u je idealan, a karakteristike svih tranzistora su $C_{gs}=C_{ds}=C$, $r_{ds}\to\infty$, $g_{mb}=0$.

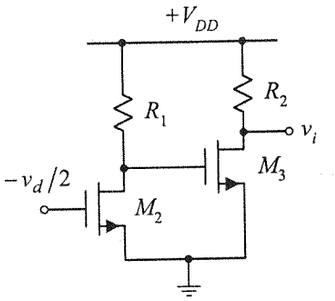
b) Napisati izraze za spektralne gustine snage šumova koji se modeliraju u drejnu MOS tranzistora. Koristeći šemu za male signale iz prethodne tačke, izračunati spektralnu gustinu snage šuma na izlazu ako se zanemare svi ostali izvori šuma kod MOSFETa.



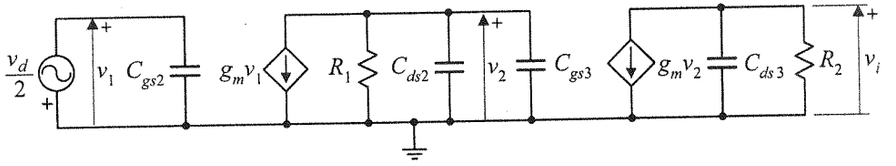
Slika 1.5.1.

Rešenje:

a) Za analizu diferencijalnog naponskog pojačanja u kolu prikazanom na slici 1.5.1. može se koristiti uprošćena šema dobijena primenom bisekcione teoreme (slika 1.5.2.) [6], i odgovarajuća ekvivalentna šema za analizu malih signala (slika 1.5.3.).



Slika 1.5.2.



Slika 1.5.3.

Nulte vremenske konstante za kondenzatore sa slike 1.5.3. su:

$$\tau_1=R_gC_{gs2}=0\cdot C_{gs2}=0, \tag{1.5.1}$$

$$\tau_2=R_1(C_{ds2}+C_{gs3})=2RC, \tag{1.5.2}$$

$$\tau_3=R_2C_{ds3}=100RC, \tag{1.5.3}$$

pa je gornja granična učestanost diferencijalog naponskog pojačanja:

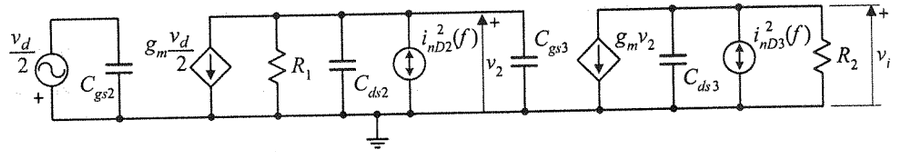
$$f_g=\frac{1}{2\pi(\tau_1+\tau_2+\tau_3)}=\frac{1}{2\pi\cdot102RC}. \tag{1.5.4}$$

b) U drejnu MOSFETa se šum modelira ekvivalentnim strujnim izvorom šuma spektralne gustine snage, [5]:

$$i_{nD}^2(f)=4kT\cdot\frac{2}{3}g_m+K\frac{I_D^a}{f}, \tag{1.5.5}$$

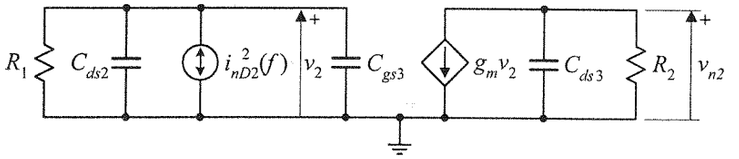
pri čemu prvi član predstavlja termički šum u kanalu tog tranzistora, a drugi član je fliker šum koji se javlja usled nesavršenosti materijala kroz koji protiče jednosmerna struja I_D.

Dodavanjem ekvivalentnih izvora šuma u drejnove tranzistora sa slike 1.5.3. dobija se kolo prikazano na slici 1.5.4.



Slika 1.5.4.

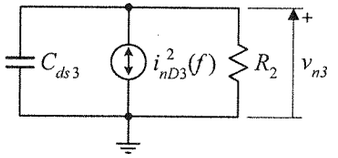
Pošto su izvori šuma u dobijenom kolu statistički nezavisni, spektralna gustina snage ukupnog šuma na izlazu računa se primenom superpozicije. Ekvivalentna šema za analizu šuma koji unosi izvor šuma i_{nD2} je prikazana na slici 1.5.5. Komponenta šuma u izlaznom naponu koja potiče od ovog generatora je:



Slika 1.5.5.

$$v_{n2}^2(f)=\left|\frac{R_2}{1+j2\pi f\cdot R_2C_{ds3}}\right|^2 g_m^2\left|\frac{R_1}{1+j2\pi f\cdot R_1(C_{ds2}+C_{gs3})}\right|^2 i_{nD2}^2(f)\,. \quad (1.5.6)$$

Uticaj generatora šuma i_{nD3} na izlazni napon se može izračunati iz kola prikazanog na slici 1.5.6:



Slika 1.5.6.

$$v_{n3}^2(f)=\left|\frac{R_2}{1+j2\pi f\cdot R_2C_{ds3}}\right|^2 i_{nD3}^2(f)\,, \quad (1.5.7)$$

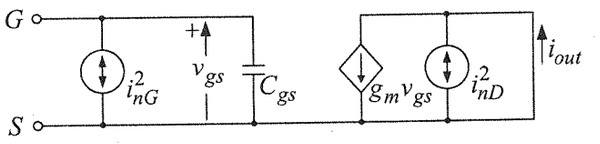
pa je ukupan šum na izlazu kola sa slike 1.5.4:

$$v_n^2(f)=v_{n2}^2(f)+v_{n3}^2(f)=$$
$$\left|\frac{R_2}{1+j2\pi f\cdot R_2C_{ds3}}\right|^2\left[\left|\frac{g_mR_1}{1+j2\pi f\cdot R_1(C_{ds2}+C_{gs3})}\right|^2 i_{nD2}^2(f)+i_{nD3}^2(f)\right] \quad (1.5.8)$$

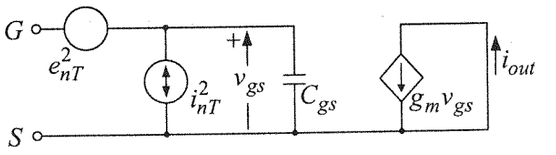
1.6. Izračunati spektralne gustine snage ekvivalentnog naponskog i strujnog izvora šuma na ulazu MOS tranzistora. Na osnovu toga izvesti zaključak pod kojim uslovima (za kakvu pobudu) se može postići mali nivo šuma u kolima sa MOS tranzistorima. Smatrati da je u ekvivalentnom modelu MOS tranzistora za male signale C_{gs}, $C_{ds}\approx 0$, $r_{ds}\to\infty$ i $g_{mb}=0$.

Rešenje:

Na slici 1.6.1. je prikazan ekvivalentan model za male signale MOS tranzistora sa izvorima šuma [5]. Strujnim izvorom spektralne gustine snage $i_{nG}^2(f)=2qI_G$ je modeliran šum sačme struje curenja gejta, a sa $i_{nD}^2(f)$ termički šum u kanalu i fliker šum (jednačina (1.5.5)). Na slici 1.6.2. je prikazan model MOSFET-a sa ekvivalentnim naponskim i strujnim izvorima šuma na ulazu tranzistora. Izlazni krajevi u obe šeme su kratko spojeni da bi se izračunala izlazna struja koja potiče od sopstvenog šuma generisanog u MOS tranzistoru.



Slika 1.6.1.



Slika 1.6.2.

Ako su ulazni krajevi kola prikazanog na slici 1.6.1. otvoreni, primenom superpozicije za statistički nezavisne izvore šuma u tom kolu dobija se izraz za spektralnu gustinu snage šuma na izlazu:

$$i_{out}^2(f)=g_m^2\frac{1}{(2\pi f\cdot C_{gs})^2}i_{nG}^2(f)+i_{nD}^2(f)\,. \quad (1.6.1)$$

Pod istim uslovima se za kolo prikazano na slici 1.6.2. dobija:

$$i_{out}^2(f)=g_m^2\frac{1}{(2\pi f\cdot C_{gs})^2}i_{nT}^2(f)\,. \quad (1.6.2)$$

Iz prethodne dve jednačine se dobija izraz za spektralnu gustinu snage ekvivalentnog strujnog izvora šuma na ulazu MOS tranzistora:

$$i_{nT}^2(f)=i_{nG}^2(f)+\frac{(2\pi f\cdot C_{gs})^2}{g_m^2}i_{nD}^2(f)\,. \quad (1.6.3)$$

Na niskim učestanostima je uticaj $i_{nD}^2(f)$ mali, a pošto je struja curenja kroz gejt mala (osim na visokim temperaturama), ukupan nivo šuma koji potiče od ekvivalentnog strujnog izvora $i_{nT}^2(f)$ će biti mali. Sa porastom učestanosti signala ovaj šum postaje sve izraženiji.

Pod pretpostavkom da su ulazni krajevi kola prikazanih na slikama 1.6.1. i 1.6.2. kratko spojeni, dobijaju se jednačine:

$$i_{out}^2(f)=i_{nD}^2(f)\,, \quad (1.6.4)$$

$$i_{out}^2(f)=g_m^2e_{nT}^2(f)\,, \quad (1.6.5)$$

odnosno, dobija se izraz za spektralnu gustinu snage ekvivalentnog naponskog izvora šuma na ulazu MOS tranzistora:

$$e_{nT}^2(f)=\frac{i_{nD}^2(f)}{g_m^2}\,. \quad (1.6.6)$$

Na osnovu izraza (1.5.5) sledi:

$$e_{nT}^2(f)=\frac{4kT\cdot\frac{2}{3}g_m}{g_m^2}+K\frac{I_D^a}{g_m^2f}\,, \quad (1.6.7)$$

pa se može zaključiti da će na niskim učestanostima zbog dominantnog fliker šuma ukupan nivo šuma biti veliki, dok se sa porastom učestanosti šum smanjuje i postaje jednak termičkom šumu u kanalu MOSFET-a.

Na osnovu prethodnih razmatranja se može zaključiti da će nivo šuma u kolu sa MOS tranzistorom biti najmanji ako je signal niske učestanosti doveden iz pobudnog generatora velike unutrašnje otpornosti, jer je u tom slučaju dominantan uticaj ekvivalentnog strujnog izvor šuma na ulazu MOS tranzistora. Ekvivalentni naponski izvor šuma je dominantan kada je unutrašnja otpornost pobudnog generatora mala, pa je u slučaju takve pobude nivo šuma manji za signale viših učestanosti.

1.7. a) Kako negativna povratna sprega utiče na amplitudsku karakteristiku naponskog pojačanja pojačavača koji je u otvorenoj sprezi imao pojačanje na niskim učestanostima A_0 i polove učestanosti ω_{p1} i ω_{p2}? Smatrati da je povratna sprega čisto otporna, $\beta \neq f(s)$.

b) Korišćenjem operacionog pojačavača kompenzovanog dominantnim polom i otporne povratne sprege napravljen je neinvertujući pojačavač sa pojačanjem 10 na niskim učestanostima. Ako je amplituda ulaznog prostoperiodičnog signala V_{u1}=50mV, odnosno V_{u2}=0,5V, odrediti maksimalnu učestanost tog signala za koju će pojačavač ispravno da radi bez izobličenja izlaznog signala. Poznate su karakteristike operacionog pojačavača f_T=2MHz, SR=1V/μs i $V_{i\,max}$=±10V.

Rešenje:

a) Ako je naponsko pojačanje pojačavača u otvorenoj sprezi:

$$A(s)=\frac{A_0}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}\right)}, \qquad (1.7.1)$$

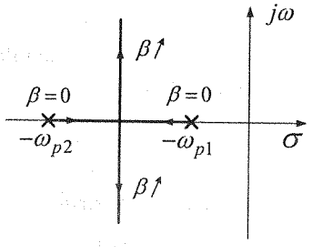
uvođenjem otporne negativne povratne sprege dobija se pojačavač sa pojačanjem:

$$A_r(s)=\frac{A(s)}{1+|\beta|A(s)}=\frac{A_0}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})+|\beta|A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}. \qquad (1.7.2)$$

Polovi pojačavača sa povratnom spregom su:

$$s_{p1,2}=-\frac{1}{2}(\omega_{p1}+\omega_{p2})\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{p1}+\omega_{p2})^2-4(1+|\beta|A_0)\omega_{p1}\omega_{p2}}\,. \qquad (1.7.3)$$

Na slici 1.7.1. je prikazano geometrijsko mesto polova pojačavača sa povratnom spregom u funkciji β. Ako je β=0, negativna povratna sprega ne postoji, pa su polovi pojačavača na negativnom delu realne ose kompleksne ravni u tačkama -ω_{p1} i -ω_{p2}. Uvođenjem otporne negativne povratne sprege i povećavanjem β polovi pojačavača sa povratnom spregom počinju da se kreću jedan prema drugom po negativnom delu realne ose. Polovi se susreću u tački -1/2(ω_{p1} + ω_{p2}) i daljim povećavanjem

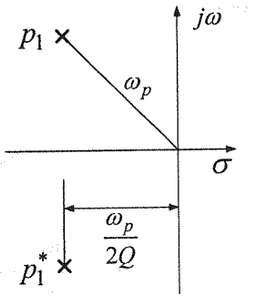


Slika 1.7.1.

β postaju konjugovano kompleksni, tj. nastavljaju kretanje po pravoj koja je paralelna $j\omega$ osi. Učestanost ω_p i Q faktor konjugovano kompleksnih polova mogu se računski odrediti iz polinoma u imeniocu funkcije $A_r(s)$:

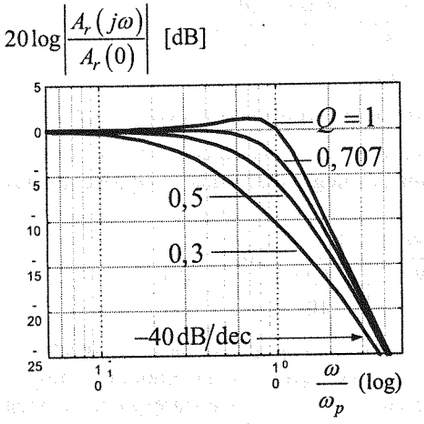
$$s^2+(\omega_{p1}+\omega_{p2})s+(1+|\beta|A_0)\omega_{p1}\omega_{p2}=s^2+\frac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2, \qquad (1.7.4)$$

izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata. Ako se posmatra položaj konjugovano kompleksnih polova u kompleksnoj ravni, učestanost polova je jednaka rastojanju od pola do koordinatnog početka (slika 1.7.2.), a rastojanje od pola do $j\omega$ ose je obrnuto proporcionalno Q faktoru. Za $Q \leq 0{,}5$ polovi su realni (prema slici 1.7.2, za Q=0,5 rastojanje od pola do $j\omega$ ose je ω_p, a toliki je i poteg pola, tj. pol je na realnoj osi). Na osnovu slike 1.7.1. se može zaključiti da se povećavanjem β povećavaju učestanost ω_p i Q faktor polova pojačavača sa povratnom spregom.



Slika 1.7.2.

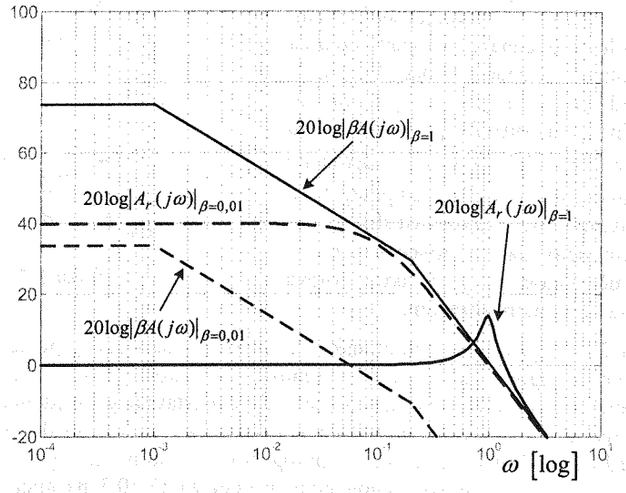
Na slici 1.7.3. su prikazane amplitudske karakteristike naponskog pojačanja pojačavača sa povratnom spregom za različite vrednosti Q faktora polova. Karakteristike su normalizovane i po amplitudi i po učestanosti radi jednostavnijeg poređenja. Ako su polovi pojačavača realni i različiti, amplitudska karakteristika će da opada prvo sa manjim nagibom (približno -20dB/dec u okolini prvog pola), a zatim sa nagibom -40dB/dec za učestanosti veće od učestanosti drugog pola (primer za Q=0,3 na slici 1.7.3.). Ako su polovi pojačavača konjugovano kompleksni, za Q=0,707 se dobija maksimalno ravna amplitudska karakteristika. Za veće vrednosti Q faktora na amplitudskoj karakteristici se javlja premašenje srazmerno Q faktoru polova i nakon toga karakteristika opada sa nagibom od približno -40dB/dec.



Slika 1.7.3.

Na slici 1.7.4. su prikazane amplitudske karakteristike naponskog pojačanja pojačavača sa povratnom spregom za β=1 (puna linija) i β=0,01 (isprekidana linija), kao i odgovarajuće karakteristike kružnog pojačanja za ova dva slučaja. Pošto je povratna sprega

otporna, polovi kružnog pojačanja su jednaki polovima pojačavača u otvorenoj sprezi ($-\omega_{p1}$ i $-\omega_{p2}$). Međutim, polovi pojačavača sa povratnom spregom se razlikuju od tih polova i njihove vrednosti su definisane izrazom (1.7.3). Naponsko pojačanje pojačavača sa povratnom spregom na niskim učestanostima je približno jednako $1/\beta$, a oblik amplitudske karakteristike zavisi od položaja polova. Za $\beta=0{,}01$ u primeru prikazanom na slici 1.7.4. polovi su realni, a za $\beta=1$ konjugovano kompleksni (javlja se premašenje na amplitudskoj karakteristici).



Slika 1.7.4.

b) Pojačanje operacionog pojačavača kompenzovanog dominantnim polom je:

$$A(s)=\frac{A_0}{1+\dfrac{s}{\omega_d}}\approx\frac{A_0\omega_d}{s}=\frac{\omega_T}{s}, \qquad (1.7.5)$$

gde je ω_T jedinična učestanost naponskog pojačanja operacionog pojačavača.

Neinvertujući pojačavač sa pojačanjem 10 na niskim učestanostima napravljen korišćenjem ovog operacionog pojačavača i otporne povratne sprege imaće funkciju prenosa:

$$A_r(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{A(s)}{1+\dfrac{A(s)}{10}}=10\cdot\frac{1}{1+\dfrac{10s}{\omega_T}}. \qquad (1.7.6)$$

Gornja granična učestanost ovog pojačavača za ulazne signale male amplitude je $f_g=f_T/10=200\text{kHz}$. Za ulazne signale velike amplitude može doći do izobličenja izlaznog signala i na nižim učestanostima od f_g zbog slurejta operacionog pojačavača [7].

Ako je ulazni signal prostoperiodičan $v_u=V_u\cdot\sin\omega t$, signal na izlazu neinvertujućeg pojačavača sa pojačanjem 10 na niskim učestanostima će biti oblika $v_i=10V_u\cdot\sin\omega t$, pod uslovom da je ispunjen uslov $10V_u\leq V_{i\max}$. I za $V_{u1}=50\text{mV}$ i za $V_{u2}=0{,}5\text{V}$ je taj uslov

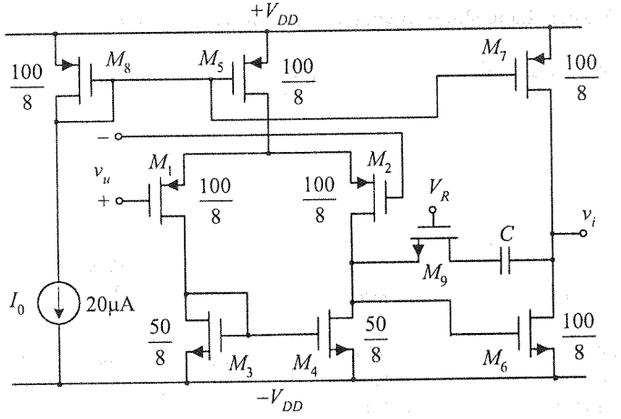
zadovoljen, ali postoji i ograničenje za učestanost ulaznog signala koje se određuje na osnovu zadatog slurejta operacionog pojačavača:

$$SR=\left|\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{\max}=\left|\frac{\partial}{\partial t}(10V_u\sin\omega t)\right|_{\max}=10V_u\omega_M \Rightarrow f_M=\frac{SR}{2\pi\cdot 10V_u}. \qquad (1.7.7)$$

Na osnovu zadatih vrednosti mogu se odrediti maksimalne učestanosti ulaznih signala $f_{M1}=318\text{kHz}$, odnosno $f_{M2}=31{,}8\text{kHz}$ za koje je slurejt operacionog pojačavača zadovoljen. Međutim, zbog ograničenja propusnog opsega pojačavača, maksimalna učestanost ulaznog signala amplitude $V_{u1}=50\text{mV}$ može da bude 200kHz, dok je maksimalna učestanost ulaznog signala amplitude $V_{u2}=0{,}5\text{V}$ ograničena slurejtom na $f_{M2}=31{,}8\text{kHz}$.

1.8. a) Objasniti ulogu tranzistora M_9 i kondenzatora C u kolu CMOS operacionog pojačavača prikazanog na slici 1.8.1. Kako treba polarisati tranzistor M_9?

b) Izračunati slurejt kola prikazanog na slici 1.8.1. ako je $C=5\text{pF}$.



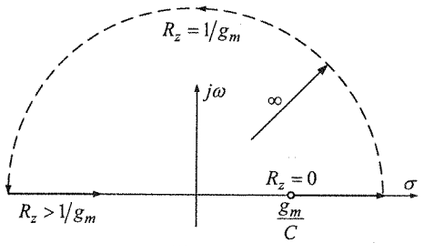
Slika 1.8.1.

Rešenje:

a) Kondenzator C služi za kompenzaciju tehnikom razdvajanja polova. Ovaj kondenzator unosi konačnu nulu u funkciju prenosa CMOS pojačavača $s_z=1/g_mC$, gde je g_m transkonduktansa pojačavačkog stepena M_6-M_7 [7]. Povećavanjem vrednosti kompenzacionog kondenzatora nula se približava koordinatnom početku, tj. postaje sve dominantnija. Pošto se ta nula nalazi u desnoj poluravni kompleksne učestanosti, ona smanjuje fazu kružnog pojačanja (ponaša se kao pol u levoj poluravni) i može da dovede do nestabilnosti pojačavača. Jedan od načina da se ova nula eliminiše je vezivanje otpornika R_z na red sa kompenzacionim kondenzatorom C, čime se dobija nova vrednost nule funkcije prenosa operacionog pojačavača [7]:

$$s_z'=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{g_m}-R_z\right)\cdot C}. \qquad (1.8.1)$$

Izborom otpornika $R_z = 1/g_m$ postiže se $s_z \to \infty$, a za $R_z > 1/g_m$ nula se iz desne poluravni pomera u levu poluravan i to tako da se njena učestanost povećava (slika 1.8.2.). U kolu prikazanom na slici 1.8.1. ulogu tog otpornika ima tranzistor M_9 što znači da ga treba polarisati da radi u triodnoj oblasti.

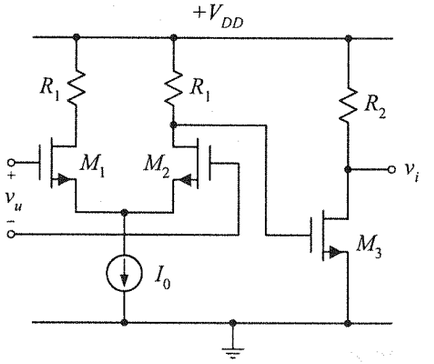


Slika 1.8.2.

b) Slurejt operacionog pojačavača prikazanog na slici 1.8.1. se računa na osnovu maksimalne struje koja može da teče kroz kompenzacioni kondenzator C. Za ulazni napon velike amplitude, u zavisnosti od polariteta tog napona, zakočiće se ili tranzistor M_1 ili tranzistor M_2, pa će maksimalna struja kroz kondenzator C biti jednaka struji tranzistora M_2 ili struji tranzistora M_1, M_3 i M_4. I u jednom i u drugom slučaju ta struja je jednaka struji I_0 kojom se preko stujnog ogledala M_8- M_5 polariše diferencijalni stepen ovog operacionog pojačavača. To znači da je slurejt operacionog pojačavača sa slike 1.8.1:

$$SR = \frac{I_0}{C} = \frac{20\mu A}{5pF} = 4 \cdot 10^6 \frac{V}{s} = 4 \frac{V}{\mu s}. \qquad (1.8.2)$$

1.9. a) U kolo pojačavača sa slike 1.9.1. potrebno je dodati kapacitivnost C_k za kompenzaciju metodom razdvajanja polova. Odrediti red funkcije diferencijalnog naponskog pojačanja kompenzovanog pojačavača, a zatim proceniti učestanosti polova i konačnih nula bez računanja te funkcije. Tranzistori M_1 i M_2 su upareni, a modeli za male signale za sve tranzistore su određeni elementima C_{gs}, C_{ds}, $r_{ds} \to \infty$ i $g_{mb} = 0$. Smatrati da je $C_k >> C_{gs}, C_{ds}$.



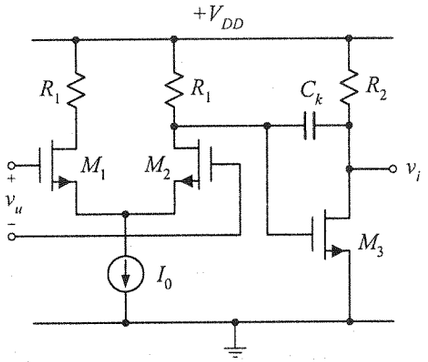
Slika 1.9.1.

b) Na primeru kola iz prethodne tačke objasniti kako se prilikom projektovanja integrisanih CMOS operacionih pojačavača može povećati stabilnost (fazna margina) i slurejt operacionog pojačavača. Smatrati da fazna margina kružnog pojačanja treba da bude veća od 45° u svim kolima sa projektovanim operacionim pojačavačem i otpornom povratnom spregom.

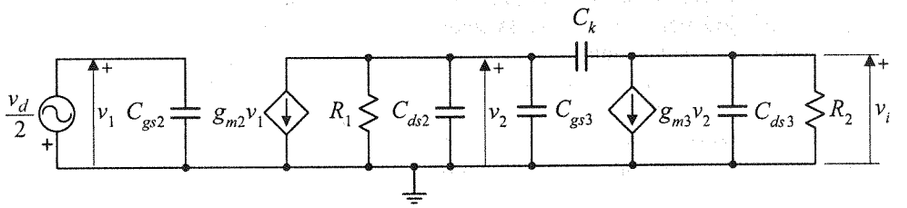
Rešenje:

a) Kapacitivnost C_k za kompenzaciju metodom razdvajanja polova treba dodati između ulaza i izlaza pojačavačkog stepena koga čini stepen sa zajedničkom sorsom sa tranzistorom M_3 (slika 1.9.2.). Ekvivalentna šema za analizu malih signala iz koje se može izračunati diferencijalno naponsko pojačanje u ovom kolu, dobijena primenom bisekcione

teoreme prikazana je na slici 1.9.3. U toj šemi ima pet kondenzatora, ali su dva vezana paralelno (C_{ds2} i C_{gs3}), dakle mogu se zameniti kondenzatorom kapacitivnosti $C_{ds2} + C_{gs3}$. Kondenzatori $C_{ds2} + C_{gs3}$, C_k i C_{ds3} čine jednu zatvorenu konturu, a kondenzator C_{gs2} i nezavisni naponski generator $v_d/2$ drugu zatvorenu konturu. Pošto je red funkcije prenosa određen brojem kondenzatora u kolu umanjenim za broj zatvorenih kontura koje čine kondenzatori i nezavisni naponski generatori (ako u kolu nema induktivnosti, kao što je ovde slučaj) [3], ovo kolo će imati funkciju prenosa drugog reda (4-2).



Slika 1.9.2.



Slika 1.9.3.

Funkcija prenosa kola prikazanog na slici 1.9.3. imaće jednu konačnu nulu koja potiče od kondenzatora C_k, jer se jedino taj kondenzator nalazi u rednoj grani u odnosu na tok signala u ovom kolu. Vrednost nule se određuje se na isti način kao u zadatku 1.2. i iznosi:

$$z = \frac{g_{m3}}{C_k}, \qquad (1.9.1)$$

što znači da je to nula u desnoj poluravni kompleksne učestanosti.

U zadatku 1.5. su metodom nultih vremenskih konstanti izračunate vremenske konstante za sve kondenzatore osim za C_k:

$$\tau_1 = R_g C_{gs2} = 0 \cdot C_{gs2} = 0, \qquad (1.9.2)$$

$$\tau_2 = R_1 (C_{ds2} + C_{gs3}) = 2RC, \qquad (1.9.3)$$

$$\tau_3 = R_2 C_{ds3} = 100RC. \qquad (1.9.4)$$

Vremenska konstanta kondenzatora C_k se može odrediti sa slike 1.9.3:

$$\tau_4 = [R_1 + (1 + g_{m3}R_1)R_2] \cdot C_k \approx g_{m3}R_1R_2C_k. \qquad (1.9.5)$$

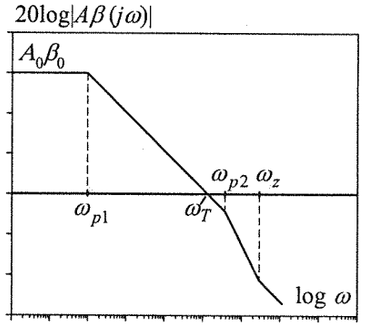
Prema uslovu zadatka je $C_k >> C_{gs}, C_{ds}$, pa je ova vremenska konstanta dominantna u odnosu na ostale, odnosno dominantan pol funkcije prenosa ovog kola je:

$$p_1 \approx -\frac{1}{g_{m3}R_1R_2C_k}. \qquad (1.9.6)$$

Smatrajući da je učestanost drugog pola funkcije prenosa dovoljno velika da se kondenzator C_k može zameniti kratkom vezom u kolu prikazanom na slici 1.9.3, dobija se procena za drugi pol:

$$p_2 \approx -\frac{[g_{m3}(R_1\|R_2)+1]}{(R_1\|R_2)(C_{ds2}+C_{gs3}+C_{ds3})} \approx -\frac{g_{m3}}{C_{ds2}+C_{gs3}+C_{ds3}}. \qquad (1.9.7)$$

b) Ako se napravi pojačavač sa otpornom povratnom spregom i operacionim pojačavačem iz prethodne tačke, funkcija kružnog pojačanja će imati iste polove i nulu kao operacioni pojačavač. Zbog spuštanja amplitudske karakteristike za $20\log|\beta|$ u odnosu na amplitudsku karakteristiku operacionog pojačavača, jedinična učestanost kružnog pojačanja će biti manja. Prema tome, najveću jediničnu učestanost kružnog pojačanja će imati jednični neivertujući pojačavač, jer se poklapaju amplitudske karakteristike operacionog pojačavača i kružnog pojačanja tog pojačavača. Da bi fazna margina bila veća od 45°, jedinična učestanost kružnog pojačanja mora da bude manja od učestanosti nedominantnog pola i nule (slika 1.9.4.). Ako je ovaj uslov ispunjen za jedinični neivertujući pojačavač, biće ispunjen i za bilo koji drugi pojačavač sa otpornom povratnom spregom.



Slika 1.9.4.

Koristeći oznake sa slika 1.9.3. i 1.9.4. i jednačinu (1.9.6) može se odrediti jedinična učestanost operacionog pojačavača:

$$\omega_T = A_0\omega_{p1} = g_{m2}g_{m3}R_1R_2\frac{1}{g_{m3}R_1R_2C_k} = \frac{g_{m2}}{C_k}. \qquad (1.9.8)$$

Na osnovu jednačine (1.9.7) i prethodnog razmatranja može se postaviti uslov:

$$\frac{\omega_{p2}}{\omega_T} = \frac{\dfrac{g_{m3}}{C_{ds2}+C_{gs3}+C_{ds3}}}{\dfrac{g_{m2}}{C_k}} = \frac{g_{m3}}{g_{m2}}\frac{C_k}{C_{ds2}+C_{gs3}+C_{ds3}} > 1. \qquad (1.9.9)$$

Povećavanje kompenzacionog kondenzatora C_k izazvalo bi pomeranje nule funkcije prenosa operacionog pojačavača ka koordinatnom početku (jednačina (1.9.1)). Pošto se nula nalazi u desnoj poluravni kompleksne učestanosti, njen uticaj na faznu karakteristiku kružnog pojačanja je isti kao uticaj pola u levoj poluravni, pa se ne sme dozvoliti da učestanost nule bude manja od ω_T. Sa druge strane, povećavanje kompenzacionog kondenzatora utiče na smanjivanje slurejta operacionog pojačavača:

$$SR = \frac{I_0}{C_k} = \frac{I_0}{g_{m2}}\omega_T. \qquad (1.9.10)$$

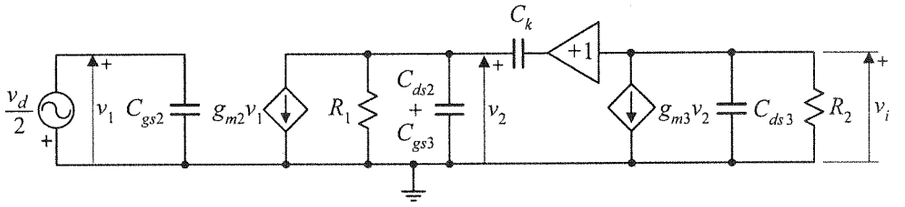
Prema jednačini (1.9.9) ostaje druga mogućnost da se postigne fazna margina veća od 45°, a to je povećavanje odnosa g_{m3}/g_{m2}. Dakle, ako se tranzistori u drugom (pojačavačkom) stepenu CMOS operacionog pojačavača projektuju tako da imaju veći odnos širine i dužine kanala nego tranzistori u prvom (diferencijalnom) stepenu, mogu se koristiti kompenzacioni kondenzatori manjih vrednosti, pa se pored odgovarajuće fazne margine može postići i relativno veliki slurejt operacionog pojačavača.

1.10. a) U kolu CMOS operacionog pojačavača prikazanog na slici 1.9.1. predviđeno je da se korišćenjem kompenzacionog kondenzatora C_k izvrši kompenzacija metodom razdvajanja polova. Pokazati kako se dodavanjem naponskog bafera može eliminisati konačna nula funkcije diferencijalnog naponskog pojačanja koju unosi taj kondenzator.

b) Ako je slurejt operacionog pojačavača 5V/μs i maksimalna promena izlaznog signala ±10V, izračunati širinu propusnog opsega za velike signale f_M. Ako se na ulaz jediničnog neinvertujućeg pojačavača sa ovim operacionim pojačavačem dovede sinusoidalan signal učestanosti $10f_M$, odrediti maksimalnu amplitudu ulaznog signala pri kojoj izlazni signal neće biti izobličen.

Rešenje:

a) U zadatku 1.9. je pokazano kako treba vezati kondenzator za kompenzaciju metodom razdvajanja polova i izračunata je konačna nula funkcije diferencijalnog naponskog pojačanja za ovaj pojačavač. Jedinični naponski bafer kojim se može izvršiti eliminacija te nule dodaje se u kolo pojačavača kao što je prikazano na slici 1.10.1. [7]. Najjednostavniju realizaciju takvog bafera predstavlja stepen sa zajedničkim drejnom.



Slika 1.10.1.

Uz pretpostavku da je u kolo ubačen idealan jedinični naponski bafer ($R_u \to \infty$, $R_i = 0$), jednačine za deo kola koji se nalazi levo od bafera će biti iste kao pre, jer je napon na izlazu bafera, tj. napon na drugom kraju kompenzacionog kondenzatora v_i. Međutim, zbir struja u izlaznom čvoru kola će se promeniti, jer zbog beskonačne ulazne otpornosti naponskog bafera više ne postoji struja koja je iz izlaznog čvora tekla kroz granu sa kompenzacionim kondenzatorom C_k. Pošto se nula funkcije prenosa javljala kada je ta struja bila jednaka struji zavisnog strujnog generatora $g_{m3}v_2$, ubacivanjem naponskog bafera je eliminisana konačna nula funkcije prenosa. Položaj nedominantnog pola funkcije prenosa će se malo promeniti, dok će dominantan pol imati istu vrednost kao i pre [7].

b) U zadatku 1.7. je pokazano da se propusni opseg za signale velike amplitude računa na sledeći način:

$$SR = \left|\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{\max} = \left|\frac{\partial}{\partial t}(V_{iM}\sin\omega t)\right|_{\max} = V_{iM}\omega_M \Rightarrow f_M = \frac{SR}{2\pi\cdot V_{iM}}, \qquad (1.10.1)$$

pa se za zadate vrednosti $SR = 5\text{V}/\mu\text{s}$ i $V_{iM} = 10\text{V}$ dobija $f_M = 79.62\text{kHz}$.

Ako se na ulaz jediničnog neinvertujućeg pojačavača sa ovim operacionim pojačavačem dovede sinusoidalan signal amplitude V_{uM} i učestanosti $10f_M$, neizobličen izlazni signal će

imati istu amplitudu i učestanost kao ulazni signal. Do izobličenja izlaznog signala velike amplitude neće doći sve dok je zadovoljen slurejt operacionog pojačavača:

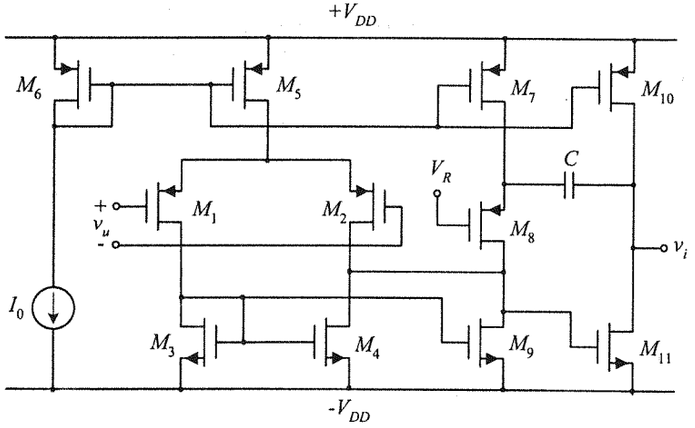
$$SR = \left|\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{\max} \geq \left|\frac{\partial}{\partial t}(V_{uM}\sin 10\omega_M t)\right| = V_{uM}10\omega_M , \qquad (1.10.2)$$

odnosno:

$$V_{iM}2\pi f_M \geq V_{uM}2\pi\cdot 10 f_M \Rightarrow V_{uM} \leq \frac{V_{iM}}{10} = 1\text{V} . \qquad (1.10.3)$$

1.11. a) Odrediti funkciju svih elemenata u kolu integrisanog CMOS operacionog pojačavača prikazanog na slici 1.11.1. Detaljno objasniti ulogu i način rada tranzistora M_8.

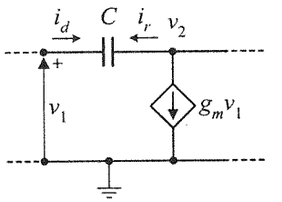
b) Da li sve tranzistore u kolu prikazanom na slici 1.11.1. treba projektovati tako da imaju isti odnos W/L ili ne? Odgovor obrazložiti.



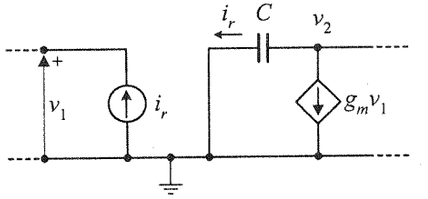
Slika 1.11.1.

Rešenje:

a) Tranzistori M_1 i M_2 predstavljaju diferencijalni par, koji zajedno sa aktivnim opterećenjem M_3 i M_4 čine ulazni diferencijalni stepen operacionog pojačavača. Ovaj stepen je polarisan strujom I_0 preko prostog strujnog ogledala M_6 - M_5. Tranzistori M_{10} i M_{11} predstavljaju pojačavački stepen operacionog pojačavača, pri čemu je M_{10} deo strujnog ogledala M_6 - M_{10} preko koga se vrši polarizacija tranzistora M_{11}. Kondenzator C je kompenzacioni kondenzator kojim se postiže razdvajanje polova ovog dvostepenog CMOS operacionog pojačavača. Tranzistori M_7, M_8 i M_9 predstavljaju elemente jediničnog strujnog bafera koji služi za eliminaciju konačne nule funkcije prenosa nastale ubacivanjem kondenzatora C [7]. Tranzistori M_7 i M_9 pripadaju odgovarajućim strujnim ogledalima preko kojih se tranzistor M_8 polariše tako da radi u zasićenju, odnosno dobija se stepen sa zajedničkim gejtom koji se ponaša približno kao jedinični strujni bafer.



Slika 1.11.2.



Slika 1.11.3.

Kao što je pomenuto, uloga jediničnog strujnog bafera je da eliminiše konačnu nulu funkcije prenosa operacionog pojačavača koja potiče od kompenzacionog kondenzatora C. Ako su v_1 i v_2 ulazni i izlazni napon pojačavačkog stepena, odnosno naponi na krajevima kompenzacionog kondenzatora, deo ekvivalentne šeme za male signale operacionog pojačavača bez strujnog bafera može se prikazati kao na slici 1.11.2. Struja kroz granu sa kompenzacionim kondenzatorom je:

$$i_d - i_r = sCv_1 - sCv_2 , \qquad (1.11.1)$$

gde je $i_d = sCv_1$ komponenta struje koja teče u direktnom smeru prenosa signala (od ulaza ka izlazu), a $i_r = sCv_2$ komponenta struje koja teče u suprotnom smeru (od izlaza ka ulazu). Konačna nula funkcije prenosa se javlja kada ukupna struja iz grane sa kompenzacionim kondenzatorom postane jednaka struji zavisnog strujnog generatora $g_m v_1$ (slika 1.11.2). U tom slučaju ne postoji struja koja će dalje da teče ka izlazu kola, pa je $v_2 = 0$ i $i_r = sCv_2 = 0$, odnosno postoji samo komponenta i_d struje kroz kompenzacioni kondenzator. Ako se u kolo operacionog pojačavača doda jedinični strujni bafer kao što je prikazano na slici 1.11.3, struja i_d će biti eliminisana iz izlaznog dela kola, pa će na taj način biti eliminisana i konačna nula funkcije prenosa. Ubacivanjem jediničnog strujnog bafera će se promeniti zbir struja i čvoru v_1 i u čvoru v_2, što će izazvati povećanje učestanosti nedominantnog pola, ali će učestanost dominantnog pola ostati ista [7]. U kolu prikazanom na slici 1.11.1. ulogu ovakvog strujnog bafera treba da obavljaju tranzistori M_7, M_8 i M_9.

b) Tranzistore u kolu prikazanom na slici 1.11.1. treba projektovati tako da imaju različit odnos širine i dužine kanala iz nekoliko razloga:

1. tranzistori u pojačavačkom stepenu se projektuju da budu većih dimenzija od tranzistora u ulaznom diferencijalnom stepenu čime se postiže veći slurejt operacionog pojačavača i veća fazna margina, o čemu je bilo reči u zadatku 1.9;

2. tranzistor M_8 može da bude manjih dimenzija od ostalih tranzistora, jer za razliku od diferencijalnog i pojačavačkog stepena u kojima treba ostvariti određeno naponsko pojačanje, jedinični strujni bafer može da se realizuje i sa tranzistorom koji ima mali odnos W/L;

3. zbog manje pokretljivosti šupljina u odnosu na elektrone, p-kanalni MOS tranzistori se obično projektuju sa dva do tri puta većim odnosom W/L od n-kanalnih tranzistora sa ciljem da se dobiju simetrični izlazni signali;

4. da bi se ostvarila jednakost ili odgovarajući odnos struja tranzistora u strujnim ogledalima, potrebno je precizno podesiti širine kanala tih tranzistora, tj. upariti njihove karakteristike [8].

Literatura 1

[1] B. Raković, *Elektronika – linearna integrisana kola*, poglavlje 1, Građevinska knjiga, Beograd 1983.

[2] S. Tešić, D. Vasiljević, *Osnovi elektronike*, poglavlje 10, Građevinska knjiga, Beograd 2000.

[3] R. Ziemer, W. Tranter, D. Fannin, *Signals and Systems - continuous and discrete*, poglavlje 5, Macmillan Publ. Co., New York, 1983.

[4] P. Gray, P. Hurst, S. Lewis, R. Meyer, *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, poglavlje 7, John Wiley&Sons, Fourth edition, 2001.

[5] S. Tešić, D. Vasiljević, *Osnovi elektronike*, poglavlje 15, Građevinska knjiga, Beograd 2000.

[6] P. Gray, P. Hurst, S. Lewis, R. Meyer, *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, poglavlje 3, John Wiley&Sons, Fourth edition, 2001.

[7] P. Gray, P. Hurst, S. Lewis, R. Meyer, *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, poglavlje 9, John Wiley&Sons, Fourth edition, 2001.

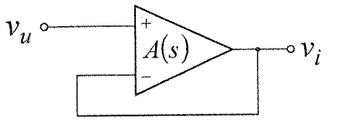
[8] J. Rabaey, A. Chandrakasan, B. Nikolić, *Digital Integrated Circuits, a Design Perspective*, second edition, Prentice Hall, 2003.

II

Stabilnost i kompenzacija pojačavača

СУНЕТФ

2.1. U kolu na slici 2.1.1 izvor napona v_u je idealan, a operacioni pojačavač ima jako veliku ulaznu otpornost i prenosnu funkciju (pojačanje u otvorenoj petlji):



Slika 2.1.1.

$$A(s)=\frac{K(s+5)}{(s+1)(s+3)(s^2+4s+5)},\ K>0.$$

Metodom geometrijskog mesta korenova odrediti kako se menja položaj polova prenosne funkcije pojačavača sa slike 2.1.1, u funkciji pojačanja operacionog pojačavača, K. Objasniti kako se sa crteža geometrijskog mesta korenova može proceniti stabilnost sistema i korišćenjem Rut-Hurvicovog kriterijuma odrediti vrednost pojačanja K za koju je sistem na granici stabilnosti.

Napomena: Tačke u kojima se grane geometrijskog mesta korenova odvajaju od realne ose ne treba precizno računati, već samo napisati jednačinu iz koje se mogu izračunati i proceniti njihov položaj.

Rešenje:

Pošto je faktor povratne sprege jednak 1, kružno pojačanje je jednako $A\beta(s)=-A(s)$, dakle ima $m=4$ pola i jednu konačnu nulu ($n=1$).

Grane geometrijskog mesta korenova polaze iz polova kružnog pojačanja [1], [2]: $p_1=-1,\ p_2=-3,\ p_{3,4}=-2\pm j1$.

Jedna grana završava u konačnoj nuli kružnog pojačanja: $z_1=-5$, a tri u nulama u beskonačnosti. Asimptote grana koje završavaju u beskonačnosti zaklapaju sa realnom osom uglove:

$$\phi_k=\frac{(2k+1)\cdot 180^\circ}{(m-n)};\ k=0,\ 1,\ 2. \qquad (2.1.1)$$

odnosno 60°, 180° i 300°.

Presek asimptota sa realnom osom je u:

$$\sigma_a=\frac{\left(\sum p_i-\sum z_i\right)}{m-n}=\frac{-3}{3}=-1. \qquad (2.1.2)$$

Geometrijskom mestu pripadaju delovi realne ose levo od neparnog broja singulariteta kružnog pojačanja: $(-\infty\div -5)$ i $(-3\div -1)$.

Uglovi pod kojima grane napuštaju konjugovano-kompleksne polove kružnog pojačanja su:

$$\beta_3=\sphericalangle(p_3-z_1)-\sphericalangle(p_3-p_1)-\sphericalangle(p_3-p_2)-\sphericalangle(p_3-p_4)+180^\circ, \qquad (2.1.3)$$

tj.:

$$\beta_3=\text{arctg}\frac{1}{-2-(-5)}-\text{arctg}\frac{1}{-2-(-1)}-\text{arctg}\frac{1}{-2-(-3)}-\text{arctg}\frac{1}{-2-(-2)}+180^\circ; \qquad (2.1.4)$$

$$\beta_3 = -71{,}565^\circ \tag{2.1.5}$$

i:

$$\beta_4 = -\beta_3 . \tag{2.1.6}$$

U tačkama odvajanja σ_o grana od realne ose je $1 + A(s)\big|_{s=\sigma_o} = 0$ i $\left.\frac{d[A(s)]}{ds}\right|_{s=\sigma_o} = 0$, na osnovu čega se dobija jednačina:

$$\sum_i \frac{1}{(\sigma_o - p_i)} - \sum_j \frac{1}{(\sigma_o - z_j)} = 0 . \tag{2.1.7}$$

Uvrštavanjem brojnih vrednosti za polove i nule i rešavanjem jednačine može da se dobije za $K = 0{,}3761$ tačka odvajanja $\sigma_{o1} = -2{,}455$ i za $K = 255$ tačka odvajanja (pristizanja) $\sigma_{o2} = -5{,}99$ (videti sliku 2.1.2).

Sistem je bezuslovno stabilan ako se delovi grana geometrijskog mesta koji odgovaraju vrednostima konstante K od 0 do neke zadate vrednosti nalaze u levoj poluravni kompleksne učestanosti.

Za dati sistem karakteristični polinom je:

$$Q(s) = (s+1)(s+3)(s^2+4s+5) + K(s+5) \tag{2.1.8}$$

tj.:

$$Q(s) = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + (32+K)s + 15 + 5K . \tag{2.1.9}$$

Rut-Hurvicova tabela [1], [3] za ovaj polinom je:

s^4	1	24	$15+5K$
s^3	8	$32+K$	0
s^2	$20-K/8$	$15+5K$	0
s^1	$32+K-\frac{64\cdot(15+5K)}{160-K}$	0	0
s^0	$15+5K$	0	0

Da bi sistem bio stabilan, svi koeficijenti prve kolone tabele treba da budu istog znaka [1]. Za $K > 0$, uslovi da koeficijenti prve kolone ne menjaju znak su:

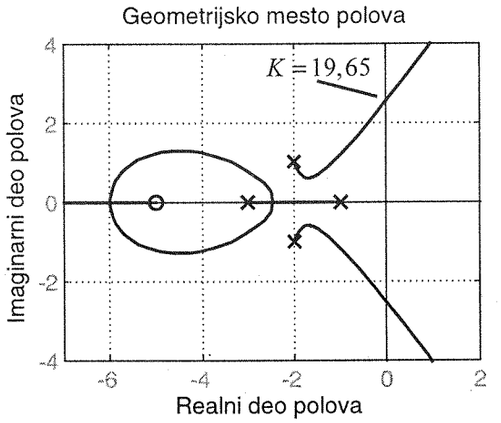
$$20 - K/8 > 0 , \tag{2.1.10}$$

što se svodi na $K < 160$, i:

$$32 + K - \frac{64\cdot(15+5K)}{160-K} > 0 , \tag{2.1.11}$$

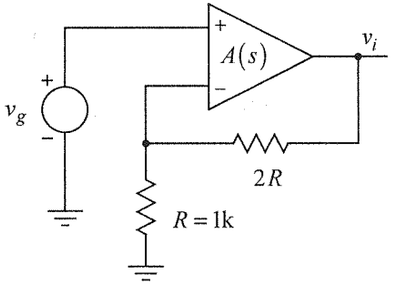
odakle se dobija $K < 19{,}65$. Prema tome, sistem je na granici stabilnosti za $K = 19{,}65$.

Izgled geometrijskog mesta polova je prikazan na slici 2.1.2.

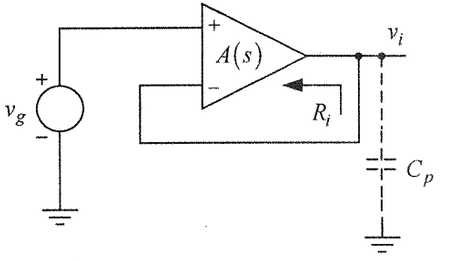


Slika 2.1.2.

2.2. Operacioni pojačavač kompenzovan dominantnim polom ima funkciju prenosa sa dva pola od kojih je jedan na vrlo niskim učestanostima. Koristeći ovaj operacioni pojačavač, formirani su pojačavači prikazani na slikama 2.2.1a i 2.2.1b. Poznato je da kolo na slici 2.2.1a ima propusni opseg $f_g = 1\text{MHz}$ i maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku naponskog pojačanja $A_r(s) = V_i(s)/V_g(s)$, a za operacioni pojačavač je pojačanje za $\omega \to 0$ jednako $A_0 >> 1$.



Slika 2.2.1a.



Slika 2.2.1b.

a) Izračunati učestanost nedominantnog pola i proizvod pojačanja A_0 operacionog pojačavača i njegovog dominantnog pola ω_{p1}.

b) Ako je izlazna otpornost operacionog pojačavača $R_i = 100\Omega$, odrediti vrednost kapacitivnog opterećenja C_p jediničnog pojačavača sa slike 2.2.1b, pri kome pojačavač postaje nestabilan. Koristiti Rut-Hurvicov kriterijum.

Rešenje:

a) Za vrednosti kompleksne promenljive $|s| \gg \omega_{p1}$ pojačanje operacionog pojačavača je:

$$A(s) = \frac{A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})} = \frac{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})} \cong \frac{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}{s(s+\omega_{p2})}. \quad (2.2.1)$$

Pojačavač sa slike 2.2.1a ima faktor povratne sprege $\beta = R/(R+2R) = 1/3$. Polovi prenosne funkcije $A_r(s)$ ovog pojačavača sa povratnom spregom dobijaju se izjednačavanjem funkcije povratne sprege sa nulom:

$$1 - A\beta = 1 + A(s)\beta \cong 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}{s(s+\omega_{p2})} = 0, \quad (2.2.2)$$

tj.:

$$s^2 + \omega_{p2}s + (1/3)A_0\omega_{p1}\omega_{p2} = 0. \quad (2.2.3)$$

Pošto je karakteristika ovog pojačavača maksimalno ravna, njegov propusni opseg je jednak potegu polova (videti rešenje zadatka 3.1 ili literaturu [4], [5]), tj. kvadratnom korenu iz slobodnog člana polinoma u jednačini (2.2.3):

$$2\pi f_g = 2\pi \cdot 1\text{MHz} = \sqrt{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}/3}. \quad (2.2.4)$$

Q-faktor maksimalno ravne amplitudske karakteristike za funkciju drugog reda jednak je $1/\sqrt{2}$:

$$\sqrt{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}/3}\,/\,\omega_{p2} = 1/\sqrt{2}. \quad (2.2.5)$$

Rešavanjem (2.2.4) i (2.2.5) izračunava se:

$$\omega_{p2} = 2\pi\sqrt{2}\ \text{Mrad/s} \ \text{ i } \ A_0\omega_{p1} = 1{,}5\omega_{p2} = 3\pi\sqrt{2}\ \text{Mrad/s}. \quad (2.2.6)$$

b)

$$R_i = 100\Omega,\ \beta(s) = \frac{\frac{1}{C_p s}}{\frac{1}{C_p s} + R_i} = \frac{1}{1+R_i C_p s} \quad (2.2.7)$$

Uvrštavanjem ovog izraza za faktor povratne sprege u funkciju povratne sprege dobija se:

$$1 - A\beta \cong 1 + \frac{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}{s(s+\omega_{p2})(1+R_i C_p s)} = 0, \quad (2.2.8)$$

pa je karakteristična jednačina sistema:

$$R_i C_p s^3 + (1 + R_i C_p \omega_{p2})s^2 + \omega_{p2}s + A_0\omega_{p1}\omega_{p2} = 0. \quad (2.2.9)$$

Za ovu karakterističnu jednačinu Rut-Hurvicova tabela je

s^3	$R_i C_p$	$\omega_{p2}\ [= 2\pi\sqrt{2}\ \text{Mrad/s}]$
s^2	$1 + R_i C_p \omega_{p2}$	$A_0\omega_{p1}\omega_{p2}\ [= 1{,}5\omega_{p2}^2]$
s^1	$\dfrac{\omega_{p2}(1+R_i C_p\omega_{p2}) - A_0\omega_{p1}\omega_{p2}R_i C_p}{1+R_i C_p\omega_{p2}}$	0
s^0	$A_0\omega_{p1}\omega_{p2}$	0

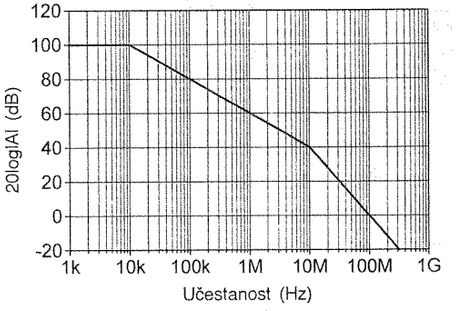
Granica stabilnosti je određena uslovom:

$$\omega_{p2}\cdot(1 + R_i C_p \omega_{p2}) - A_0\omega_{p1}\omega_{p2}R_i C_p = 0, \quad (2.2.10)$$

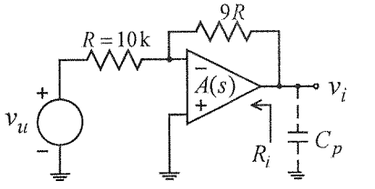
odakle se dobija:

$$C_p = \frac{1}{(A_0\omega_{p1} - \omega_{p2})\cdot R_i} = \frac{1}{0{,}5\omega_{p2}R_i} = \frac{1}{(\pi\sqrt{2}\,\text{Mrad/s})\cdot 100\Omega} = \frac{1\mu\text{F}}{100\pi\sqrt{2}} = 2{,}25\text{nF}. \quad (2.2.11)$$

2.3. a) Na slici 2.3.1a data je amplitudska karakteristika operacionog pojačavača upotrebljenog u kolu na slici 2.3.1b. Primenom integralne kompenzacije potrebno je povećati faznu marginu pojačavača prikazanog na slici 2.3.1b. Smatrajući da je ulazna otpornost operacionog pojačavača beskonačna, odrediti elemente integralnog kompenzatora tako da fazna margina kompenzovanog pojačavača bude $\pi/3$.



Slika 2.3.1a.



Slika 2.3.1b.

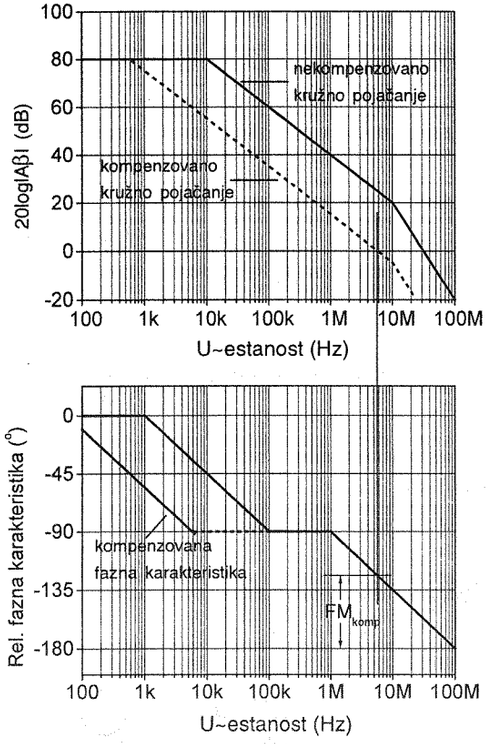
b) Na izlaz nekompenzovanog pojačavača prikazanog na slici 2.3.1b vezano je kapacitivno opterećenje C_p. Ako se uzme u obzir i izlazna otpornost operacionog pojačavača $R_i = 100\Omega$, primenom Rut-Hurvicovog kriterijuma odrediti maksimalnu vrednost kapacitivnosti kondenzatora C_p za koju je pojačavač stabilan.

Rešenje:

a) U kolu na slici 2.3.1b faktor povratne sprege je jednak $\beta = 0{,}1$, pa je kružno pojačanje jednako $-0{,}1A(s)$, tj. pre kompenzacije operacionog pojačavača je:

$$\beta A(s) = \frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})}, \qquad (2.3.1)$$

gde je $A_0 = 10^5$, $\omega_{p1} = 20\cdot\pi$ krad/s, $\omega_{p2} = 20\cdot\pi$ Mrad/s. Frekventne karakteristike nekompenzovanog kružnog pojačanja prikazane su na slici 2.3.2 punom linijom.



Slika 2.3.2.

Integralnom kompenzacijom u prenosnu funkciju kružnog pojačanja se unose pol (ω_{pk}) i nula (ω_{zk}). Pri tome je $\omega_{pk} < \omega_{zk}$, pa se u amplitudsku karakteristiku kružnog

pojačanja unosi slabljenje na višim učestanostima, koje je za $\omega > \omega_{zk}$ približno jednako ω_{zk}/ω_{pk}, što se može videti sa slike 2.3.2. Unošenjem slabljenja smanjuje se i jedinična učestanost kompenzovanog kružnog pojačanja ω_{ck} [6], [7]. Ukoliko je $\omega_{zk} \ll \omega_{ck}$, fazna karakteristika kompenzovanog kružnog pojačanja na ω_{ck} je približno ista kao pre kompenzacije. Pošto je učestanost ω_{ck} smanjena u odnosu na vrednost pre kompenzacije ω_c, fazna karakteristika kružnog pojačanja je $\arg[A\beta_k(j\omega_{ck})] > \arg[A\beta(j\omega_c)]$, pa je fazna margina kompenzacijom povećana. Integralna kompenzacija [6], [7] se realizuje priključivanjem redne veza kondenzatora i otpornika između invertujućeg ulaza operacionog pojačavača i mase (neinvertujućeg ulaza), kao što je prikazano na slici 2.3.3. Kompenzovano kružno pojačanje je:

$$\beta A(s) = \frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})} \cdot \frac{\frac{1}{C_k s} + R_k}{\frac{1}{C_k s} + R_k + \frac{9R\cdot R}{9R+R}}, \qquad (2.3.2)$$

odnosno:

$$\beta A(s) = \frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})} \cdot \frac{1+R_kC_ks}{1+R_kC_ks(1+0{,}9R/R_k)}. \qquad (2.3.3)$$

Da se kompenzacijom ne bi povećao red funkcije, može se jedan od polova pojačavača poništiti nulom kompenzatora [6], [7]. Da bi bio zadovoljen uslov $\omega_{zk} \ll \omega_{ck}$, nulom treba poništiti niži pol pojačavača:

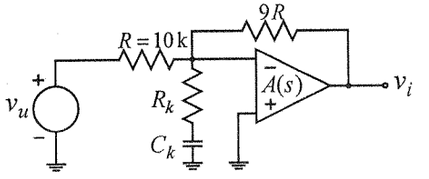
$$\omega_{zk} = \frac{1}{R_kC_k} = \omega_{p1} = 2\pi\cdot 10\,\text{kHz} = 62830\,\text{rad/s}. \qquad (2.3.4)$$

Polovi kružnog pojačanja su u tom slučaju $\omega_{p2} = 2\pi\cdot 10\,\text{MHz}$ i pol kompenzatora:

$$\omega_{pk} = \frac{1}{R_kC_k(1+0{,}9R/R_k)}. \qquad (2.3.5)$$

Odnos nule i pola kompenzatora je jednak $1+0{,}9R/R_k$.

Dakle, zbog $\omega_{pk} < \omega_{zk} = \omega_{p1}$ je $\omega_{pk} \ll \omega_{p2}$. Pošto je moduo kružnog pojačanja na niskim učestanostima jednak $|A\beta_k(0)| = |A\beta(0)| = 10^4$, jedinična učestanost kružnog pojačanja je mnogo veća od učestanosti pola ω_{pk}, pa je $\text{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_{pk}} = 90°$. Da bi fazna margina [6], [7] bila $\pi/3$, potrebno je da komponenta fazne karakteristike koja potiče od pola ω_{p2} bude jednaka $-\pi/6$, tj. $\text{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_{p2}} = 30°$, dakle $\omega_c = \frac{\omega_{p2}}{\sqrt{3}}$.



Slika 2.3.3.

Pošto je $\omega_c < \omega_{p2}$, sledi da je:

$$20\log A_0 = 80\text{dB} = -20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{pk}}{\omega_c} = -20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{pk}}{\omega_{p2}/\sqrt{3}}, \tag{2.3.6}$$

odnosno:

$$\omega_{pk} = \frac{\omega_{p2}/\sqrt{3}}{10000} = \frac{2\pi f_{p2}}{17300} = 3631\,\text{rad/s}. \tag{2.3.7}$$

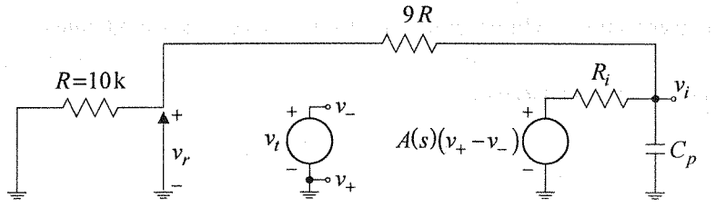
Sada se može izračunati:

$$R_k = \frac{0{,}9R}{\omega_{zk}/\omega_{pk} - 1} = 552\Omega \tag{2.3.8}$$

i:

$$C_k = \frac{1}{R_k\omega_{zk}} = \frac{1}{552\Omega\cdot 62830\,\text{rad/s}} = 28{,}82\text{nF}. \tag{2.3.9}$$

b)



Slika 2.3.4.

Na osnovu ekvivalentne šeme za određivanje kružnog pojačanja, prikazane na slici 2.3.4, sledi:

$$\beta A(s) = \frac{V_r(s)}{V_t(s)} = \frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})}\cdot\frac{\dfrac{10R/(C_p s)}{10R+1/(C_p s)}}{R_i + \dfrac{10R/(C_p s)}{10R+1/(C_p s)}}, \tag{2.3.10}$$

tj.:

$$\beta A(s) = \frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})}\cdot\frac{1}{1+R_i/(10R)+R_iC_p s}. \tag{2.3.11}$$

Za date vrednosti je $R_i/(10R) = 0{,}001 \ll 1$, pa je:

$$\beta A(s) \cong \frac{-0{,}1A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(1+R_iC_p s)}. \tag{2.3.12}$$

Izjednačavanjem funkcije povratne sprege sa nulom dobija se karakteristična jednačina:

$$\begin{aligned} &R_iC_p s^3 + \left[1+R_iC_p(\omega_{p1}+\omega_{p2})\right]s^2 \\ &+(\omega_{p1}+\omega_{p2}+\omega_{p1}\omega_{p2}R_iC_p)s + (1+0{,}1A_0)\omega_{p1}\omega_{p2} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Za karakterističnu jednačinu datu izrazom (2.3.13) može da se formira Rut-Hurvicova tabela:

s^3	R_iC_p	$\omega_{p1}+\omega_{p2}+\omega_{p1}\omega_{p2}R_iC_p$
s^2	$1+R_iC_p(\omega_{p1}+\omega_{p2})$	$(1+0{,}1A_0)\omega_{p1}\omega_{p2}$
s^1	$(\omega_{p1}+\omega_{p2}+\omega_{p1}\omega_{p2}R_iC_p) - \dfrac{(1+0{,}1A_0)\omega_{p1}\omega_{p2}R_iC_p}{\left[1+R_iC_p(\omega_{p1}+\omega_{p2})\right]}$	0
s^0	$(1+0{,}1A_0)\omega_{p1}\omega_{p2}$	0

Pojačavač je stabilan ako je:

$$(\omega_{p1}+\omega_{p2}+\omega_{p1}\omega_{p2}R_iC_p) - \frac{(1+0{,}1A_0)\omega_{p1}\omega_{p2}R_iC_p}{\left[1+R_iC_p(\omega_{p1}+\omega_{p2})\right]} > 0. \tag{2.3.14}$$

Uzimajući $\omega_{p1} \ll \omega_{p2} = 1000\omega_{p1}$ i $1 \ll 0{,}1A_0 = 10^4$ gornji uslov je aproksimativno predstavljen kvadratnom nejednačinom:

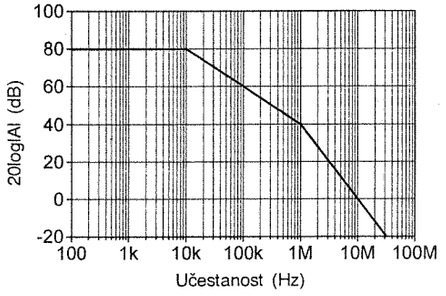
$$(\omega_{p1}R_iC_p)^2 - 9(\omega_{p1}R_iC_p) + 0{,}001 > 0. \tag{2.3.15}$$

Imajući u vidu vrednosti koeficijenata kvadratne nejednačine (2.3.15), lako se uočava da ona ima dve pozitivne granične vrednosti za $(\omega_{p1}R_iC_p)$ koje se veoma razlikuju. Sem toga, pošto je vodeći koeficijent pozitivan, nejednačina nije zadovoljena između graničnih vrednosti. Prema tome, manja granična vrednost za $(\omega_{p1}R_iC_p)$ daje gornju granicu opsega (0, $C_{p\max}$), tj. maksimalnu vrednost kapacitivnosti kondenzatora C_p za koju je pojačavač stabilan. Drugo rešenje nejednačine koje ima veliku vrednost odgovara velikoj vrednosti C_p koja predstavlja donju granicu opsega vrednosti C_p za koje je pol $1/(R_iC_p)$ dominantan. Obzirom da se u zadatku traži $C_{p\max}$, potrebno je odrediti manju graničnu vrednost za $(\omega_{p1}R_iC_p)$. Pošto se granične vrednosti veoma razlikuju, manja je približno određena količnikom njihovog proizvoda i zbira, tj. $(\omega_{p1}R_iC_{p\max}) \cong 0{,}001/9$. Odavde se izračunava:

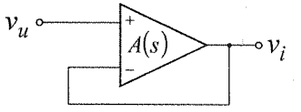
$$C_{p\max} \cong 0{,}001/\left(9\omega_{p1}R_i\right)=17{,}68\text{pF}. \qquad (2.3.16)$$

2.4. a) Korišćenjem operacionog pojačavača čija je amplitudska karakteristika naponskog pojačanja prikazana na slici 2.4.1 i dva otpornika, treba napraviti neinvertujući pojačavač sa pojačanjem 10 na niskim učestanostima. Ulazna otpornost operacionog pojačavača je beskonačna, a otpornik vezan od invertujućeg ulaza operacionog pojačavača do mase je vrednosti $R_1 = 1\text{k}\Omega$. Odrediti faznu marginu i jediničnu učestanost nekompenzovanog pojačavača. Zatim odrediti elemente serijskog integralnog kompenzatora tako da fazna margina kompenzovanog pojačavača bude $45°$.

b) U kolu na slici 2.4.2 operacioni pojačavač ima jako veliku ulaznu otpornost i prenosnu funkciju $A(s)$. Korišćenjem Rut-Hurvicovog kriterijuma odrediti vrednost pojačanja K za koju je sistem na granici stabilnosti.



Slika 2.4.1.



$$A(s)=\frac{K(s+3)}{(s+1)(s+5)(s^2+4s+5)};\quad K>0.$$

Slika 2.4.2.

Rešenje:

a) Pošto je pojačanje neinvertujućeg pojačavača napravljenog od operacionog pojačavača za jedan veće od odnosa otpornika u kolu povratne sprege, odnos otpornika treba da bude jednak 9, odnosno otpornik između izlaza i invertujućeg ulaza treba da bude jednak $R_2 = 9\,\text{k}\Omega$. Izgled napravljenog pojačavača je prikazan na slici 2.4.3 punom linijom.

Faktor povratne sprege je jednak $|\beta| = R_1/(R_1+R_2)=0{,}1$, pa je kružno pojačanje na niskim učestanostima $|A\beta(0)| = 10^4 \cdot 0{,}1 = 10^3$. Sa slike 2.4.1 rastojanje između učestanosti polova kružnog pojačanja (to su polovi operacionog pojačavača f_{p1} i f_{p2}) je dve dekade. Sa Bodeove aproksimativne karakteristike sledi vrednost kružnog pojačanja na učestanosti f_{p1}:

$$20\log A_0\beta = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{p2}}{f_{p1}}+40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\log\frac{f_{c0,1}}{f_{p2}}, \qquad (2.4.1)$$

tj.:

$$60\,\text{dB}=20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log 100+40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{c0,1}}{f_{p2}}, \qquad (2.4.2)$$

odakle se dobija:

$$f_{c0,1}=\sqrt{10}f_{p2}=\sqrt{10}\ \text{MHz}. \qquad (2.4.3)$$

Jedinična učestanost kružnog pojačanja može preciznije da se odredi rešavanjem jednačine $|A\beta(jf_{c0,1})|=1$, tj.:

$$\left|\frac{-0{,}1A_0}{(1+jf_{c0,1}/f_{p1})(1+jf_{c0,1}/f_{p2})}\right|=1. \qquad (2.4.4)$$

Sa slike 2.4.1 se vidi da je $f_{p1} \ll f_{c0,1}$, pa se gornja jednačina svodi na:

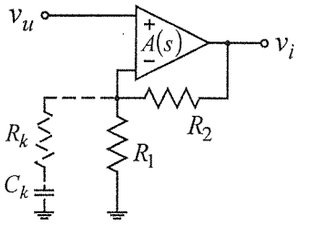
$$\frac{0{,}1A_0\cdot f_{p1}}{f_{c0,1}\left|(1+jf_{c0,1}/f_{p2})\right|}=1. \qquad (2.4.5)$$

Rešavanjem (2.4.5) dobija se $f_{c0,1}\cong f_{p2}\cdot\sqrt{9{,}5}=3{,}08f_{p2}$. Obzirom da pola dekade odgovara odnosu jednakom 3,16, vidi se da prvi (kraći) način daje 2,6 % veći rezultat, što je prihvatljiva greška u proračunu.

Fazna margina je:

$$\text{FM}=180°-\text{arctg}\left(\frac{f_{c0,1}}{f_{p1}}\right)-\text{arctg}\left(\frac{f_{c0,1}}{f_{p2}}\right)\cong 180°-90°-72°=18°. \qquad (2.4.6)$$

Integralnom kompenzacijom neće biti promenjena vrednost kružnog pojačanja na niskim učestanostima, tj. $|A\beta_k(0)|=|A\beta(0)|=10^3$. Ukoliko se želi da karakteristika kompenzovanog kružnog pojačanja ostane dvopolna, kompenzaciona nula treba da se poklapa sa jednim od polova operacionog pojačavača. Da bi se u cilju povećanja fazne margine zadovoljio uslov $\omega_{-k} \ll \omega_{ck}$ (videti rešenje zadatka 2.3.), kompenzaciona nula treba da se poklapa sa nižim polom pojačavača. Stoga će kompenzacioni pol biti dominantan ($\omega_{pk} < \omega_{-k} = \omega_{p1}$), a njegova učestanost je tada mnogo manja od jedinične učestanosti kompenzovanog kružnog pojačanja $f_{ck0,1}$. Zbog toga je njegov doprinos ukupnoj faznoj karakteristici na $f_{ck0,1}$ približno jednak $\pi/2$. Prema tome, fazna margina biće jednaka $\pi/4$ ako je doprinos drugog pola kružnog pojačanja ukupnoj faznoj karakteristici na $f_{ck0,1}$ jednak $\pi/4$, što je zadovoljeno ako je učestanost drugog pola jednaka $f_{ck0,1}$. Jedinična učestanost biće jednaka učestanosti drugog pola ako je odnos učestanosti polova kompenzovanog kružnog pojačanja jednak $f_{p2}/f_{pk}=|A\beta_k(0)|=10^3$. Pošto



Slika 2.4.3.

je $f_{p2}/f_{p1}=f_{p2}/f_{zk}=100$, potrebno je podesiti učestanosti kompenzacionog pola f_{pk} na vrednost jednaku $f_{p1}/10$. Kompenzaciono kolo prikazano je na slici 2.4.3 isprekidanom linijom.

Pošto je kružno pojačanje isto kao u zadatku 2.3. (sem što je otpornik R sada označen kao R_1), na osnovu tog rešenja biće:

$$\beta A(s)=\frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})}\cdot\frac{1+R_kC_ks}{1+R_kC_ks(1+0{,}9R_1/R_k)}. \qquad (2.4.7)$$

Učestanost kompenzacione nule je:

$$f_{zk}=\frac{1}{2\pi R_kC_k}=f_{p1}=10\text{kHz}. \qquad (2.4.8)$$

Pol kompenzatora je:

$$f_{pk}=\frac{1}{2\pi R_kC_k(1+0{,}9R_1/R_k)}=\frac{f_{zk}}{(1+0{,}9R_1/R_k)}=\frac{f_{p1}}{(1+0{,}9R_1/R_k)}. \qquad (2.4.9)$$

Da bi kompenzacioni pol bio jednak $f_{p1}/10$ uslov je:

$$1+0{,}9R_1/R_k=10, \qquad (2.4.10)$$

odakle se dobija $R_k=0{,}1R_1=100\Omega$. Iz uslova za učestanost kompenzacione nule se dobija $C_k=159{,}1$ nF.

b) Za kolo na slici 2.4.2 je faktor povratne sprege $\beta=1$. Polovi prenosne funkcije $A_r(s)$ pojačavača sa povratnom spregom dobijaju se izjednačavanjem funkcije povratne sprege sa nulom:

$$1-A\beta(s)=1+\frac{K(s+3)}{(s+1)(s+5)(s^2+4s+5)}=0, \qquad (2.4.11)$$

Nule karakterističnog polinoma su određene izrazom:

$$s^4+10s^3+34s^2+(50+K)s+(25+3K)=0 \qquad (2.4.12)$$

na osnovu kojeg može da se formira Rut-Hurvicova tabela:

s^4	1	34	$25+3K$
s^3	10	$50+K$	0
s^2	$29-K/10$	$25+3K$	0
s^1	$50+K-\frac{100(25+3K)}{290-K}$	0	0
s^0	$25+3K$	0	0

Pojačavač je stabilan ako je:

$$29-K/10>0 \qquad (2.4.13)$$

i:

$$50+K-\frac{100(25+3K)}{290-K}>0 \qquad (2.4.14)$$

Prvi uslov svodi se na $K<290$, a drugi, za pozitivne vrednosti K, na $K<83{,}58$. Prema tome, sistem je na granici stabilnosti za $K=83{,}58$.

2.5. Operacioni pojačavač ima amplitudsku karakteristiku sa dva pola od kojih je učestanost jednog (ω_{p1}) veoma niska, tj. $\omega_{p1}<<\omega_{p2}$. Operacioni pojačavač nema priključke za kompenzaciju. Njegova ulazna otpornost je beskonačna, a pojačanje na niskim učestanostima je $A_0=10^5$.

Ako se formira jedinični neinvertujući pojačavač, kratkospajanjem invertujućeg ulaza sa izlazom, u odzivu na pobudni signal oblika jedinične funkcije javlja se veliko premašenje uz oscilacije učestanosti 1MHz koje se veoma sporo smiruju.

Ako se primenom dva otpornika od operacionog pojačavača napravi invertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim -199, amplitudska karakteristika napravljenog pojačavača je maksimalno ravna.

a) Izračunati učestanosti polova operacionog pojačavača.

b) Primenom ovog operacionog pojačavača napravljen je invertujući pojačavač sa naponskim pojačanjem na niskim učestanostima jednakim -9. U kolu ovog invertujućeg pojačavača treba izvršiti integralnu kompenzaciju (poništavajući jedan pol operacionog pojačavača kompenzacionom nulom). Nacrtati kompenzovani pojačavač i izvesti izraz za $A_{vr}(s)=\frac{V_i(s)}{V_u(s)}$.

c) Ako je otpornost ulaznog otpornika u tački b) jednaka 10kΩ, izračunati kompenzacione elemente tako da amplitudska karakteristika napravljenog kompenzovanog invertujućeg pojačavača bude maksimalno ravna.

d) Izračunati graničnu učestanost napravljenog kompenzovanog pojačavača ako su vrednosti elemenata kao u tački c).

Rešenje:

a) Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je jednako $A_0=10^5$, što odgovara zadatom nivou od 100dB. Za jedinični pojačavač je $\beta=1$, pa je $A_0\beta=A\beta(0)=10^5$.

Karakteristična jednačina dvopolnog pojačavača sa otpornom povratnom spregom je:

$$s^2+(\omega_{p1}+\omega_{p2})s+(1+A_0\beta)\omega_{p1}\omega_{p2}=0\,. \qquad (2.5.1)$$

Učestanost prigušenih oscilacija koje se javljaju na izlazu u odzivu na pobudni signal oblika jedinične funkcije, jednaka je imaginarnom delu polova:

$$\omega_{osc}=\sqrt{(1+A_0\beta)\omega_{p1}\omega_{p2}-0{,}25(\omega_{p1}+\omega_{p2})^2}\,. \qquad (2.5.2)$$

Za veliki Q-faktor [6], [7] , [8] (oscilacije se veoma sporo smiruju) polovi su bliski imaginarnoj osi, poteg polova je mnogo veći od apsolutne vrednosti realnog dela, pa je stoga i $(1+A_0\beta)\omega_{p1}\omega_{p2}\gg 0{,}25(\omega_{p1}+\omega_{p2})^2$. Pošto je $A_0\beta=10^5\gg 1$, sledi:

$$\omega_{osc}\cong\sqrt{A_0\beta\omega_{p1}\omega_{p2}}\ \text{tj.}\ f_{osc}\cong\sqrt{A_0\beta f_{p1}f_{p2}}\,. \qquad (2.5.3)$$

Sa druge strane, kada se oscilacije veoma sporo smiruju tj. prigušenje sopstvenog odziva je malo, mala je i fazna margina kružnog pojačanja, pa je jedinična učestanost kružnog pojačanja svakako veća od učestanosti f_{p2}. U tom slučaju sa Bodeove aproksimativne amplitudske karakteristike je vrednost kružnog pojačanja na učestanosti f_{p1}:

$$20\log A_0\beta=20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{p2}}{f_{p1}}+40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\log\frac{f_{c\beta}}{f_{p2}}, \qquad (2.5.4)$$

gde je $f_{c\beta}$ učestanost jediničnog kružnog pojačanja za odgovarajuću vrednost faktora povratne sprege β. Iz (2.5.4) sledi:

$$f_{c\beta}=\sqrt{A_0\beta f_{p1}f_{p2}}\,. \qquad (2.5.5)$$

Poređenjem (2.5.3) i (2.5.5) dobija se $f_{c1}\cong f_{osc}=1\text{MHz}\,(\beta=1)$.

Dvopolna amplitudska karakteristika koja zadovoljava uslove maksimalnog zaravnjenja u koordinatnom početku ima Q-faktor polova jednak $1/\sqrt{2}$ (videti rešenje zadatka 3.1). Pošto su polovi u slučaju dvopolnog pojačavača sa otpornom povratnom spregom dati rešenjima jednačine (2.5.1), za $\omega_{p1}\ll\omega_{p2}$ i $1\ll A_0\beta$ uslov za Q-faktor se svodi na:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=Q\cong\frac{\sqrt{A_0\beta\omega_{p1}\omega_{p2}}}{\omega_{p2}}, \qquad (2.5.6)$$

tj.:

$$2A_0\beta\omega_{p1}\cong\omega_{p2}, \qquad (2.5.7)$$

što znači da je učestanost višeg pola ω_{p2} dvostruko veća od jedinične učestanosti kružnog pojačanja.

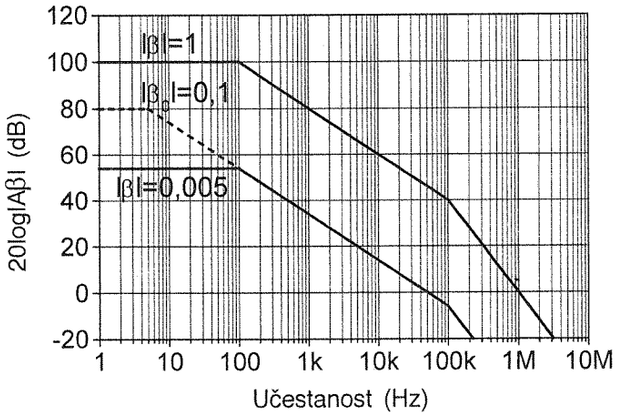
Apsolutna vrednost pojačanja invertujućeg pojačavača na niskim učestanostima približno je jednaka odnosu otpornosti otpornika u kolu povratne sprege. Za vrednost zadatu u trećem pasusu zadatka, odnos otpornosti otpornika treba da bude jednak 199, što daje vrednost faktora povratne sprege $\beta=1/200=0{,}005$. U ovom slučaju je kružno

pojačanje na niskim učestanostima jednako $A_0\beta=A\beta(0)=10^5/200=500$, pa se iz uslova za Q-faktor dobija $\omega_{p2}=2\omega_{c0,005}\cong 2A_0\beta\omega_{p1}=1000\omega_{p1}$. Ako se ovaj odnos učestanosti polova nekompenzovanog operacionog pojačavača uvrsti u (2.5.4), za jedinični neinvertujući pojačavač tj. $\beta=1$ se dobija:

$$100=60+40\,\text{dB/dec}\cdot\log(f_{c1}/f_{p2}), \qquad (2.5.8)$$

odakle sledi $f_{p2}=0{,}1f_{c1}=100\,\text{kHz}$, a zatim i $f_{p1}=0{,}001f_{p2}=100\,\text{Hz}$.

Bodeove aproksimativne amplitudske karakteristike kružnog pojačanja za $\beta=1$ i $\beta=0{,}005$ prikazane su na slici 2.5.1.



Slika 2.5.1.

b) Integralno kompenzovani invertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim –9 prikazan je na slici 2.5.2.

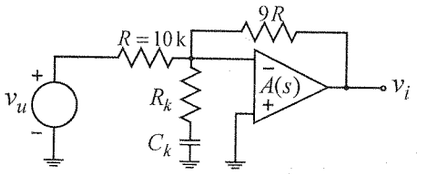
Ulazni razdelnik i generator V_u mogu da se predstave ekvivalentnim Tevenenovim generatorom:

$$V_T(s)=\frac{R_k+\dfrac{1}{sC_k}}{R+R_k+\dfrac{1}{sC_k}}V_u(s)\,;\quad Z_T(s)=\frac{R\cdot\left(R_k+\dfrac{1}{sC_k}\right)}{R+R_k+\dfrac{1}{sC_k}}. \qquad (2.5.9)$$

Kružno pojačanje je:

$$\beta A(s)=\frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})}\cdot\frac{\dfrac{1}{C_k s}+R_k}{\dfrac{1}{C_k s}+R_k+\dfrac{9R\cdot R}{9R+R}}. \qquad (2.5.10)$$

Pošto je kod integralne kompenzacije učestanost kompenzacionog pola manja od učestanosti nule, obično se projektuje da ove učestanosti budu znatno manje od učestanosti jediničnog kružnog pojačanja (videti rešenje zadatka 2.3.). Stoga kompenzaciona nula treba da se poklapa sa dominantnim polom operacionog pojačavača, ukoliko se želi da karakteristika kompenzovanog kružnog pojačanja ostane dvopolna. Uslov za poništavanje nule i dominantnog pola je $\omega_{zk}=1/(R_kC_k)=\omega_{p1}$, pa je u tom slučaju kružno pojačanje:



Slika 2.5.2.

$$\beta A(s)=\frac{-0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p2})\cdot\left[1+\left(R_k+\frac{9R\cdot R}{9R+R}\right)\cdot C_k s\right]}. \qquad (2.5.11)$$

Pojačanje pojačavača sa slike je:

$$A_{vr}(s)=\frac{V_T(s)}{V_u(s)}\cdot\frac{V_i(s)}{V_T(s)}=\frac{R_k+\frac{1}{sC_k}}{R+R_k+\frac{1}{sC_k}}\cdot\left(-\frac{9R}{R_T}\right)\cdot\frac{-\beta A(s)}{1-\beta A(s)}; \qquad (2.5.12)$$

$$A_{vr}(s)=-\frac{R_k+\frac{1}{sC_k}}{R+R_k+\frac{1}{sC_k}}\cdot\frac{9R\cdot\left(R+R_k+\frac{1}{sC_k}\right)}{R\cdot\left(R_k+\frac{1}{sC_k}\right)}\cdot\frac{-\beta A(s)}{1-\beta A(s)}; \qquad (2.5.13)$$

$$A_{vr}(s)=-9\frac{-\beta A(s)}{1-\beta A(s)}=-9\frac{0{,}1A_0}{(1+s/\omega_{p2})\cdot\left[1+\left(R_k+\frac{9R\cdot R}{9R+R}\right)\cdot C_k s\right]+0{,}1A_0}. \qquad (2.5.14)$$

c) Pošto je primenjena integralna kompenzacija i dominantni pol pojačavača je poništen kompenzacionom nulom, učestanost kompenzacionog pola je manja od ω_{p1}, pa je i mnogo manja od ω_{p2} $(\omega_{pk}\ll\omega_{p2})$. Stoga se uslov da amplitudska karakteristika $A_{vr}(s)$ bude maksimalno ravna svodi na uslov (videti tačku a) ovog rešenja) $2A_0\beta_0=\omega_{p2}/\omega_{pk}$. Dakle:

$$f_{pk}=\frac{f_{p2}}{2A_0\beta_0}=\frac{100\text{kHz}}{2\cdot10^5\cdot0{,}1}=5\text{Hz}. \qquad (2.5.15)$$

Stoga je:

$$\left(R_k+\frac{9R\cdot R}{9R+R}\right)\cdot C_k=(R_k+9\text{k}\Omega)\cdot C_k=\frac{0{,}2}{2\pi}\text{s}. \qquad (2.5.16)$$

Pošto je $R_kC_k=\frac{1}{\omega_{p1}}=\frac{10}{2\pi}$ms, sledi da je:

$$C_k=\frac{0{,}2\text{s}-10\text{ms}}{2\pi\cdot9\text{k}\Omega}=3{,}36\mu\text{F}, \qquad (2.5.17)$$

$$R_k=\frac{10\text{ms}}{2\pi\cdot C_k}=0{,}474\text{k}\Omega. \qquad (2.5.18)$$

Amplitudska karakteristika ovako kompenzovanog kružnog pojačanja je prikazana isprekidanom linijom na slici 2.5.1.

d) Pošto je amplitudska karakteristika pojačavača maksimalno ravna i drugog reda, propusni opseg je jednak potegu polova a on je $\sqrt{2}$ puta manji od zbira polova (videti rešenje zadatka 3.1.). Zbir učestanosti polova je $\omega_{pk}+\omega_{p2}\cong\omega_{p2}$, pa je granična učestanost propusnog opsega:

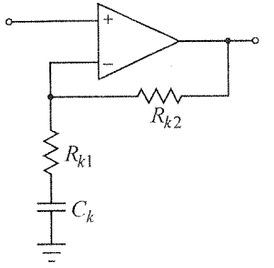
$$f_g=f_{p2}/\sqrt{2}=70{,}7\text{kHz}. \qquad (2.5.19)$$

2.6. Funkcija prenosa operacionog pojačavača bez priključaka za kompenzaciju ima dva pola, a ulazna otpornost mu je beskonačna.

Kada se primenom dva otpornika od ovog operacionog pojačavača napravi neinvertujući pojačavač sa povratnom spregom, njegovo pojačanje na niskim učestanos ma je 100, fazna margina relativnog kružnog pojačanja iznosi 45°, a propusni opseg kružnog pojačanja (definisan slabljenjem od 3 dB) je 100Hz.

Kada se od ovog operacionog pojačavača napravi neinvertujući jedinični pojačavač, učestanost jediničnog kružnog pojačanja je 1MHz.

Na slici 2.6.1 je prikazana šema kompenzovanog neinvertujućeg pojačavača napravljenog od ovog operacionog pojačavača.



Slika 2.6.1.

a) Odrediti otpornike u kompenzacionom kolu pojačavača sa slike 2.6.1, tako da fazna margina relativnog kružnog pojačanja bude 45°. Koristiti kompenzacioni kondenzator $C_k=1\mu$F.

b) Koliko iznosi propusni opseg kružnog pojačanja pojačavača sa slike 2.6.1?

c) Koliko iznosi pojačanje na niskim učestanostima A_0 korišćenog operacionog pojačavača?

Rešenje:

Za pojačavač sa povratnom spregom koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100, faktor povratne sprege je $\beta = 0{,}01$, pa je amplitudska karakteristika kružnog pojačanja spuštena za 40dB u odnosu na slučaj $\beta = 1$, kao što je prikazano na slici 2.6.2. Pošto za $\beta = 0{,}01$ fazna margina relativnog kružnog pojačanja iznosi 45°, sigurno je da učestanost ni jednog od polova ne može da bude veća od jedinične učestanosti $(f_{c0,01})$. Stoga, kao u zadatku 2.5, na osnovu Bodeove aproksimativne amplitudske karakteristike kružnog pojačanja sledi da je $f_{c\beta} = \sqrt{A_0 \beta f_{p1} f_{p2}}$. Ovo svakako važi i za $\beta = 1$, pošto je $f_{c1} > f_{c0,01}$. Deljenjem se dobija:

$$f_{c0,01}/f_{c1} = \sqrt{0{,}01 A_0 f_{p1} f_{p2}} \Big/ \sqrt{A_0 f_{p1} f_{p2}} = 0{,}1 \qquad (2.6.1)$$

tj.:

$$f_{c0,01} = 100\,\text{kHz}. \qquad (2.6.2)$$

Kada bi učestanosti polova bile međusobno bliske, one bi morale da budu veće od $f_{c0,01}/10 > 10\,\text{kHz}$, jer bi u suprotnom fazna margina bila zanemarljiva, a ne 45°. Međutim, pošto je propusni opseg kružnog pojačanja jednak 100Hz, učestanost bar jednog pola mora da bude bliska vrednosti 100Hz. Sledi da su učestanosti polova međusobno vrlo različite. Zbog toga učestanost nižeg pola mora da bude jednaka propusnom opsegu kružnog pojačanja, tj. $f_{p1} = 100\,\text{Hz}$. Pošto su učestanosti polova međusobno vrlo različite, a fazna margina je jednaka 45°, zaključuje se da je učestanost drugog pola jednaka jediničnoj učestanosti $f_{p2} = f_{c0,01} = 100\,\text{kHz}$ (videti rešenje zadatka 2.4). Dakle, u ovom slučaju je $|A\beta(0)| = f_{p2}/f_{p1} = 1000$, pa je $A_0 = |A(0)| = 1000/|\beta| = 100000$.

a) Pojačavač sa slike 2.6.1 ima pojačanje $A_r(0)=1$. Da bi fazna margina njegovog kružnog pojačanja bila 45°, jedinična učestanost mora da bude jednaka učestanosti drugog pola. Stoga odnos učestanosti polova kompenzovanog kružnog pojačanja mora da bude jednak $|A\beta_k(0)| = |A\beta(0)| = 100000$ (ako se pol $f_{p1} = 100\,\text{Hz}$ operacionog pojačavača poklapa sa kompenzacionom nulom). Dakle, nulu integralnog kompenzatora sa slike treba postaviti na f_{p1}, a pol na dve dekade nižu učestanost, tj. na 1Hz. Iz ovih uslova lako se dobija:

$$R_{k1} = 1/(2\pi \cdot 100 \cdot C_k) = 10^4/2\pi = 1591\,\Omega \qquad (2.6.3)$$

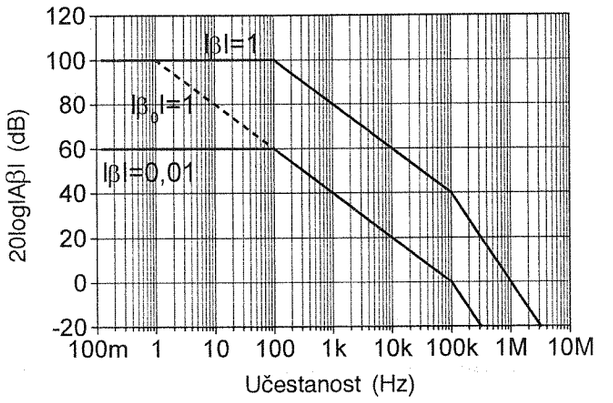
i:

$$R_{k2} = 1/(2\pi \cdot C_k) - R_{k1} = 157{,}6\,\text{k}\Omega. \qquad (2.6.4)$$

b) Propusni opseg kružnog pojačanja iznosi 1Hz, tj. jednak je učestanosti kompenzacionog pola.

c) U uvodnom delu rešenja je izračunata vrednost $A_0 = 100000$.

Na slici 2.6.2 su prikazane Bodeove aproksimacije za sve tri amplitudske karakteristike kružnog pojačanja. Kompenzovana karakteristika je prikazana isprekidanom linijom.



Slika 2.6.2.

2.7. Operacioni pojačavač ima beskonačnu ulaznu otpornost i polove na učestanostima: $f_1 = 100\,\text{Hz}$, $f_2 = 100\,\text{kHz}$ i $f_3 = 5\,\text{MHz}$. Kada se od ovog operacionog pojačavača napravi neinvertujući pojačavač sa $A_r(0)=1000$, fazna margina kružnog pojačanja iznosi 60°. Operacioni pojačavač nema priključke za kompenzaciju.

a) Rut-Hurvicovim testom izračunati graničnu vrednost $A_r(0)$ kada pojačavač sa reakcijom postaje nestabilan.

b) Odrediti elemente kompenzacionog kola tako da neinvertujući pojačavač sa $A_r(0)=1$, napravljen od ovog operacionog pojačavača, ima marginu faze 45°.

Rešenje:

Pošto za neinvertujući pojačavač sa $A_r(0) = 1000$ fazna margina kružnog pojačanja iznosi $\pi/3$, jedinična učestanost kružnog pojačanja je manja od $f_2 = 100\,\text{kHz}$, pa je na njoj fazni doprinos trećeg pola zanemarljiv. Međutim, jedinična učestanost je veća od $0{,}1 f_2 = 100 f_1 = 10\,\text{kHz}$, pošto bi u protivnom fazna margina bila $\pi/2$. Stoga je fazni doprinos prvog pola na učestanosti jediničnog kružnog pojačanja približno jednak $\pi/2$, a drugog pola $\pi/6$. Sledi da je $f_c = f_2 \cdot \text{tg}(\pi/6) = f_2/\sqrt{3}$. Kružno pojačanje na niskim učestanostima jednako je $f_c/f_1 = f_2/\sqrt{3}/f_1 = 1000/\sqrt{3} = 577{,}35$. Pošto je u ovom slučaju $\beta \cong 0{,}001$, vrednost A_0 operacionog pojačavača jednaka je 577 350.

a) Karakteristična jednačina za ovo kolo sa povratnom spregom je:

$$(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)+s_1s_2s_3A_0\beta_0=0, \qquad (2.7.1)$$

tj.:

$$s^3+(s_1+s_2+s_3)s^2+(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)s+s_1s_2s_3(1+A_0\beta_0)=0. \qquad (2.7.2)$$

Rut-Hurvicova tabela je:

s^3	1	$s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3$
s^2	$s_1+s_2+s_3$	$s_1s_2s_3(1+A_0\beta_0)$
s^1	$s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3 - s_1s_2s_3(1+A_0\beta_0)/(s_1+s_2+s_3)$	0
s^0	$s_1s_2s_3(1+A_0\beta_0)$	0

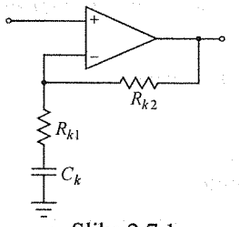
Uslov stabilnosti je:

$$s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3 - s_1s_2s_3(1+A_0\beta_0)/(s_1+s_2+s_3). \qquad (2.7.3)$$

Zamenom brojnih vrednosti približno se dobija $1+A_0\beta_0<51000$. Na osnovu toga je:

$$A_r(0)\big|_{\min}=\frac{A_o}{1+A_0\beta_0\big|_{\max}}\cong\frac{577350}{51000}=11{,}3. \qquad (2.7.4)$$

b) Pošto operacioni pojačavač nema priključke za kompenzaciju, kompenzacija može da se izvrši u kolu povratne sprege. Pojačavač sa povratnom spregom treba da bude jedinični, pa diferencijalna kompenzacija ne može da se primeni. Međutim, može da se primeni integralna kompenzacija kao na slici 2.7.1. Drugi pol kružnog pojačanja kompenzovanog pojačavača treba da bude jednak učestanosti jediničnog pojačanja (da bi fazna margina bila $\pi/4$), a doprinos trećeg pola kružnog pojačanja faznoj karakteristici biće zanemarljiv, jer je njegova učestanost 50 puta veća. Pošto je $\beta_0=1$, $A_0\beta_0=577350$. Toliko dakle iznosi slabljenje kružnog pojačanja kompenzovanog pojačavača od prvog pola do jedinične učestanosti (tj. do $f_2=100\text{kHz}$). Dakle, nula kompenzatora treba da bude u $f_1=100\,\text{Hz}$, a pol kompenzatora u $100\,\text{kHz}/577\,350=0{,}1732\,\text{Hz}$. Ako se usvoji $C_k=1\mu\text{F}$, lako se dobija:



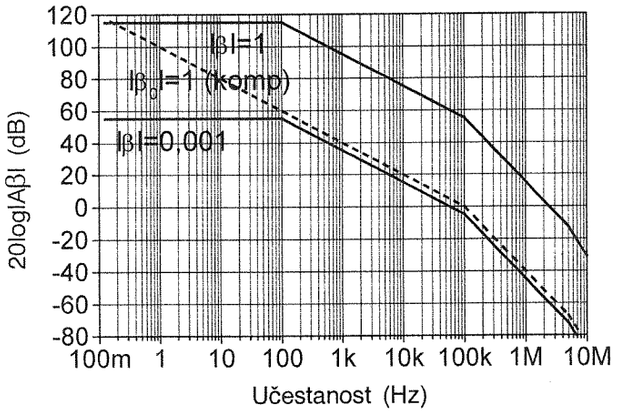
Slika 2.7.1.

$$R_{k1}=1/(2\pi\cdot 100\cdot C_k)=10^4/2\pi=1591\Omega, \qquad (2.7.5)$$

i:

$$R_{k2}=1/(2\pi\cdot 0{,}1732\cdot C_k)-R_{k1}=917{,}3\text{k}\Omega. \qquad (2.7.6)$$

Napomena: kompenzaciona nula i prvi pol operacionog pojačavača ne moraju da se poništavaju, ali je u tom slučaju proračun malo složeniji.



Slika 2.7.2.

2.8. Operacioni pojačavač ima beskonačnu ulaznu otpornost i polove na učestanostima: $f_1=100\,\text{Hz}$, $f_2=100\,\text{kHz}$ i $f_3=5\,\text{MHz}$, a nema priključke za kompenzaciju. Kada se od ovog operacionog pojačavača napravi neinvertujući pojačavač sa $A_r(0)$=1000, dobijeni pojačavač sa povratnom spregom ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku.

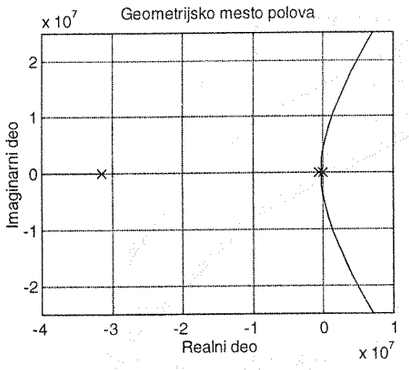
a) Rut-Hurvicovim testom izračunati graničnu vrednost $A_r(0)$ kada pojačavač sa reakcijom postaje nestabilan.

b) Odrediti elemente kompenzacionog kola tako da neinvertujući pojačavač sa $A_r(0)=1$, napravljen od ovog operacionog pojačavača, ima marginu faze $\pi/4$ rad.

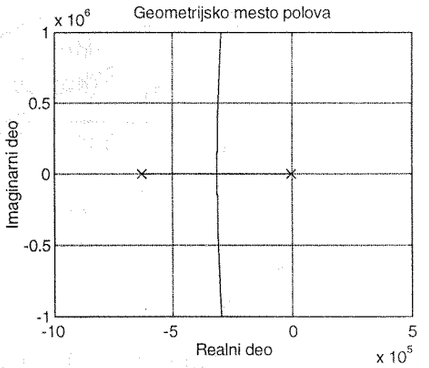
Rešenje:

a) Na osnovu pravila za crtanje geometrijskog mesta korenova lako se može zaključiti da geometrijskom mestu pripada deo realne ose između dva manja pola datog operacionog pojačavača. Prema tome, sa porastom konstante kružnog pojačanja ova dva pola se međusobno približavaju, a zatim formiraju konjugovano-kompleksni par. Grane koje odgovaraju ovom paru posle tačke odvajanja od realne ose postepeno kreću ka desnoj poluravni, približavajući se asimptotama koje zaklapaju uglove od $\pm 60°$ sa realnom osom. Na delovima ovih grana u levoj poluravni, apsolutna vrednost realnog dela polova je sigurno manja od $(f_1+f_2)/2=50{,}05\,\text{kHz}$ tj. $(\omega_1+\omega_2)/2=314{,}47\,\text{krad/s}$. Pošto je apsolutna vrednost trećeg (tj. realnog) pola tada veća od $f_3=5\,\text{MHz}$ $(\omega_3=31{,}4\,\text{Mrad/s})$, jasno je da je ovaj treći pol nedominantan, pa se uslov maksimalno ravne amplitudske karakteristike praktično odnosi na konjugovano-kompleksni par, odnosno funkciju drugog reda. Za date polove geometrijsko mesto je prikazano na

slikama 2.8.1.a. i (u uvećanoj razmeri deo koji odgovara konjugovano-kompleksnom paru polova) 2.8.1.b.



Slika 2.8.1.a.



Slika 2.8.1.b.

U zadatku 2.5. je pokazano da pojačavač sa otpornom povratnom spregom sa dvopolnom karakteristikom kružnog pojačanja ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku ako je odnos polova kružnog pojačanja jednak $2\cdot|A\beta(0)|$. Pošto je odnos dva niža pola datog operacionog pojačavača jednak $f_2/f_1=1000$, sledi da je $|A\beta(0)|=500$. Faktor povratne sprege je $\beta\cong 1/A_r(0)=0{,}001$, pa se dobija da je $|A(0)|=A_0\cong 500\ 000$.

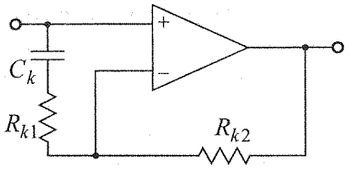
Karakteristična jednačina i na osnovu nje napisana Rut-Hurvicova tabela su iste kao u zadatku 2.7, pa i ovde važi isti uslov stabilnosti, tj.:

$$s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3-s_1s_2s_3(1+A_0\beta_0)/(s_1+s_2+s_3)>0\,, \qquad (2.8.1)$$

na osnovu kojeg se za zadate učestanosti polova dobija približno $1+A_0\beta_0<51000$. Uvrštavanjem izračunate vrednosti za A_0 dobija se:

$$A_r(0)\cong 1/\beta>A_0/50999\cong 9{,}8\,. \qquad (2.8.2)$$

b) Za pojačavač sa $A_r(0)=1$ ne može da se primeni diferencijalna kompenzacija u kolu povratne sprege, pa treba primeniti integralnu kompenzaciju. Integralna kompenzacija može da se realizuje kao na slici 2.7.1. Međutim, isto kružno pojačanje može da se realizuje kao što je prikazano na slici 2.8.2. Omogućavanjem direktnog toka signala od ulaza do izlaza ne samo kroz pojačavač nego i kroz kompenzaciono kolo dobija se povoljnija amplitudska karakteristika pojačanja sa povratnom spregom.



Slika 2.8.2.

Pošto je učestanost trećeg pola operacionog pojačavača 50 puta veća od učestanosti drugog pola, doprinos fazne karakteristike trećeg pola ukupnoj faznoj karakteristici na učestanosti jediničnog kružnog pojačanja (pri faznoj margini jednakoj $\pi/4$) je zanemarljiv. Zbog $f_2/f_1=1000$, doprinos prvog pola na učestanosti drugog pola je približno jednak $\pi/2$. Pošto je fazna karakteristika drugog pola na učestanosti drugog pola jednaka $\pi/4$, sledi da će fazna margina biti jednaka $\pi/4$ ako je jedinična učestanost kružnog pojačanja jednaka učestanosti drugog pola. Za neinvertujući pojačavač sa $A_r(0)=1$ je $\beta=1$, pa je pre kompenzacije $|A\beta(0)|=500000$. Dakle, kompenzacijom treba smanjiti kružno pojačanje na učestanosti drugog pola 500 puta (zbog $f_2/f_1=1000$) što se može postići isto tolikim povećanjem odnosa polova kompenzovanog kružnog pojačanja. Ovo podrazumeva poništavanje nižeg pola operacionog pojačavača kompenzacionom nulom.

Učestanosti nule i pola kompenzacionog kola su određene izrazima:

$$f_{zk}=\frac{1}{2\pi R_{k1}C_k}\ \text{ i }\ f_{pk}=\frac{1}{2\pi(R_{k1}+R_{k2})C_k}\,. \qquad (2.8.3)$$

Kada se izvrši poklapanje nižeg pola operacionog pojačavača kompenzacionom nulom, dakle $f_{zk}=1/(2\pi R_{k1}C_k)=f_1=100\,\text{Hz}$, kompenzacioni pol treba da bude na 500 puta nižoj učestanosti, tj. $f_{pk}=1/[2\pi(R_{k1}+R_{k2})C_k]=0{,}2\,\text{Hz}$. Obzirom da su na raspolaganju tri elementa za zadovoljavanje ova dva uslova, vrednost jednog elementa može da se bira. Ako se izabere $C_k=100$ nF, dobija se $R_{k1}=15{,}9\,\text{k}\Omega$ i $R_{k2}=499R_{k1}=7{,}94\,\text{M}\Omega$.

2.9. Nekompenzovani operacioni pojačavač ima dva pola od kojih je jedan na vrlo niskim učestanostima. Operacioni pojačavač nema priključke za kompenzaciju.

Ako se od njega, primenom otporne povratne sprege, napravi neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 100, dobijeni pojačavač ima polove sa Q-faktorom jednakim 1,3, pa se u odzivu na Hevisajdovu funkciju javljaju prigušene oscilacije učestanosti $\omega_{osc}=1{,}2\,\text{Mrad/s}$.

Ako se od nekompenzovanog operacionog pojačavača napravi jedinični neinvertujući pojačavač, u odzivu na Hevisajdovu funkciju javljaju se vrlo slabo prigušene oscilacije.

a) Koliko iznosi Q-faktor polova pojačavača sa povratnom spregom u ovom slučaju?

b) Koliko iznosi učestanost pomenutih oscilacija?

c) Koliko iznosi učestanost jediničnog kružnog pojačanja?

d) Odrediti tip kompenzacije tako da kružno pojačanje napravljenog jediničnog neinvertujućeg pojačavača ima faznu marginu jednaku $\pi/4$, a njegova vrednost za jednosmerni signal treba da ostane nepromenjena.

e) Koliko iznosi odnos nule i pola kompenzacionog kola?

СУНЕТФ

Rešenje:

Pošto se kod pojačavača sa povratnom spregom sa pojačanjem 100 u odzivu na Hevisajdovu funkciju javljaju prigušene oscilacije učestanosti $\omega_{osc}=1{,}2\,\text{Mrad/s}$, toliko iznosi imaginarni deo njegovih polova. Realni deo polova je jednak $-\sqrt{\omega_{osc}^2/\left(4\cdot Q^2-1\right)}=-\sqrt{1{,}2^2/\left(4\cdot 1{,}3^2-1\right)}=-0{,}5\ \text{Mrad/s}$. Stoga je njihov zbir jednak $-1\,\text{Mrad/s}$. Pošto funkcija kružnog pojačanja ovog pojačavača ima dva pola i nema konačnih nula, zbir polova pojačavača sa povratnom spregom ne zavisi od vrednosti faktora povratne sprege, pa i za sam operacioni pojačavač bez povratne sprege iznosi $-1\,\text{Mrad/s}$. Pošto su polovi operacionog pojačavača realni i jedan od njih je na vrlo niskim učestanostima $\left(\omega_{p1}<<\omega_{p2}\right)$, učestanost višeg pola je približno jednaka $1\,\text{Mrad/s}$.

a) Karakteristična jednačina pojačavača sa povratnom spregom je:

$$s^2+\left(\omega_{p1}+\omega_{p2}\right)s+\left(1+A_0\beta\right)\omega_{p1}\omega_{p2}=0, \tag{2.9.1}$$

a Q-faktor polova je, za $1<<A_0\beta$, približno:

$$Q=\frac{\sqrt{\left(1+A_0\beta\right)\omega_{p1}\omega_{p2}}}{\omega_{p1}+\omega_{p2}}\cong\frac{\sqrt{A_0\beta\omega_{p1}\omega_{p2}}}{\omega_{p1}+\omega_{p2}}. \tag{2.9.2}$$

Stoga je Q-faktor polova za $\beta=1$ jednak:

$$Q\big|_{\beta=1}=Q\big|_{\beta=0{,}01}\cdot\frac{\sqrt{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}}{\sqrt{A_0\cdot 0{,}01\cdot\omega_{p1}\omega_{p2}}}=10\cdot Q\big|_{\beta=0{,}01}=13. \tag{2.9.3}$$

b) Uz pomoć dobijene vrednosti Q-faktora može se izračunati i učestanost slabo prigušenih oscilacija:

$$\omega_{osc}=0{,}5\cdot\left(\omega_{p1}+\omega_{p2}\right)\cdot\sqrt{4\cdot\left(Q\big|_{\beta=1}\right)^2-1}\cong 13\,\text{Mrad/s}. \tag{2.9.4}$$

c) U rešenju zadatka 2.5 je pokazano da je na aproksimativnoj Bodeovoj dvopolnoj karakteristici kružnog pojačanja jedinična učestanost jednaka $\omega_{c\beta}=\sqrt{A_0\beta\omega_{p1}\omega_{p2}}$, ako su učestanosti polova manje od $\omega_{c\beta}$. Primenom (2.9.2) dobija se:

$$\omega_{c\beta}\big|_{\beta=1}=\sqrt{A_0\omega_{p1}\omega_{p2}}\cong Q\cdot\left(\omega_{p1}+\omega_{p2}\right)=13\,\text{Mrad/s}. \tag{2.9.5}$$

Dakle, u okviru korišćenih aproksimacija, jedinična učestanost je pri ovolikoj vrednosti Q-faktora jednaka učestanosti slabo prigušenih oscilacija.

d) Obzirom da se radi o jediničnom neinvertujućem pojačavaču, diferencijalna kompenzacija u kolu povratne sprege ne dolazi u obzir [6], [7]. Diferencijalna kompenzacija na ulazu ili izlazu pojačavača takođe ne dolazi u obzir, zbog smanjivanja kružnog pojačanja za jednosmernu učestanost, pa preostaje integralna kompenzacija.

e) Kompenzacijom treba smanjiti kružno pojačanje na višim učestanostima tako da ima jediničnu vrednost na učestanosti višeg pola operacionog pojačavača (da bi fazna margina bila $\pi/4$). Dakle, jediničnu učestanost kružnog pojačanja treba smanjiti 13 puta, zbog $\omega_{p2}\cong 1\,\text{Mrad/s}$. Pošto je na učestanostima većim od $1\,\text{Mrad/s}$ nagib amplitudske karakteristike kružnog pojačanja jednak $-40\,\text{dB/dec}$, kružno pojačanje na višim učestanostima treba smanjiti $13^2=269$ puta. Toliki treba da bude odnos nule i pola integralnog kompenzatora. Ako su nula i pol kompenzatora mnogo manji od višeg pola operacionog pojačavača, uslov za marginu će biti zadovoljen i ako kompenzaciona nula ne poništava niži pol operacionog pojačavača, koji je nepoznat.

2.10. Nekompenzovani operacioni pojačavač ima beskonačnu ulaznu otpornost i dva pola od kojih je jedan na vrlo niskim učestanostima. Operacioni pojačavač nema priključke za kompenzaciju. Ako se od njega, primenom otporne povratne sprege, napravi neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 100, u odzivu na Hevisajdovu funkciju javljaju se prigušene oscilacije učestanosti $\omega=1\,\text{Mrad/s}$. Vremenska konstanta smirivanja ovih oscilacija je $\tau=1\,\mu\text{s}$.

Ako se od nekompenzovanog operacionog pojačavača napravi jedinični neinvertujući pojačavač, u odzivu na Hevisajdovu funkciju javljaju se slabo prigušene oscilacije.

a) Izračunati Q-faktor polova pojačavača sa povratnom spregom u ovom slučaju.

b) Izračunati učestanost pomenutih oscilacija.

c) Izračunati učestanost jediničnog kružnog pojačanja.

d) Odrediti tip kompenzacije tako da kružno pojačanje napravljenog jediničnog neinvertujućeg pojačavača ima faznu marginu jednaku $\pi/4$, a njegova vrednost za jednosmerni signal treba da ostane nepromenjena.

e) Koliko iznosi odnos nule i pola kompenzacionog kola?

Rešenje:

Zadatak je veoma sličan zadatku 2.9, samo što je sada zadata vremenska konstanta smirivanja prigušenih oscilacija umesto Q-faktora polova pojačavača sa povratnom spregom koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100.

Za pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 100 faktor povratne sprege iznosi 0,01. Pošto je realni deo polova pojačavača jednak $-1/\tau=-1\,\text{Mrad/s}$, a imaginarni deo je jednak učestanosti prigušenih oscilacija tj. takođe

СУЭТФ

1 Mrad/s, Q-faktor polova je jednak $1/\sqrt{2}$, pa je amplitudska karakteristika maksimalno ravna. U rešenju zadatka 2.5 je pokazano da je kod ovakve karakteristike kružnog pojačanja (dvopolna uz $\omega_{p1} << \omega_{p2}$) uslov za maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku približno $2A_0\beta\omega_{p1} \cong \omega_{p2}$, što znači da je učestanost višeg pola ω_{p2} dvostruko veća od jedinične učestanosti kružnog pojačanja. Zbir učestanosti polova ovog pojačavača je $2/\tau = 2$ Mrad/s. Pošto kružno pojačanje ima dva pola a nema nula (kolo povratne sprege sadrži samo otpornike), zbir polova ne zavisi od konstante kružnog pojačanja, pa je jednak 2 Mrad/s i za $\beta = 0$. Pošto je $\omega_{p1} << \omega_{p2}$, sledi $\omega_{p2} \cong 2$ Mrad/s.

a) Na isti način kao u zadatku 2.9 je:

$$Q|_{\beta=1} = 10 \cdot Q|_{\beta=0,01} = 10/\sqrt{2} = 7,07. \qquad (2.10.1)$$

b) Učestanost oscilacija jednaka je imaginarnom delu polova i iznosi:

$$\omega_{osc} = 0,5 \cdot (\omega_{p1} + \omega_{p2}) \cdot \sqrt{4 \cdot \left(Q|_{\beta=1}\right)^2 - 1} = (1\text{Mrad/s}) \cdot \sqrt{4 \cdot 7,07^2 - 1} = 14,1\text{Mrad/s}. \qquad (2.10.2)$$

c)

$$\omega_{c\beta}\Big|_{\beta=1} = \sqrt{A_0\beta\omega_{p1}\omega_{p2}} \cong Q|_{\beta=1} \cdot (\omega_{p1} + \omega_{p2}) = 7,07 \cdot 2\text{Mrad/s} = 14,1\text{Mrad/s}. \qquad (2.10.3)$$

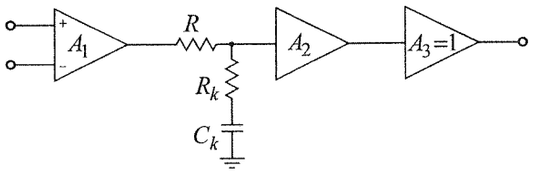
d) Kao u zadatku 2.9, potrebno je primeniti integralnu kompenzaciju, sa istim obrazloženjem.

e) Odnos nule i pola kompenzacionog kola treba da bude jednak vrednosti nekompenzovanog kružnog pojačanja na učestanosti višeg pola, tj. 50.

2.11. Na slici 2.11.1 je pokazana struktura operacionog pojačavača. Prenosna funkcija ulaznog stepena je $A_1 = A_{10}/(1 + jf/f_1)$, a pojačavačkog stepena $A_2 = A_{20}/(1 + jf/f_2)$, gde su: $A_{10} = 10$, $A_{20} = 1000$, $f_1 = 1$MHz, $f_2 = 1$kHz. Izlazni stepen ima jediničnо pojačanje i veoma širok propusni opseg. Ulazne struje svakog pojačavačkog stepena su zanemarljive.

a) Ako je $R = 1\text{k}\Omega$, izračunati elemente kompenzacionog kola C_k, R_k tako da margina faze bude 45° kada se opisani operacioni pojačavač, primenom odgovarajuće povratne sprege, upotrebi sa pojačanjem +1.

b) Ako se opisani operacioni pojačavač kompenzovan pod tačkom a) upotrebi sa pojačanjem (primenom odgovarajuće povratne sprege), izračunati propusni opseg.



Slika 2.11.1.

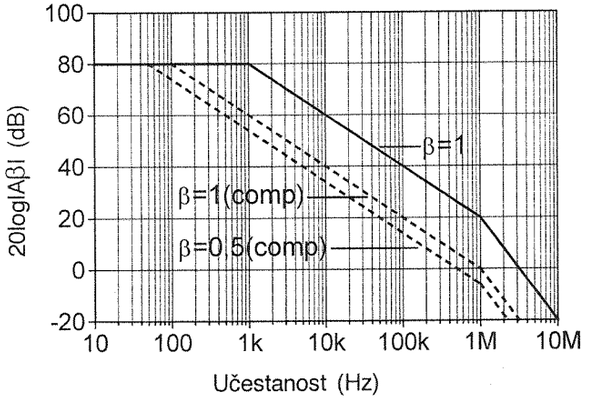
Rešenje:

a) Da bi fazna margina bila 45°, integralnom kompenzacijom može da se "premesti" niži pol tako da se jedinična učestanost kružnog pojačanja poklopi sa učestanošću višeg pola. Dakle, nula kompenzacionog kola treba da bude u $f_2 = 1$kHz. Pošto je kružno pojačanje na niskim učestanostima jednako $A_0\beta = 10000$, a nagib između polova kompenzovanog kružnog pojačanja je -20dB/dec, kompenzacioni pol treba da bude na učestanosti $f_{pk} = f_1/10000 = 100$Hz. Učestanosti nule i pola kompenzacionog kola određene su izrazima:

$$f_{zk} = \frac{1}{2\pi R_k C_k} \text{ i } f_{pk} = \frac{1}{2\pi (R + R_k) C_k}. \qquad (2.11.1)$$

Odavde se lako određuje $R_k = R/9 = 111\Omega$ i $C_k = 1,43\mu$F.

Amplitudske karakteristike nekompenzovanog i kompenzovanog kružnog pojačanja za jedinični pojačavač ($\beta = 1$) prikazane su na slici 2.11.2.



Slika 2.11.2.

b) Pojačavač u tački b) ima Q-faktor:

$$Q = \frac{\sqrt{f_{pk} f_1 (1 + A_0\beta)}}{f_{pk} + f_1} \cong \frac{\sqrt{f_{pk} f_1 A_0/2}}{f_1} = 1/\sqrt{2}. \qquad (2.11.2)$$

Dakle, ovaj pojačavač ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku, pa mu je širina propusnog opsega jednaka potegu polova, tj.:

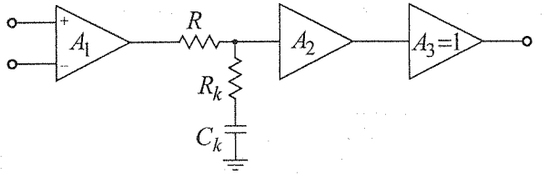
$$\frac{f_{pk}+f_1}{\sqrt{2}}\cong\frac{f_1}{\sqrt{2}}=707\,\text{kHz}\,. \qquad (2.11.3)$$

Amplitudske karakteristike kompenzovanog kružnog pojačanja i za ovaj slučaj ($\beta=0{,}5$) prikazana je na slici 2.11.2.

2.12. Na slici je prikazana struktura operacionog pojačavača. Prenosna funkcija ulaznog stepena je $A_1=A_{10}/(1+jf/f_1)$, a pojačavačkog stepena: $A_2=A_{20}/(1+jf/f_2)$, gde su $A_{10}=10$, $A_{20}=1000$, $f_1=1\text{MHz}$. Izlazni stepen ima jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg. Ulazna struja svakog stepena je zanemarljiva. Kada se pojačavač sa slike, bez kompenzacionih elemenata, primenom odgovarajuće povratne sprege upotrebi sa pojačanjem +1, margina faze kružnog pojačanja iznosi $\text{FM}=\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimaciji fazne karakteristike.

a) Ako je $R=1\text{k}\Omega$, izračunati elemente serijskog kompenzacionog kola C_k, R_k tako da margina faze bude 60° kada se opisani operacioni pojačavač, primenom odgovarajuće povratne sprege, upotrebi sa pojačanjem +1.

b) Ako se opisani operacioni pojačavač kompenzovan pod tačkom a) upotrebi sa pojačanjem −1 (primenom odgovarajuće povratne sprege), izračunati mu propusni opseg i faznu marginu njegovog kružnog pojačanja.



Slika 2.12.1.

Rešenje:

Zadatak je veoma sličan zadatku 2.11. U tom zadatku podatak za učestanost $f_2=\omega_2/(2\pi)$ je eksplicitno dat, dok se ovde ta učestanost može da odredi iz uvodnog dela teksta. Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je $A_0=A_{10}\cdot A_{20}=10\cdot 1000=10^4$, tj. $20\log A_0=80\text{dB}$. Polovi očigledno nisu bliski pošto bi u tom slučaju fazna margina bila zanemarljiva. Na primer, kada bi učestanosti polova bile jednake (jedan dvostruki pol), rastojanje između učestanosti ovog dvostrukog pola i jedinične učestanosti pojačavača f_T (za $\beta=1$ to je i jedinična učestanost amplitudske karakteristike kružnog pojačanja) moralo bi da bude dve dekade (da bi se amplitudska karakteristika smanjila za 80dB), što znači da bi fazna margina bila zanemarljiva, tj. približno jednaka nuli. Pošto su, dakle, učestanosti vrlo različite, logično je da je

učestanost pola stepena sa velikim pojačanjem, f_2, manja od učestanosti pola stepena sa malim pojačanjem (tj. ulaznog stepena), f_1.

Fazna margina je jednaka $\pi/8$ tj. manja je od $\pi/4$, pa je jedinična učestanost pojačavača f_T veća od učestanosti višeg pola. Pošto su učestanosti polova vrlo različite, zaključuje se da je $f_T\gg f_2$, pa se može smatrati da je komponenta fazne karakteristike koja potiče od nižeg pola f_2 na jediničnoj učestanosti f_T jednaka $\pi/2$. Sledi da je komponenta koja potiče od višeg pola jednaka:

$$\frac{\pi}{4}\left(1+\log\frac{f_T}{f_1}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}-\text{FM}=\frac{3\pi}{8}\,. \qquad (2.12.1)$$

Iz (2.12.1) se dobija:

$$\log\frac{f_T}{f_1}=\log f_T-\log f_1=\frac{1}{2}[\text{dec}]\,. \qquad (2.12.2)$$

Sa Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike datog operacionog pojačavača je vrednost pojačanja na učestanosti f_1:

$$20\log A_0=80\,\text{dB}=-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_2}{f_1}-40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_1}{f_T}\,. \qquad (2.12.3)$$

Korišćenjem dobijenog odnosa f_T i f_1 dobija se da je $f_2=0{,}001f_1=1\text{kHz}$.

a) Kada se kompenzovani operacioni pojačavač, primenom odgovarajuće povratne sprege, upotrebi sa pojačanjem +1, faktor povratne sprege je jednak $\beta=1$, pa je kružno pojačanje jednako:

$$\beta A(s)=\frac{-A_0}{(1+s/\omega_1)(1+s/\omega_2)}\cdot\frac{R_k+\dfrac{1}{C_ks}}{R+R_k+\dfrac{1}{C_ks}}=\frac{-A_0\omega_1\omega_2}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}\cdot\frac{1+R_kC_ks}{1+(R+R_k)C_ks}\,. \qquad (2.12.4)$$

Vidi se da su nula i pol kompenzatora određeni izrazima:

$$\omega_{zk}=\frac{1}{R_kC_k}\ \text{i}\ \omega_{pk}=\frac{1}{(R+R_k)C_k}<\omega_{zk}\,. \qquad (2.12.5)$$

Pošto se radi o integralnoj kompenzaciji, ω_{pk} i ω_{zk} treba da budu mnogo manji od f_T. Da se kompenzacijom ne bi povećao red prenosne funkcije, može se usvojiti $\omega_{zk}=2\pi f_2$, tj. niži pol nekompenzovanog pojačavača može da se poništi kompenzacionom nulom. U tom slučaju polovi kompenzovanog kružnog pojačanja su u ω_{pk} i ω_1.

Vrednost ω_{pk} treba da obezbedi faznu marginu jednaku 60°. Pošto je $\omega_{pk}<\omega_{zk}=\omega_2$, komponenta fazne karakteristike koja potiče od ovog pola na jediničnoj učestanosti ω_T

jednaka je $\pi/2$. Stoga komponenta fazne karakteristike koja potiče od pola ω_1 na jediničnoj učestanosti ω_T treba da bude jednaka $30°$:

$$\operatorname{arctg}\frac{\omega_T}{\omega_1}=30°, \tag{2.12.6}$$

tj.:

$$\omega_T=\omega_1/\sqrt{3}. \tag{2.12.7}$$

Pošto je $\omega_T<\omega_1$, sledi da je:

$$20\log A_0=80\,\text{dB}=-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{pk}}{\omega_T}=-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{pk}}{\omega_1/\sqrt{3}}, \tag{2.12.8}$$

odnosno:

$$\omega_{pk}=\left(\omega_1/\sqrt{3}\right)/10000\Rightarrow f_{pk}=f_1/17300=57{,}7\,\text{Hz}. \tag{2.12.9}$$

Sada se može izračunati:

$$\frac{f_{zk}}{f_{pk}}=1+\frac{R}{R_k}=17{,}3\Rightarrow R_k=\frac{R}{17{,}3-1}=61{,}35\,\Omega \tag{2.12.10}$$

i:

$$C_k=\frac{1}{\omega_{zk}R_k}=\frac{1}{2\pi f_2R_k}=2{,}59\,\mu\text{F}. \tag{2.12.11}$$

b) Ako se od operacionog pojačavača sa izračunatim kompenzacionim elementima napravi pojačavač sa pojačanjem -1, amplitudska karakteristika kružnog pojačanja se spušta za 6dB u odnosu na slučaj pod a), pošto je sada $\beta=0{,}5$. Zbir polova pojačavača sa povratnom spregom ostaje nepromenjen ($f_{pk}+f_1\cong f_1=1\,\text{MHz}$), a proizvod im je sada jednak $(1+0{,}5A_0)f_{pk}f_1\cong 5000f_{pk}f_1=0{,}289f_1^2$. Dakle, karakteristični polinom pojačavača sa povratnom spregom je $f^2+f_1f+0{,}289f_1^2$. Kvadrat njegovog modula za $f\to 0$ je $0{,}289^2f_1^4$. Na graničnoj učestanosti f_g kvadrat modula ovog polinoma na jf osi treba da bude dva puta veći:

$$\left(0{,}289f_1^2-f_g^2\right)^2+\left(f_1f_g\right)^2=2\cdot 0{,}289^2f_1^4 \tag{2.12.12}$$

Rešavanjem ove bikvadratne jednačine dobija se $f_g=683{,}8\,\text{kHz}$.

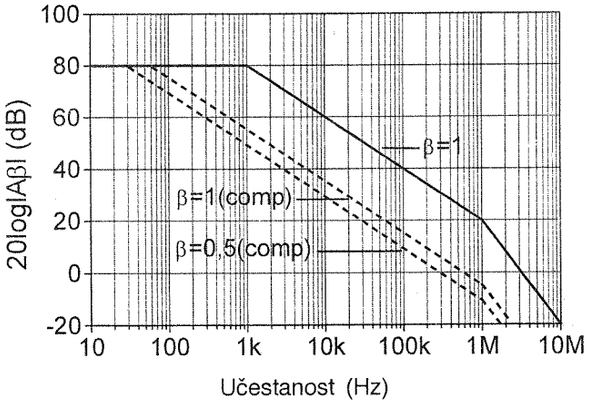
Pošto je amplitudska karakteristika kružnog pojačanja spuštena za 6dB u odnosu na slučaj pod a), jedinična učestanost kružnog pojačanja $f_{c0,5}$ je dvostruko manja nego u tački a):

$$f_{c0,5}=0{,}5f_{c1}=0{,}5f_T=0{,}5f_1/\sqrt{3}. \tag{2.12.13}$$

Pošto je i na ovoj učestanosti komponenta fazne karakteristike koja potiče od pola f_{pk} jednaka $90°$, fazna margina je jednaka:

$$90°-\operatorname{arctg}\frac{f_{c0,5}}{f_1}=90°-\operatorname{arctg}\frac{0{,}5}{\sqrt{3}}=90°-16{,}1°=73{,}9°. \tag{2.12.14}$$

Bodeove aproksimacije amplitudskih karakteristika kružnog pojačanja za sva tri slučaja prikazane su na slici 2.12.2.



Slika 2.12.2.

2.13. Na slici 2.13.1 je prikazana struktura operacionog pojačavača. Prenosne funkcije stepena A_1 i A_2 su jednopolne, pri čemu je jedan od polova na vrlo niskim učestanostima. Izlazni stepen ima jedinično pojačanje za sve učestanosti. Ulazne struje svakog pojačavačkog stepena su zanemarljive.

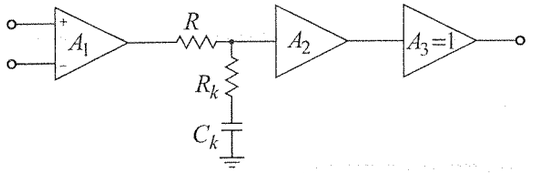
Ako se od nekompenzovanog operacionog pojačavača (tj. za $C_k=0$) napravi jedinični neinvertujući pojačavač, kratkospajanjem invertujućeg ulaza sa izlazom, u odzivu na pobudni signal oblika jedinične funkcije javlja se veliko premašenje uz oscilacije učestanosti 1MHz koje se veoma sporo smiruju.

Ako se napravi jedinični neinvertujući pojačavač od kompenzovanog operacionog pojačavača, a u kompenzacionom kolu upotrebi $R_k=1\,\text{k}\Omega$ i $C_k=1\,\mu\text{F}$, fazna margina kružnog pojačanja iznosi $\pi/4$.

Ako se od kompenzovanog operacionog pojačavača sa slike (uz iste vrednosti $R_k=1\,\text{k}\Omega$ i $C_k=1\,\mu\text{F}$ u kompenzacionom kolu) i dva otpornika napravi jedinični invertujući pojačavač, propusni opseg napravljenog pojačavača iznosi 100kHz.

a) Ako se od nekompenzovanog operacionog pojačavača (tj. za $C_k=0$) napravi neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 100, odrediti propusni opseg napravljenog pojačavača.

b) Od operacionog pojačavača napraviti neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 10, a operacioni pojačavač kompenzovati (odrediti R_k, a za C_k uzeti 1 μF) tako da amplitudska karakteristika napravljenog pojačavača bude maksimalno ravna.



Slika 2.13.1.

Rešenje:

<u>C_k=0, β=1</u>

Kada je Q-faktor polova dvopolnog pojačavača sa otpornom povratnom spregom veoma veliki, učestanost vrlo slabo prigušenih oscilacija na izlazu, u odzivu na pobudni signal oblika jedinične funkcije, jednaka je približno (videti rešenje zadatka 2.5):

$$f_{osc} \cong \sqrt{A_0 \beta f_1 f_2}\,. \qquad (2.13.1)$$

Sa druge strane, pošto je prigušenje vrlo malo (oscilacije se sporo smiruju), učestanost jediničnog kružnog pojačanja f_c je veća od učestanosti većeg pola, pa je sa Bodeove aproksimativne amplitudske karakteristike vrednost kružnog pojačanja na učestanosti f_{p1}:

$$20 \log A_0\beta = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{f_2}{f_1} + 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{f_c}{f_2}\,. \qquad (2.13.2)$$

Iz (2.13.2) sledi $f_c = \sqrt{A_0 \beta f_1 f_2}$. Na osnovu toga je pri datim uslovima $f_c \cong f_{osc} = 1\text{MHz}$.

<u>R_k = 1kΩ, C_k =1μF, β =1</u>

Pošto je pojačavač drugog reda, a učestanosti polova su $f_1 \ll f_2$, zahtev da fazna margina kružnog pojačanja bude jednaka $\pi/4$ zadovoljen je pri $f_{ck1} = f_2$ (ovo je detaljno objašnjeno u rešenju zadatka 2.4), gde je f_{ck1} jedinična učestanost kružnog pojačanja jediničnog neinvertujućeg pojačavača napravljenog od kompenzovanog pojačavača sa datim kompenzacionim elementima.

<u>R_k = 1kΩ, C_k =1μF, β=0,5</u>

Pošto je u odnosu na prethodni slučaj vrednost β dvostruko manja, na aproksimativnoj Bodeovoj amplitudskoj karakteristici kružnog pojačanja biće $f_{ck0,5} = f_2/2$, gde je $f_{ck0,5}$ jedinična učestanost kružnog pojačanja invertujućeg

jediničnog pojačavača napravljenog od kompenzovanog pojačavača sa istim kompenzacionim elementima. Lako se pokazuje da pri $f_1 \ll f_2$ uslov $f_{ck0,5} = f_2/2$ obezbeđuje maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku prenosne funkcije drugog reda (videti npr. rešenje zadatka 2.5). Kod maksimalno ravne amplitudske karakteristike propusni opseg je jednak potegu polova, tj. za funkciju drugog reda poteg polova je $(f_1 + f_2)/\sqrt{2}$. Za $f_1 \ll f_2$ poteg je približno jednak $f_2/\sqrt{2}$. Pošto je za ovaj slučaj zadata vrednost propusnog opsega pojačavača jednaka 100kHz, sledi da je $f_2 = \sqrt{2} \cdot 100\,\text{kHz}$. Za ovu učestanost, vrednost pojačanja na Bodeovoj aproksimativnoj amplitudskoj karakteristici nekompenzovanog operacionog pojačavača (odnosno kružnog pojačanja za β=1) je:

$$40\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{f_c}{f_2} = 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{1\text{MHz}}{\sqrt{2} \cdot 100\text{kHz}} = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{10^2}{2}\,. \qquad (2.13.3)$$

Iz (2.13.3) sledi da je na učestanosti f_2 pojačanje na ovoj karakteristici jednako 50. Prema tome, kompenzaciono kolo sa $R_k = 1\text{k}\Omega$ i $C_k = 1\mu\text{F}$ smanjilo je pojačanje pojačavača na višim učestanostima 50 puta:

$$\frac{f_{zk}}{f_{pk}} = 50 \Rightarrow \frac{R_k}{R_k + R} = \frac{1}{50},\ \text{tj.}\ R = 49\text{k}\Omega\,. \qquad (2.13.4)$$

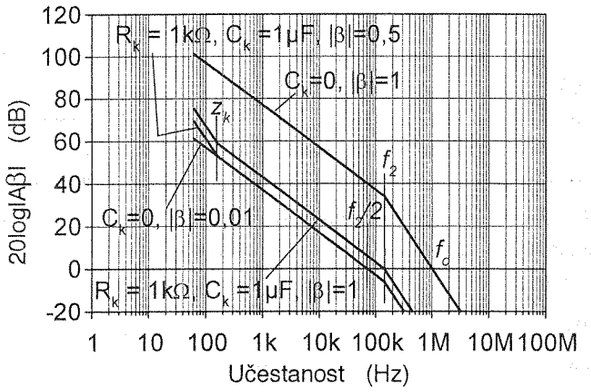
U (2.13.4) f_{zk} i f_{pk} su učestanosti nule i pola kompenzacionog kola.

a) <u>C_k=0, β=0,01</u>

Bodeova aproksimativna amplitudska karakteristika kružnog pojačanja u ovom slučaju je spuštena za 40dB u odnosu na slučaj $C_k = 0$, β=1, pa je njena vrednost na f_2 jednaka 0,5 (videti sliku 2.13.2). To znači da je $f_{c0,01} = f_{ck0,5} = f_2/2$, gde je $f_{c0,01}$ jedinična učestanost kružnog pojačanja neinvertujućeg pojačavača sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 100, pri C_k=0. Sledi da je i u ovom slučaju amplitudska karakteristika pojačavača sa povratnom spregom maksimalno ravna, i da je propusni opseg jednak $f_2/\sqrt{2}$ tj. 100kHz.

b) <u>C_k=1μF, β=0,1, maksimalno ravna amplitudska karakteristika</u>

Pošto je β=0,1, Bodeova aproksimativna amplitudska karakteristika kružnog pojačanja je spuštena za 20 dB u odnosu na prvi slučaj (tj. $C_k = 0$, β=1). Integralna kompenzacija treba da obezbedi spuštanje ove karakteristike za još 20dB, da bi njena vrednost na f_2 bila jednaka 0,5, tj. da bi njena jedinična učestanost kružnog pojačanja $f_{ck0,1}$ bila jednaka $f_2/2$, pošto je, ponovo, to uslov za maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku pojačanja sa povratnom spregom. Dakle, $R_{k1}/(R_{k1} + R) = 1/10$, tj. $R_{k1} = (49/9)\text{k}\Omega$, gde je R_{k1} tražena nova vrednost otpornosti kompenzacionog otpornika.



Slika 2.13.2.

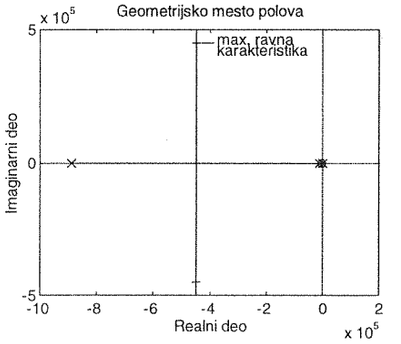
Napomena:

U gornjim izračunavanjima nije bilo neophodno poznavati vrednost pojačanja A_0 operacionog pojačavača kao ni učestanost nižeg pola f_1. Poklapanje kompenzacione nule sa nižim polom nekompenzovanog pojačavača nije neophodan uslov da bi karakteristika pojačanja sa povratnom spregom efektivno ostala drugog reda, bez nule. Ako se analizira geometrijsko mesto polova pojačavača čije kružno pojačanje ima jednu nulu na niskim učestanostima i tri realna pola od kojih su dva na niskim učestanostima, vidi se da se jedan od polova na niskim učestanostima približava nuli, dok se ostala dva međusobno približavaju a zatim formiraju konjugovano-kompleksni par polova. Pol koji se za veliku vrednost konstante kružnog pojačanja veoma približio nuli kružnog pojačanja (to je nula kompenzatora) približno se sa njom poništava, pa pojačanje sa povratnom spregom zbog toga ostaje dvopolna funkcija (bez nula). Ovo je ilustrovano na slikama 2.13.3.a i (u veoma uvećanoj razmeri) 2.13.3.b, na kojima je prikazano geometrijsko mesto polova pojačanja sa povratnom spregom, kada pojačavač bez povratne sprege ima jednu konačnu nulu $\omega_{-k} = 1/(R_k C_k) = 1000\,\text{rad/s}$ i tri realna pola $\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi\sqrt{2}\cdot 100\,\text{krad/s}$, $\omega_{pk} = 2\pi f_{pk} = \omega_{-k}/50 = 20\,\text{rad/s}$ i $\omega_1 = 10000\,\text{rad/s}$ koji je izabran tako da zadovolji uslov $\omega_1 \ll \omega_2$. Za $A_0\beta = 2221{,}66$ pojačanje sa povratnom spregom ima par konjugovano kompleksnih polova sa $Q = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$, jedan realan pol na učestanosti 980,5rad/s i realnu nulu na učestanosti $\omega_{-k} = 1/(R_k C_k) = 1000\,\text{rad/s}$ koja se približno poništava sa realnim polom, pa je prenosna funkcija efektivno maksimalno ravna drugog reda.

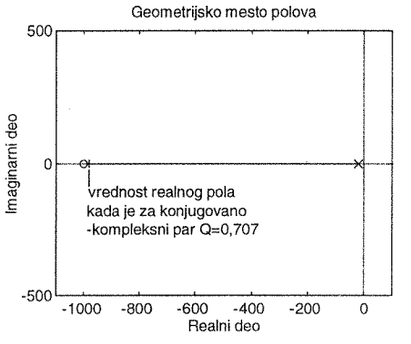
Ukoliko konstanta kružnog pojačanja nije dovoljno velika, razlika učestanosti nule i pola nije zanemarljiva, pa se u odzivu pojačavača na Hevisajdovu funkciju javlja i komponenta sa vremenskom konstantom jednakom recipročnoj vrednosti učestanosti pola. Pošto je učestanost ovog pola znatno manja od propusnog opsega, vreme smirivanja odziva je relativno veliko [6].

Za vrednosti polova označene znacima "+" na geometrijskom mestu (slika 2.13.3), na slici 2.13.4.a prikazane su frekventne karakteristike prenosne funkcije sa povratnom spregom. One se približno poklapaju sa karakteristikama prenosne funkcije

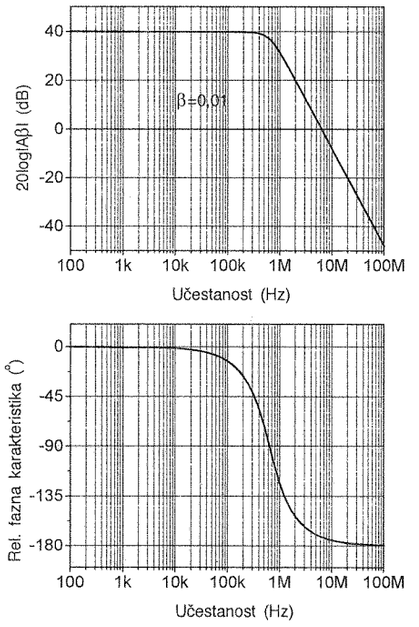
drugog reda sa maksimalno ravnom amplitudskom karakteristikom. Da bi se uočio uticaj nepotpunog poništavanja kompenzacione nule i pola pojačavača, na slici 2.13.4.b prikazane su iste karakteristike u veoma uvećanoj razmeri po ordinati. Uočava se odstupanje od idealnih karakteristika, maksimalne veličine oko $-0{,}18\,\text{dB}$ u amplitudskoj karakteristici i oko $-0{,}6°$ u faznoj karakteristici pojačavača.



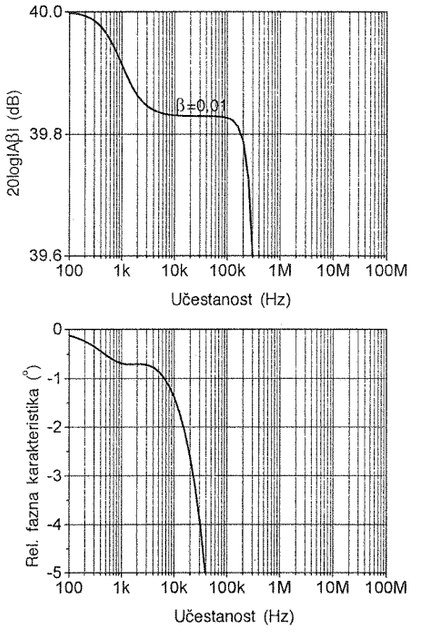
Slika 2.13.3.a.



Slika 2.13.3.b.



Slika 2.13.4.a.



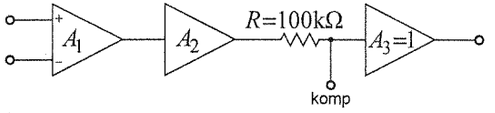
Slika 2.13.4.b.

2.14. Na slici 2.14.1 je prikazan trostepeni operacioni pojačavač koji ima izveden priključak za spoljašnju kompenzaciju. Amplitudska karakteristika je dvopolna, pri čemu

je jedan pol na vrlo niskim učestanostima. Izlazni stepen ima beskonačnu ulaznu otpornost, jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg. Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je 200000.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 200, amplitudska karakteristika dobijenog pojačavača je maksimalno ravna u koordinatnom početku, tj. zadovoljava uslove Batervortove aproksimacije.

Ako se od nekompenzovanog operacionog pojačavača napravi jedinični neinvertujući pojačavač, u odzivu na jediničnu Hevisajdovu funkciju javlja se veliko premašenje sa oscilacijama učestanosti 1 Mrad/s koje se veoma sporo smiruju. Odrediti kompenzacione elemente tako da i u ovom slučaju amplitudska karakteristika bude maksimalno ravna. Kompenzacija ne treba da smanji vrednost kružnog pojačanja za $\omega \to 0$.



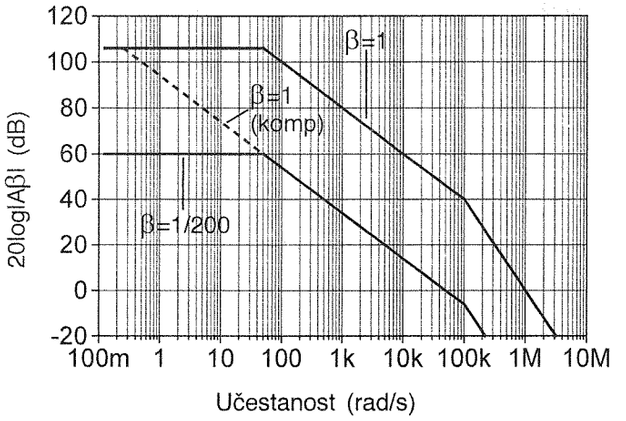
Slika 2.14.1.

Rešenje:

U rešenju zadatka 2.5 je pokazano da je kod ovakve karakteristike kružnog pojačanja (dvopolna uz $\omega_{p1} \ll \omega_{p2}$) uslov za maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku približno $2A_0\beta\omega_{p1} \cong \omega_{p2}$, što znači da je učestanost višeg pola ω_{p2} dvostruko veća od jedinične učestanosti kružnog pojačanja, tj. (za $\beta = 1/200$) $\omega_{p2} \cong 2000\omega_{p1}$.

Na osnovu trećeg pasusa teksta zadatka sledi da je u slučaju primene nekompenzovanog operacionog pojačavača za jedinični neinvertujući pojačavač ($\beta_1 = 1$) jedinična učestanost kružnog pojačanja približno jednaka 1 Mrad/s, a fazna margina gotovo nula, što znači da su oba pola znatno niže od 1 Mrad/s. Ovo se može pokazati na isti način kao u rešenju zadatka 2.5. U ovom slučaju, vrednost kružnog pojačanja na niskim učestanostima je 200000. Pošto je $\omega_{p2} \cong 2000\omega_{p1}$, sledi da je vrednost kružnog pojačanja na učestanosti ω_{p2} jednaka 100, što se može videti sa slike 2.14.2. Iznad ω_{p2} nagib amplitudske karakteristike kružnog pojačanja je jednak -40 dB/dec, pa je jedinična učestanost kružnog pojačanja u ovom slučaju na $10\omega_{p2}$, tj. $\omega_{p2} = 0{,}1$ Mrad/s, a $\omega_{p1} = \omega_{p2}/2000 = 50$ rad/s. Da bi i u ovom slučaju amplitudska karakteristika pojačavača bila maksimalno ravna, potrebno je izvršiti kompenzaciju tako da bude zadovoljen uslov $2A_o\beta_1\omega_{pk} \cong \omega_{p2}$ (ω_{pk} je pol kompenzacione mreže), ako karakteristika ostaje drugog reda i bez nula. Pošto je $\beta_1 = 1$, odnos polova treba povećati 200 puta u poređenju sa odnosom polova nekompenzovanog kružnog pojačanja. Da bi karakteristika ostala drugog reda i bez nula, kompenzaciju treba izvršiti u kolu pojačavača, poništavanjem jednog od polova kompenzacionom nulom. Pošto je u kolu

pojačavača moguće izvesti samo integralnu kompenzaciju, kompenzatorom treba ostvariti $\omega_{zk} = \omega_{p_1}$, $\omega_{pk} = \omega_{p_1}/200 = 0{,}25$ rad/s. To se postiže priključivanjem redne veze $R_k = 500\,\Omega$, $C_k = 40\,\mu$F između kompenzacionog priključka i mase.

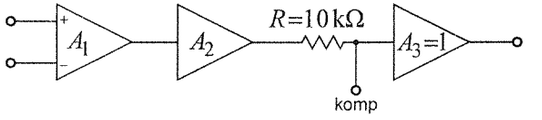


Slika 2.14.2.

2.15. Operacioni pojačavač sa slike 2.15.1 ima dvopolnu prenosnu funkciju (izlazni stepen ima jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg) sa polovima $f_1 = 1$MHz i $f_2 = 1$kHz. Ulazne struje svakog pojačavačkog stepena su zanemarljive. Pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim +1, napravljen od ovog operacionog pojačavača primenom odgovarajuće povratne sprege, ima marginu faze $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimativnoj karakteristici kružnog pojačanja.

a) Korišćenjem priključka za spoljašnju kompenzaciju kompenzovati operacioni pojačavač tako da pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim +1, napravljen od ovog operacionog pojačavača primenom odgovarajuće povratne sprege, ima marginu faze 45°. Odrediti kompenzacione elemente.

b) Ako se opisani operacioni pojačavač kompenzovan pod tačkom a) upotrebi sa pojačanjem -1 (primenom odgovarajuće povratne sprege), izračunati propusni opseg.



Slika 2.15.1.

Rešenje:

Zadatak može da se reši na osnovu rešenja zadataka 2.11 i 2.12, pošto im je veoma sličan. Razlika je u brojnoj vrednosti otpornika R i u tome što nije prikazan izgled kompenzacione mreže.

Iz uslova da je fazna margina jediničnog pojačavača jednaka $\pi/8$ sledi (na osnovu slične analize kakva je data u rešenju zadatka 2.12):

$$\log\frac{f_{c1}}{f_1}=\log f_{c1}-\log f_1=\frac{1}{2}[\text{dec}]. \qquad (2.15.1)$$

Vrednost nekompenzovanog kružnog pojačanja za $\beta_1=1$ na učestanosti f_1, sa Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike, jednaka je:

$$20\log|A_0\beta_1|=20\log A_0=-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\log\frac{f_2}{f_1}-40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\log\frac{f_1}{f_{c1}}=80\,\text{dB}. \qquad (2.15.2)$$

Takođe je:

$$20\log|A\beta_1(jf_1)|=20\log|A(jf_1)|=-40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\log\frac{f_1}{f_{c1}}=20\,\text{dB}. \qquad (2.15.3)$$

a) Iz rešenja pomenutih zadataka vidi se da je fazna margina jednaka 45° ako je jedinična učestanost kružnog pojačanja jednaka učestanosti višeg pola. Pošto je raspoloživ samo jedan priključak za kompenzaciju, ne može da se primeni diferencijalna kompenzacija. Kod nekompenzovanog jediničnog pojačavača je $20\log|A\beta_1(f_1)|=20\,\text{dB}$, pa integralnom kompenzacijom treba smanjiti nivo kružnog pojačanja na učestanosti $f_1=1\text{MHz}$ za 20dB. To znači da odnos kompenzacione nule i kompenzacionog pola treba da bude jednak 10. Ako se izvrši poništavanje nižeg pola kompenzacionom nulom $f_{zk}=f_2=1\text{kHz}$ i $f_{pk}=f_2/10=100\text{Hz}$. To se može postići kompenzacionom mrežom čija je struktura prikazana u zadacima 2.11 i 2.12. Učestanosti kompenzacione nule i pola određene su izrazima:

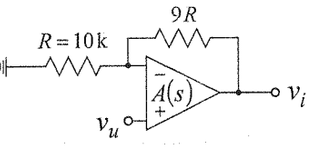
$$f_{zk}=\frac{1}{2\pi R_k C_k}\ \text{i}\ f_{pk}=\frac{1}{2\pi(R+R_k)C_k}. \qquad (2.15.4)$$

Odavde se lako određuje $R_k=R/9=1{,}11\text{k}\Omega$ i $C_k=143\text{nF}$.

b) Rešenje je identično rešenju tačke b) zadatka 2.11.

Izgled amplitudskih karakteristika kružnog pojačanja sa i bez kompenzacije takođe je isti kao na slici 2.11.2.

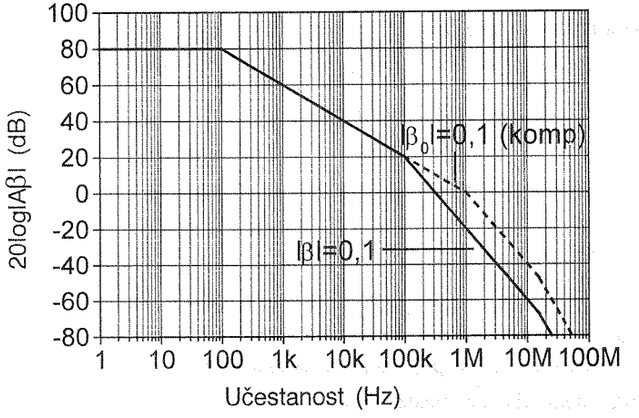
2.16. Operacioni pojačavač u kolu na slici 2.16.1 ima polove na učestanostima $f_1=100\,\text{Hz}$, $f_2=100\,\text{kHz}$ i $f_3=15\,\text{MHz}$, pojačanje u propusnom opsegu 100dB i beskonačnu ulaznu otpornost. Ako se od ovog operacionog pojačavača napravi pojačavač sa reakcijom prikazan na slici, odrediti marginu faze nekompenzovanog pojačavača. Zatim odrediti elemente kola diferencijalnog kompenzatora tako da margina faze kompenzovanog pojačavača bude 45°. Izračunati jediničnu učestanost kružnog pojačanja kompenzovanog pojačavača. Da li se ovakvom kompenzacijom jedinična učestanost povećava ili smanjuje?



Slika 2.16.1.

Rešenje:

Faktor povratne sprege u pojačavaču na slici je jednak $\beta=R/(R+9R)=0{,}1$, pa je amplitudska karakteristika nekompenzovanog kružnog pojačanja spuštena za 20dB u odnosu na karakteristiku samog operacionog pojačavača. Sledi da je $|A\beta(0)|=10^4$. Pošto je $f_2/f_1=1000$, a nagib Bodeove aproksimativne amplitudske karakteristike kružnog pojačanja između ovih učestanosti je $-20\,\text{dB/dec}$, smanjenje kružnog pojačanja između f_1 i f_2 je jednako 60dB. Stoga je na učestanosti f_2 nivo amplitudske karakteristike kružnog pojačanja približno jednak 20dB, pa je jedinična učestanost kružnog pojačanja oko pola dekade iznad f_2, kao što je prikazano punom linijom na slici 2.16.2.



Slika 2.16.2.

Iako opisani proračun jedinične učestanosti kružnog pojačanja ima zadovoljavajuću tačnost, precizniji proračun može da se izvrši rešavanjem jednačine $|A\beta(jf)|=1$ tj.:

$$\left|\frac{-0,1A_0}{\left(1+\frac{jf}{f_1}\right)\left(1+\frac{jf}{f_2}\right)\left(1+\frac{jf}{f_3}\right)}\right|=1. \qquad (2.16.1)$$

U okolini jedinične učestanosti f_c je sigurno zadovoljen uslov $f_1 \ll f$, a sa malo većom greškom i $f \ll f_3$, pa se gornja jednačina svodi na:

$$\frac{0,1A_0 \cdot f_1}{f\left|\left(1+\frac{jf}{f_2}\right)\right|}=1. \qquad (2.16.2)$$

Rešavanjem (2.16.2) dobija se $f_c \cong f_2\sqrt{9,5}=3,08f_2$. Obzirom da pola dekade odgovara odnosu jednakom 3,16, vidi se da prvi, kraći način daje 2,6 % veći rezultat, što je prihvatljiva greška u proračunu.

Fazna margina je:

$$\mathrm{FM}=180^\circ-\operatorname{arctg}\frac{f_c}{f_1}-\operatorname{arctg}\frac{f_c}{f_2}-\operatorname{arctg}\frac{f_c}{f_3}\cong 180^\circ-90^\circ-72^\circ-1,176^\circ=16,8^\circ. \qquad (2.16.3)$$

Fazna margina kompenzovanog kružnog pojačanja biće jednaka 45° ako je jedinična učestanost kružnog pojačanja jednaka učestanosti drugog pola (Objašnjenje je dato u više prethodnih rešenja, npr. u rešenju zadatka 2.4.). Primenom diferencijalne kompenzacije [6], [7] uz poklapanje drugog pola nekompenzovanog kružnog pojačanja kompenzacionom nulom moguće je "premestiti" drugi pol na više učestanosti, odnosno na učestanost kompenzacionog pola. To se postiže dodavanjem kompenzacionog kondenzatora C_k paralelno sa otpornikom $9R=90\,\mathrm{k\Omega}$ u kolu povratne sprege. Kolo povratne sprege je tada istovremeno i kompenzator i ima izgled kao na slici 2.16.3.

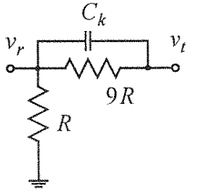
Faktor povratne sprege je:

$$\beta_k(s)=\frac{V_r(s)}{V_t(s)}=\frac{R}{R+9R\|\frac{1}{C_k s}}=\frac{R(1+9RC_k s)}{R+9R+9R^2C_k s}=0,1\frac{1+9RC_k s}{1+0,9RC_k s}, \qquad (2.16.4)$$

pa su učestanosti kompenzacionog pola i nule:

$$f_{pk}=\frac{1}{2\pi\cdot 0,9RC_k} \text{ i } f_{zk}=\frac{1}{2\pi\cdot 9RC_k}=0,1f_{pk}. \qquad (2.16.5)$$

Vidi se da je odnos kompenzacione nule i pola jednak vrednosti faktora povratne sprege na niskim učestanostima $\beta_k(0)=0,1$. Pošto je kružno pojačanje na učestanosti f_2 jednako 10, sledi da će posle poklapanja pola f_2 kompenzacionom nulom, $f_2=f_{zk}$, kružno pojačanje na učestanosti f_{pk} biti jednako 1. To znači da će jedinična učestanost kompenzovanog kružnog pojačanja biti jednaka f_{pk}. Stoga će fazna margina biti jednaka 45°, koliko je zahtevano tekstom zadatka. Dakle,



Slika 2.16.3.

$f_{ck}=f_{pk}=10f_{zk}=10f_2=1\mathrm{MHz}$. Iz ovog rešenja se vidi da se jedinična učestanost kružnog pojačanja ovakvom kompenzacijom povećava. Potrebna vrednost kapacitivnosti kompenzacionog kondenzatora je $C_k=\frac{1}{2\pi f_{zk}\cdot 9R}=\frac{1}{2\pi f_2\cdot 9R}=17,68\,\mathrm{pF}$.

2.17. Operacioni pojačavač ima amplitudsku karakteristiku sa dva pola od kojih je jedan na veoma niskoj učestanosti.

Ako se formira jedinični neinvertujući pojačavač, kratkospajanjem invertujućeg ulaza sa izlazom, u odzivu na pobudni signal oblika jedinične funkcije javlja se veliko premašenje uz oscilacije učestanosti 1MHz koje se veoma sporo smiruju.

Ako se, primenom dva otpornika, od operacionog pojačavača napravi neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 10, margina faze kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimaciji fazne karakteristike kružnog pojačanja.

Ako je otpornik od invertujućeg ulaza do mase jednak $10\,\mathrm{k\Omega}$, odrediti kompenzacionu kapacitivnost C_k za serijsku diferencijalnu kompenzaciju u kolu povratne sprege, tako da margina faze kružnog pojačanja, za pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 10, bude jednaka $\pi/4$.

Rešenje:

Pošto jedinični neinvertujući pojačavač napravljen od nekompenzovanog operacionog pojačavača gotovo osciluje na učestanosti 1MHz, na sličan način kao u rešenju zadatka 2.5 može se zaključiti da je jedinična učestanost kružnog pojačanja približno jednaka 1MHz, a fazna margina je gotovo jednaka nuli, što je prikazano na slici 2.17.1. To znači da je viši pol operacionog pojačavača na učestanosti koja nije veća od 100kHz. U opsegu učestanosti iznad drugog pola nagib Bodeove aproksimativne amplitudske karakteristike kružnog pojačanja je $-40\,\mathrm{dB/dec}$.

Neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 10 realizuje se primenom dva otpornika (kao na slici 2.16.1 u zadatku 2.16). Kada se amplitudska karakteristika nekompenzovanog kružnog pojačanja spusti za 20dB (zbog $\beta=0,1$), jedinična učestanost kružnog pojačanja se smanji za pola dekade (slika 2.17.1), tj. $f_{c0,1}=1/\sqrt{10}$ MHz. Po uslovu zadatka je na ovoj učestanosti fazna margina kružnog pojačanja jednaka $\pi/8$, dakle pretek faze kružnog pojačanja je jednak $-7\pi/8$ (na Bodeovoj aproksimaciji fazne karakteristike kružnog pojačanja). Komponenta relativne fazne karakteristike koja potiče od nižeg pola f_1 na jediničnoj učestanosti je jednaka $\pi/2$, pošto je $f_1 \ll f_2$. Sledi da je komponenta koja potiče od višeg pola jednaka:

$$\frac{\pi}{4}\left(1+\log\frac{f_{c0,1}}{f_2}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}-\mathrm{FM}=\frac{3\pi}{8}. \qquad (2.17.1)$$

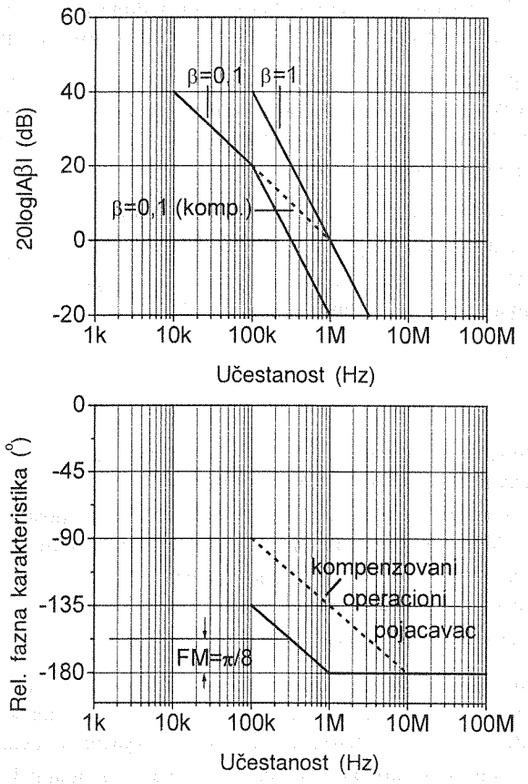
Iz (2.17.1) se dobija:

$$\log\frac{f_{c0,1}}{f_2}=\log f_{c0,1}-\log f_2=\frac{1}{2}[\text{dec}]. \qquad (2.17.2)$$

Imajući u vidu gore izračunatu vrednost za $f_{c0,1}$, lako se dobija $f_2=100\,\text{kHz}$.

Vrednost kružnog pojačanja na učestanosti f_2 može sada da se odredi sa Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike kružnog pojačanja:

$$20\log\left|A\beta\left(jf_2\right)\right|=40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\left(\log f_{c0,1}-\log f_2\right)=40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot 0{,}5\text{dec}=20\text{dB}. \qquad (2.17.3)$$



Slika 2.17.1.

Da bi margina faze kružnog pojačanja, za pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 10, bila jednaka $\pi/4$, potrebno je da se učestanost drugog pola poklapa sa jediničnom učestanošću kružnog pojačanja (videti rešenje zadataka 2.4 i 2.16). Pošto je kod diferencijalne kompenzacije u kolu povratne sprege učestanost kompenzacione nule niža od učestanosti kompenzacionog pola, nula se može postaviti na učestanost drugog pola, tj. $f_{zk}=f_2=100\,\text{kHz}$. Nagib Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike kružnog pojačanja tada je i u opsegu od 100 kHz do

učestanosti kompenzacionog pola jednak $-20\,\text{dB/dec}$. Zbog $20\log\left|A\beta\left(f_2\right)\right|=20\text{dB}$, presek ove karakteristike sa apscisnom osom će biti na učestanosti jednakoj 1 MHz, kao što se vidi sa amplitudske karakteristike prikazane na slici 2.17.1 (isprekidana linija). Na toj učestanosti treba da se nalazi i kompenzacioni pol. Pošto je ova učestanost 10 puta veća od učestanosti kompenzacione nule, a toliko je i $1/\beta$ nekompenzovanog pojačavača, kompenzacija se realizuje na jednostavan način, vezivanjem kompenzacionog kondenzatora paralelno sa rednim otpornikom u razdelniku kola povratne sprege (tj. između izlaza i invertujućeg ulaza, kao u zadatku 2.16). Ako je otpornik od invertujućeg ulaza do mase jednak $10\,\text{k}\Omega$, lako se izračunava da kompenzaciona kapacitivnost treba da bude jednaka $C_k=\dfrac{1}{2\pi f_{zk}\cdot 9R}=17{,}68\,\text{pF}$.

2.18. Operacioni pojačavač ima amplitudsku karakteristiku sa dva pola od kojih je jedan na veoma niskoj učestanosti.

Ako se formira jedinični neinvertujući pojačavač, kratkospajanjem invertujućeg ulaza sa izlazom, u odzivu na pobudni signal oblika jedinične funkcije javlja se veliko premašenje uz oscilacije učestanosti 1 MHz koje se veoma sporo smiruju.

Ako se, primenom dva otpornika, od operacionog pojačavača napravi neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 100, margina faze kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimaciji fazne karakteristike kružnog pojačanja.

Ako se od operacionog pojačavača i dva otpornika napravi neinvertujući pojačavač, kompenzovati operacioni pojačavač primenom diferencijalne kompenzacije u kolu povratne sprege (poništavajući jedan pol pojačavača kompenzacionom nulom) tako da margina faze kružnog pojačanja bude jednaka $\pi/4$. Ako je otpornost otpornika vezanog od invertujućeg ulaza do mase jednaka $R=1\,\text{k}\Omega$, odrediti kapacitivnost kompenzacionog kondenzatora C_k. Koliko iznosi pojačanje $A_r(0)$ napravljenog pojačavača?

Rešenje:

Zadatak je veoma sličan zadatku 2.17. Korišćenjem rešenja zadatka 2.5, i ovde se može zaključiti da je jedinična učestanost kružnog pojačanja jednaka $f_{c1}=1\text{MHz}$, a fazna margina gotovo jednaka nuli. To znači da je viši pol operacionog pojačavača na učestanosti koja nije veća od 100 kHz. U opsegu učestanosti iznad drugog pola nagib amplitudske karakteristike kružnog pojačanja je $-40\,\text{dB/dec}$.

Kada se napravi nekompenzovani pojačavač sa povratnom spregom, margina faze kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$ (posmatrano na Bodeovoj aproksimaciji fazne karakteristike), isto kao u zadatku 2.17, ali je pojačanje sa povratnom spregom u ovom slučaju 100, dakle amplitudska karakteristika kružnog pojačanja je spuštena za 40 dB u odnosu na karakteristiku pojačavača, što je prikazano na slici 2.18.1. Stoga je jedinična

učestanost kružnog pojačanja 10 puta manja od jedinične učestanosti za $\beta = 1$, dakle jednaka je $f_{c0,01} = 0{,}1 f_{c1} = 100\text{kHz}$. Udaljenost jedinične učestanosti od učestanosti drugog pola je (kao u zadatku 2.17):

$$\log \frac{f_{c0,01}}{f_2} = \log f_{c0,01} - \log f_2 = \frac{1}{2}[\text{dec}], \tag{2.18.1}$$

odakle se dobija $f_2 = 10\sqrt{10}\,\text{kHz} = 31{,}6\,\text{kHz}$.

Pojačanje nekompenzovanog operacionog pojačavača na učestanosti f_2 je:

$$20\log\left|A(jf_2)\right| = 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot(\log f_{c1} - \log f_2) = 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot 1{,}5\text{dec} = 60\text{dB}. \tag{2.18.2}$$

Pošto se u zadatku traži diferencijalna kompenzacija kondenzatorom C_k u kolu povratne sprege uz poništavanje pola pojačavača kompenzacionom nulom, postoji samo jedno rešenje i kod njega je odnos kompenzacione nule i kompenzacionog pola jednak faktoru povratne sprege. Zbog uslova za faznu marginu od $\pi/4$, jedinična učestanost kružnog pojačanja je jednaka učestanosti kompenzacionog pola (videti rešenje zadatka 2.4 i 2.16). U opsegu učestanosti od kompenzacione nule do kompenzacionog pola nagib Bodeove aproksimacije kompenzovane amplitudske karakteristike kružnog pojačanja je jednak -20dB/dec. Stoga za ovu karakteristiku važi:

$$20\log\left|A\beta_k(jf_2)\right| = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{ck}}{f_2}, \tag{2.18.3}$$

tj.:

$$20\log\left|A(jf_2)\right| + 20\log\left|\beta_k(jf_2)\right| = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{ck}}{f_2}. \tag{2.18.4}$$

Pošto je kod diferencijalno kompenzovanog kola povratne sprege učestanost nule manja od učestanosti pola, sa Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike faktora povratne sprege je:

$$20\log\left|\beta_k(jf_2)\right| = 20\log\left|\beta_k(jf_{zk})\right| = 20\log\left|\beta_k(0)\right| = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{zk}}{f_{pk}}. \tag{2.18.5}$$

Sledi da je:

$$20\log\left|A(jf_2)\right| + 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{zk}}{f_{pk}} = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{ck}}{f_2}, \tag{2.18.6}$$

odnosno:

$$20\log\left|A(jf_2)\right| = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{ck}f_{pk}}{f_2 f_{zk}} = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\left(\frac{f_{pk}}{f_{zk}}\right)^2. \tag{2.18.7}$$

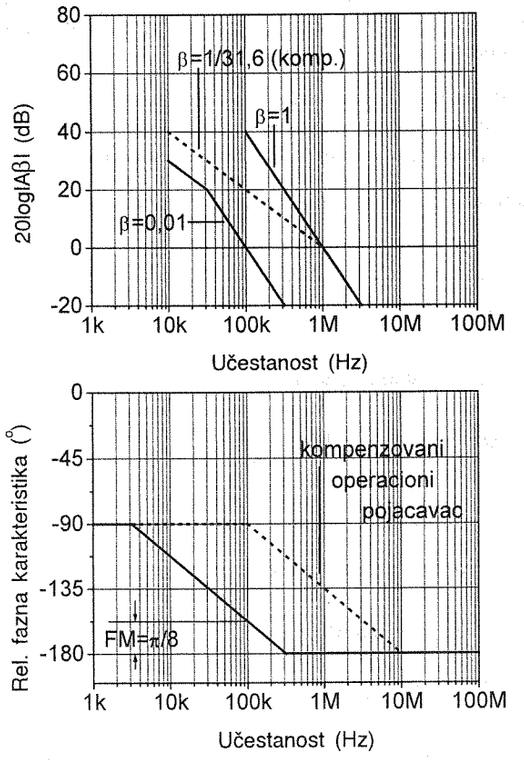
Odavde se dobija:

$$f_{pk} = \sqrt{\left|A(jf_2)\right|}\cdot f_{zk} = \sqrt{1000}\cdot f_{zk} = 31{,}6\cdot f_{zk} = 31{,}6\cdot f_2 = 1\,\text{MHz}. \tag{2.18.8}$$

Pojačanje $A_r(0)$ napravljenog pojačavača je jednako:

$$A_r(0) \cong \frac{1}{\beta_k(0)} = \frac{f_{pk}}{f_{zk}} = 31{,}6. \tag{2.18.9}$$

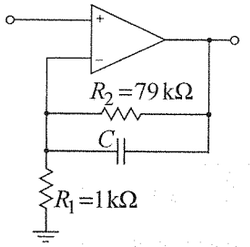
Za datu vrednost otpornosti otpornika od invertujućeg ulaza do mase, $R = 1\text{k}\Omega$, otpornost otpornika od invertujućeg ulaza do izlaza treba da bude jednaka $R[1-\beta_k(0)]/\beta_k(0) = 30{,}6\text{k}\Omega$, pa je potrebna vrednost kapacitivnosti kompenzacionog kondenzatora $C_k = \dfrac{1}{2\pi f_{zk}\cdot 30{,}6\text{k}\Omega} = 164{,}35\,\text{pF}$. Karakteristika kompenzovanog kružnog pojačanja prikazana je na slici 2.18.1 isprekidanom linijom.



Slika 2.18.1.

2.19. U kolu na slici 2,19.1 upotrebljen je nekompenzovani operacioni pojačavač sa dva pola od kojih je jedan (učestanosti ω_1) na vrlo niskim učestanostima. Operacioni pojačavač ima beskonačnu ulaznu otpornost i nema priključke za kompenzaciju.

a) Ako se iz kola sa slike 2.19.1 ukloni kondenzator C, fazna margina jednaka je $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimativnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja. Za učestanosti $\omega > \omega_1$ nacrtati Bodeovu aproksimativnu amplitudsku karakteristiku kružnog pojačanja za ovako izmenjen pojačavač sa slike (tj. za $C = 0$). Zatim odrediti odnos učestanosti polova operacionog pojačavača u funkciji njegovog jednosmernog pojačanja, $\omega_2/\omega_1 = f(A_0)$.



Slika 2.19.1.

b) Ako se vrednost kapacitivnosti kondenzatora C izabere tako da se kompenzaciona nula poklapa sa polom ω_2 operacionog pojačavača, odrediti izraze za učestanosti polova pojačavača sa slike 2.19.1 u funkciji pola ω_2 operacionog pojačavača.

c) Izračunati vrednost kapacitivnosti kondenzatora C tako da se u odzivu na Hevisajdovu funkciju na ulazu pojačavača sa slike 2.19.1 pojave prigušene oscilacije učestanosti $\omega = 0{,}5\,\text{Mrad/s}$ čija je vremenska konstanta smirivanja $\tau = 2\mu\text{s}$.

d) Izračunati novu vrednost za C tako da fazna margina kružnog pojačanja bude jednaka $\pi/4$.

Rešenje:

a) Na osnovu slične analize kao u rešenju zadatka 2.17 sledi:

$$\frac{\pi}{4}\left(1+\log\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}-\text{FM}=\frac{3\pi}{8}, \tag{2.19.1}$$

tj.:

$$\log\frac{\omega_c}{\omega_2}=\log\omega_c-\log\omega_2=\frac{1}{2}[\text{dec}]. \tag{2.19.2}$$

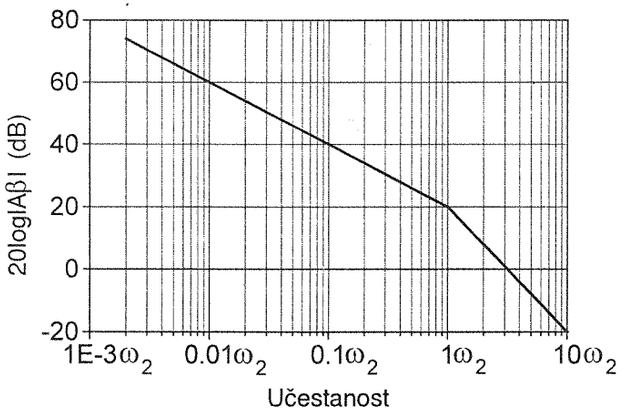
Iz (2.19.2) se dobija odnos učestanosti:

$$\frac{\omega_c}{\omega_2}=10^{0,5}\Rightarrow\omega_c=\sqrt{10}\omega_2. \tag{2.19.3}$$

Za dobijeni odnos učestanosti ω_c i ω_2, na slici 2.19.2 nacrtana je tražena Bodeova aproksimacija amplitudske karakteristike kružnog pojačanja. Sa ove slike je vrednost kružnog pojačanja na učestanosti drugog pola operacionog pojačavača jednaka:

$$20\log\left|A\beta(j\omega_2)\right|=40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_c}{\omega_2}=40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\sqrt{10}\omega_2}{\omega_2}=20\text{dB}; \tag{2.19.4}$$

$$\left|A\beta(j\omega_2)\right|=10. \tag{2.19.5}$$



Slika 2.19.2.

Sa iste karakteristike je:

$$20\log\left|A_0\beta_0\right|-20\log\frac{\omega_2}{\omega_1}-40\log\frac{\omega_c}{\omega_2}=0, \tag{2.19.6}$$

tj.:

$$A_0\beta_0=\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2=\frac{\omega_c^2}{\omega_1\omega_2}=\frac{10\omega_2^2}{\omega_1\omega_2}=10\frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{2.19.7}$$

$$\beta_0=\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{1}{80}\quad\Rightarrow\quad\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{A_0}{800}. \tag{2.19.8}$$

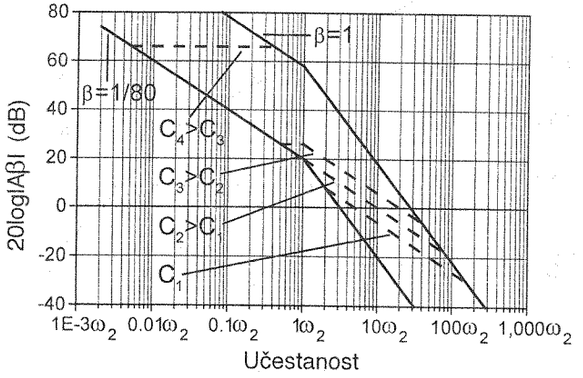
Pošto faktor povratne sprege ne zavisi od učestanosti, ovo ujedno znači da je pojačanje samog operacionog pojačavača na učestanosti ω_2 jednako $\left|A\beta(j\omega_2)\right|/\beta_0 = 800$.

b) Uzimajući u obzir da je $\omega_{-k}/\omega_{pk} = \beta_0 = 1/80$ (videti rešenje zadatka 2.16) i $\omega_2/\omega_1 = A_0/800$, prenosna funkcija pojačavača sa slike je:

$$A_r(s)=\frac{\dfrac{800\omega_2^2}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}}{1+800\omega_2^2\dfrac{(s+\omega_{-k})}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)(s+80\omega_{-k})}}. \tag{2.19.9}$$

Bodeova aproksimativna amplitudska karakteristika kružnog pojačanja u pojačavaču sa slike prikazana je na slici 2.19.3 za nekoliko vrednosti kapacitivnosti kondenzatora C. Sa slike se vidi da karakteristika koja odgovara vrednosti C_2 ($> C_1$) predstavlja slučaj $\omega_{-k} = \omega_2$. Vidi se da je u ovom slučaju nagib karakteristike jednak - 20 dB/dec za sve

učestanosti između ω_1 i ω_{pk}, pri čemu je ω_{pk} iznad jedinične učestanosti kružnog pojačanja za nešto manje od jedne dekade.



Slika 2.19.3.

Polovi pojačavača sa slike 2.19.1 određeni su nulama funkcije povratne sprege, tj. rešenjima jednačine:

$$(s+\omega_1)(s+\omega_2)(s+80\omega_{zk})+800\omega_2^2(s+\omega_{zk})=0 \qquad (2.19.10)$$

Za $\omega_{zk}=\omega_2$:

$$(s+\omega_2)\left[(s+\omega_1)(s+80\omega_2)+800\omega_2^2\right]=0 \qquad (2.19.11)$$

tj. jedno rešenje je u $s_{p1}=-\omega_2$, a dva su određena rešenjima kvadratnog faktora:

$$(s+\omega_1)(s+80\omega_2)+800\omega_2^2=s^2+(\omega_1+80\omega_2)s+80\omega_1\omega_2+800\omega_2^2\cong$$
$$s^2+80\omega_2 s+(80/A_0+1)800\omega_2^2\cong s^2+80\omega_2 s+800\omega_2^2\cong 0. \qquad (2.19.12)$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su $s_{p2}=-11{,}716\omega_2$ i $s_{p3}=-68{,}284\omega_2$.

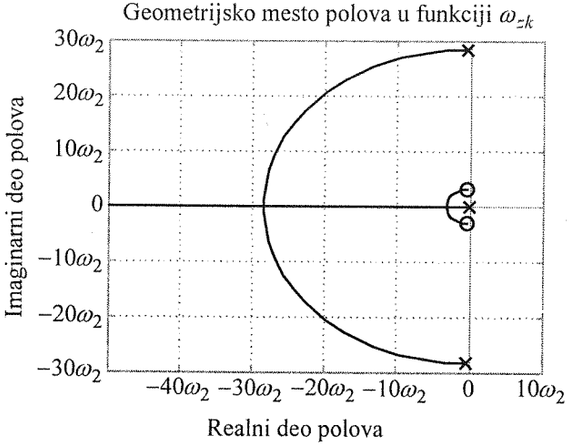
Da bi se videla zavisnost ovih polova od vrednosti kompenzacione nule $\omega_{zk}=\omega_{pk}/80$, uzimajući u obzir da je $\omega_1+\omega_2\cong\omega_2$ i $\omega_1\omega_2\ll\omega_2^2$ jednačina (2.19.10) može da se napiše u obliku:

$$1+80\omega_{zk}\frac{s^2+\omega_2 s+10\omega_2^2}{\left(s^2+\omega_2 s+800\omega_2^2\right)s}=0 \qquad (2.19.13)$$

Geometrijsko mesto korenova izraza (2.19.13) u funkciji ω_{zk} prikazano je na slici 2.19.4.

c) Za $\omega_{zk}=\omega_2$ u prethodnoj tački su dobijeni realni polovi prenosne funkcije pojačavača. Posmatrajući karakteristike kružnog pojačanja prikazane na slici 2.19.3 koje odgovaraju vrednostima C_3 ($>C_2$) i C_4 ($>C_3$), zaključuje se da se povećanjem

vrednosti kompenzacione kapacitivnosti odnosno smanjenjem vrednosti ω_{zk} ispod vrednosti $\omega_{zk}=\omega_2$ smanjuje fazna margina kružnog pojačanja. Dakle, za dovoljno malu vrednost ω_{zk} može da se dobije (pored jednog realnog pola) konjugovano-kompleksni par polova prenosne funkcije pojačavača sa slike 2.19.1 koji imaju realni deo $\mathrm{Re}[s_{p2}]=\mathrm{Re}[s_{p3}]=-1/\tau=-0{,}5$ Mrad/s jednak imaginarnom (Q-faktor im je 0,707). Iz jednačine koja određuje polove pojačavača sa povratnom spregom vidi se da zbir polova prenosne funkcije pojačavača ne zavisi od faktora povratne sprege i jednak je



Slika 2.19.4.

$-(\omega_1+\omega_2+\omega_{pk})\cong-(\omega_2+\omega_{pk})$. Pri promeni faktora povratne sprege od 0 do ∞ jedna grana geometrijskog mesta polova (realan pol ω_{p1}) polazi iz $-\omega_1$ i završava u $-\omega_{zk}>-\omega_2$. Pošto je $\omega_{pk}=80\omega_{zk}$, to znači da je zbir preostala dva pola uvek mnogo veći (po apsolutnoj vrednosti) od realnog pola. Stoga je zbir preostala dva pola približno jednak zbiru sva tri pola, tj. $-(\omega_2+\omega_{pk})$. Obzirom da je $|A(\omega_2)|=800$, a na učestanostima iznad ω_{pk} je $|\beta(\omega)|\cong 1$, sigurno je zadovoljen uslov $\omega_{pk}\gg\omega_2$, inače bi Q-faktor konjugovano-kompleksnog para polova $s_{p2,3}$ bio veoma velik, a ne 0,707 (mala fazna margina). Na primer, čak i za $\omega_{pk}=10\omega_2$ je $|A\beta(\omega_{pk})|\cong|A(10\omega_2)|=8$, pa je jedinična učestanost kružnog pojačanja (zbog asimptotskog nagiba od - 40 dB/dec) oko $\sqrt{8}\omega_{pk}$, zbog čega je Q-faktor svakako veći od 0,707. Stoga je zbir preostala dva pola (znači i zbir sva tri pola) približno jednak $-\omega_{pk}$. Prema tome $-2/\tau\cong-\omega_{pk}\Rightarrow\omega_{pk}\cong 1$Mrad/s. Za date vrednosti otpornosti otpornika na osnovu toga se dobija $C=80/(R_2\omega_{pk})=(80/79)$nF. Sem toga je $\omega_{zk}=\omega_{pk}/80$. Pošto je konstanta $|A\beta(0)|$ velika (zbog $A_0/800=\omega_2/\omega_1\gg 1$), realan pol pojačavača sa slike se približno poklapa sa kompenzacionom nulom (videti rešenje zadatka 2.13). Iz (2.19.9) se vidi da je

proizvod polova u konjugovano-kompleksnom paru stoga približno jednak $800\omega_2^2\omega_{zk}/|s_{p1}| \cong 800\omega_2^2$. Pošto im je zbir jednak $-\omega_{pk}$, a Q-faktor 0,707, lako se dobija da je $\sqrt{800}\omega_2/\omega_{pk} = 0{,}707$ odnosno $\omega_2 = \omega_{pk}/40 = 25\,\text{krad/s}$.

Uslov $\omega_{pk} >> \omega_2$, na osnovu kojeg je dobijeno gornje rešenje, može matematički preciznije da se izvede. Iz jednačine koja određuje polove pojačavača sa povratnom spregom vidi se da je proizvod potega polova prenosne funkcije pojačavača približno jednak $800\omega_2^2\omega_{zk}$. Pošto je Q-faktor konjugovano-kompleksnog para jednak 0,707, proizvod potega polova je:

$$800\omega_2^2\omega_{zk} = |s_{p1}|\frac{(\omega_2+\omega_{pk})^2}{2} = |s_{p1}|\frac{(\omega_2+80z_k)^2}{2} \le \omega_{zk}\frac{(\omega_2+80\omega_{zk})^2}{2}. \qquad (2.19.14)$$

Odavde sledi da je $\omega_{zk} \ge 39\omega_2/80$ tj. $\omega_{pk} \ge 39\omega_2$. Stoga je zbir polova u konjugovano-kompleksnom paru približno jednak $-(\omega_2+\omega_{pk}) \cong -\omega_{pk}$.

Kompenzovano kružno pojačanje u ovom približnom rešenju, pored dva vrlo različita pola ω_1 i ω_{pk}, ima i jedan nedovoljno poništen dublet $\omega_2 = 2\omega_{zk}$ na učestanostima znatno manjim od jedinične. Uočava se da prisustvo dubleta nije izmenilo uslov za $Q = 0{,}707$ polova sa povratnom spregom, pošto je i ovde dobijena jedinična učestanost kružnog pojačanja upola manja od ω_{pk} (videti rešenje zadatka 2.5). Međutim, u ovom slučaju amplitudska karakteristika pojačanja sa povratnom spregom nije maksimalno ravna funkcija drugog reda, obzirom na prisustvo realnog pola čija je učestanost približno ω_{zk} i nule učestanosti ω_{pk}.

Dobijeno rešenje $C = (80/79)$ nF zadovoljava zadate uslove i daje $\omega_2 > \omega_{zk} \cong \omega_2/2$. Međutim, postoji i drugo rešenje koje zadovoljava zadate uslove, u kojem se dobija $\omega_{zk} > \omega_2$. Naime, za $\omega_{zk} = \omega_{pk}/80 = \infty$, tj. $C_k = 0$ u tački a) je data mala fazna margina jednaka $\pi/8$, što znači da u tom slučaju dva pola prenosne funkcije pojačavača sa povratnom spregom formiraju konjugovano-kompleksni par sa relativno velikim Q-faktorom. Prema tome, za neku vrednost kompenzacione nule (drugo rešenje) između $\omega_{zk} = \omega_2$ (kada su svi polovi sa povratnom spregom realni) i $\omega_{zk} = \infty$ (kada je Q-faktor para polova veći od 0,707) Q-faktor para polova je jednak 0,707. Postojanje dva rešenja sa $Q = 0{,}707$ je očigledno i sa slike 2.19.4.

Vrednost kapacitivnosti kondenzatora za drugo rešenje može se približno odrediti na sličan način kao za prvo, odnosno analizom kola drugog reda. Pošto je u ovom slučaju $\omega_{zk} > \omega_2$, geometrijskom mestu polova kompenzovanog pojačavača sa povratnom spregom u funkciji konstante kružnog pojačanja pripada deo realne ose između $-\omega_1$ i $-\omega_2$, kao i deo između $-\omega_{zk}$ i $-\omega_{pk}$. To znači da polovi $-\omega_1$ i $-\omega_2$ kreću jedan drugome u susret, a zatim formiraju konjugovano-kompleksni par. Kada postoji konjugovano-kompleksni par, treći pol je na segmentu između $-\omega_{zk}$ i $-\omega_{pk}$, dakle $|s_{p1}| > \omega_{zk}$. Pošto je proizvod polova približno jednak:

$$800\omega_2^2\omega_{zk} = |s_{p1}|\cdot|s_{p2,3}|^2 = |s_{p1}|\cdot\frac{|s_{p2}+s_{p3}|^2}{2}, \qquad (2.19.15)$$

sledi:

$$|s_{p2}+s_{p3}| = 40\omega_2\sqrt{\frac{\omega_{zk}}{|s_{p1}|}}. \qquad (2.19.16)$$

Zbir polova je približno $-(\omega_2+\omega_{pk})$, pa je:

$$|s_{p1}| \cong \omega_2+\omega_{pk}-|s_{p2}+s_{p3}| = \omega_2+\omega_{pk}-40\omega_2\sqrt{\frac{\omega_{zk}}{|s_{p1}|}}, \qquad (2.19.17)$$

odnosno:

$$|s_{p1}| > \omega_{pk}-40\omega_2 > \omega_{pk}-40\omega_{zk} = 40\omega_{zk}. \qquad (2.19.18)$$

Sada je:

$$\begin{aligned} |s_{p1}| &> \omega_2+\omega_{pk}-40\omega_2\sqrt{\frac{\omega_{zk}}{40\omega_{zk}}} \\ &= \omega_2+\omega_{pk}-\sqrt{40}\omega_2 > 80\omega_{zk}-\sqrt{40}\omega_{zk} = 73{,}67\omega_{zk} \end{aligned}, \qquad (2.19.19)$$

tj.:

$$|s_{p1}| > \omega_2+\omega_{pk}-40\omega_2\sqrt{\frac{\omega_{zk}}{73{,}67\omega_{zk}}} = \omega_2+\omega_{pk}-4{,}66\omega_2 > 75{,}34\omega_{zk}. \qquad (2.19.20)$$

Posle nekoliko iteracija je očigledno da realan pol koji kreće iz $-\omega_{pk}$ još uvek ostaje nedominantan kada konjugovano-kompleksni par dostigne zadate vrednosti, pošto je zbir $|s_{p2}+s_{p3}| \cong 4{,}66\omega_2 < 4{,}66\omega_{zk} \ll |s_{p1}|$. Stoga je njegov uticaj zanemarljiv, pa preostaje da se analizira problem drugog reda sa dva pola i jednom nulom. Pošto je $|s| \ll \omega_{pk} = 80\omega_{zk}$ za sve vrednosti do $|s| \sim |s_{p2,3}|$, kružno pojačanje je približno:

$$A\beta(s) \cong 800\omega_2^2\frac{(s+\omega_{zk})}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)80\omega_{zk}}. \qquad (2.19.21)$$

Za ovakvo kružno pojačanje karakteristična jednačina kola sa povratnom spregom je:

$$(s+\omega_1)(s+\omega_2)+\frac{10\omega_2^2}{\omega_{zk}}(s+\omega_{zk}) = 0, \qquad (2.19.22)$$

tj.:

$$s^2+\left(\omega_1+\omega_2+\frac{10\omega_2^2}{\omega_{zk}}\right)s+\omega_1\omega_2+10\omega_2^2 \cong s^2+\left(\omega_2+\frac{10\omega_2^2}{\omega_{zk}}\right)s+10\omega_2^2 = 0. \qquad (2.19.23)$$

Pošto poteg polova treba da bude jednak $0{,}707\,\text{Mrad/s} = \sqrt{10\omega_2^2}$, sledi da je $\omega_2 = 223{,}6\,\text{krad/s}$. Zbir polova je $-1\,\text{Mrad/s} = -\left(\omega_2 + 10\omega_2^2/\omega_{-k}\right)$, odakle se uvrštavanjem vrednosti za ω_2 dobija $\omega_{-k} = 644\,\text{krad/s}$ a zatim $C = 1/(R_2\omega_{-k}) = 19{,}65\,\text{pF}$.

U cilju provere tačnosti rezultata može da se izračuna učestanost realnog pola $|s_{p1}| \cong \omega_2 + \omega_{pk} - |s_{p2} + s_{p3}| = 50{,}744\,\text{Mrad/s}$, a zatim proizvod potega polova $0{,}5 \cdot 50{,}744\,(\text{Mrad/s})^3 = 25{,}372\,(\text{Mrad/s})^3$. Sa druge strane, u karakterističnoj jednačini (2.19.10) vrednost proizvoda je približno $800\omega_2^2\omega_{-k} = 25{,}7\,(\text{Mrad/s})^3$, što znači da je tačnost zadovoljavajuća.

d) Za traženu faznu marginu kompenzacioni pol treba da bude jednak jediničnoj učestanosti kružnog pojačanja (pošto su učestanosti nule i druga dva pola mnogo manje):

$$20\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{\omega_{pk}}{\omega_2} = 20\text{dB} + 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{\omega_2}{\omega_{-k}} \Rightarrow \omega_{pk} = \sqrt{800}\omega_2 \qquad (2.19.24)$$

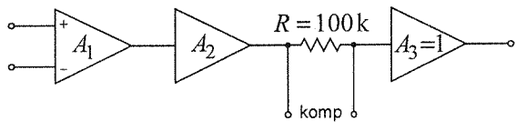
Pošto je potrebna vrednost ω_{pk} $\sqrt{2}$ puta manja u odnosu na vrednost u prvom rešenju pod c), vrednost kapacitivnosti će biti $\sqrt{2}$ puta veća, tj. $C = 1{,}432\ \text{nF}$.

2.20. Na slici 2.20.1 je prikazan trostepeni operacioni pojačavač koji ima izvedene priključke za spoljašnju kompenzaciju. Amplitudska karakteristika je dvopolna. Izlazni stepen ima jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg. Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je 100 dB.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100, u odzivu na jediničnu Hevisajdovu funkciju javlja se veliko premašenje sa oscilacijama učestanosti 1MHz koje se veoma sporo smiruju. Smatrati da su učestanosti polova mnogo manje od učestanosti jediničnog pojačanja.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 1000, fazna margina kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimativnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja.

Kompenzovati operacioni pojačavač poklapajući nulom kompenzacionog kola pol pojačavača, koristeći priključke za kompenzaciju i kompenzacione elemente po potrebi, tako da pojačavač pojačanja 100 napravljen od kompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika ima faznu marginu kružnog pojačanja jednaku $\pi/4$. Izbor načina kompenzacije vršiti tako da propusni opseg pojačavača bude približno jednak 1MHz.



Slika 2.20.1.

Rešenje:

Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je jednako $A_0 = 10^5$, što odgovara zadatom nivou od 100 dB. Za pojačavač, napravljen od operacionog pojačavača i dva otpornika, koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100 faktor povratne sprege je jednak $\beta = 0{,}01$. Dakle, kod ovog pojačavača je $A_0\beta = A\beta(0) = 10^3$. Na sličan način kao u rešenju zadatka 2.5 može se pokazati da je pri datim uslovima $f_{c0,01} \cong f_{osc} = 1\text{MHz}$.

Ako se napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 1000, faktor povratne sprege iznosi 0,001, pa je amplitudska karakteristika kružnog pojačanja spuštena za 20 dB u odnosu na prethodni slučaj. Pošto je fazna margina manja od $\pi/4$, nova jedinična učestanost $f_{c0,001}$ je veća od f_2 (videti rešenje zadatka 2.4), pa je nagib amplitudske karakteristike kružnog pojačanja u njenoj okolini jednak $-40\,\text{dB/dec}$, kao što se vidi sa slike 2.20.2. Stoga je:

$$\left(\log f_{c0,01} - \log f_{c0,001}\right) = \frac{20\,\text{dB}}{40\,\text{dB/dec}} = \frac{1}{2}[\text{dec}], \qquad (2.20.1)$$

odnosno:

$$f_{c0,001} = 1\text{MHz}/\sqrt{10}\,. \qquad (2.20.2)$$

Kada bi učestanosti polova bile približno jednake, $f_{c0,001}$ bi morala da bude bar 10 puta veća od učestanosti polova, pošto je u ovom slučaju $A_0\beta = 100$. Međutim, tada bi fazna margina bila zanemarljiva, a ne $\pi/8$. Zaključuje se da se učestanosti polova znatno razlikuju, pa se može smatrati da je komponenta fazne karakteristike koja potiče od nižeg pola f_1 na jediničnoj učestanosti $f_{c0,001}$ jednaka $\pi/2$. Sledi (sa Bodeove aproksimacije fazne karakteristike) da je na $f_{c0,001}$ komponenta koja potiče od višeg pola jednaka:

$$\frac{\pi}{4}\left(1 + \log\frac{f_{c0,001}}{f_2}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \text{FM} = \frac{3\pi}{8}. \qquad (2.20.3)$$

Iz (2.20.3) se dobija:

$$\log\frac{f_{c0,001}}{f_2} = \log f_{c0,001} - \log f_2 = \frac{1}{2}[\text{dec}]. \qquad (2.20.4)$$

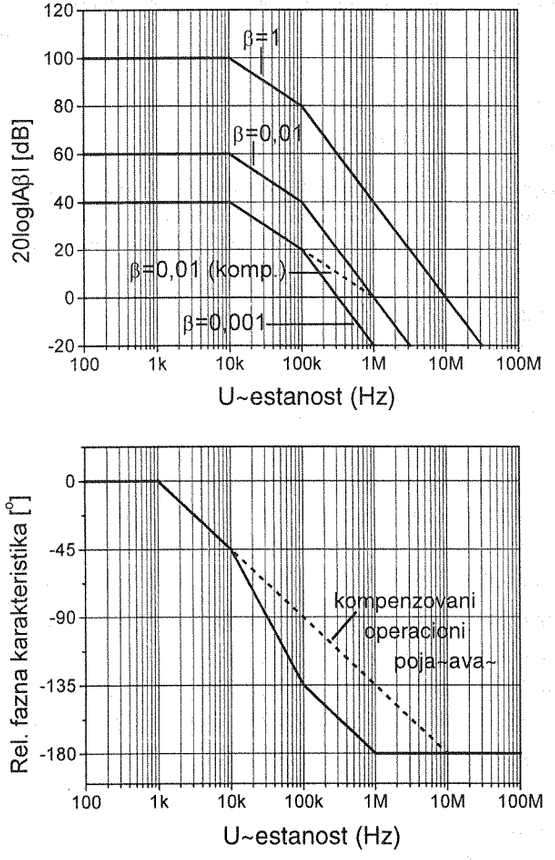
Imajući u vidu gore izračunatu vrednost za $f_{c0,001}$, lako se dobija $f_2 = 100\,\text{kHz}$. Sa Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike, prikazane na slici 2.20.2, vrednost kružnog pojačanja na učestanosti f_1 je:

$$20\log|A_0\beta| = 40\text{dB} = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_2}{f_1} + 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{c0,001}}{f_2}, \qquad (2.20.5)$$

tj.:

$$100 = \frac{f_2}{f_1}\cdot\left(\frac{f_{c0,001}}{f_2}\right)^2. \qquad (2.20.6)$$

Odavde sledi da je $f_1 = 10\,\text{kHz}$.



Slika 2.20.2.

Proverom se može utvrditi da se integralnom kompenzacijom ne mogu zadovoljiti uslovi zadatka postavljeni u četvrtom pasusu. Zahteva se poklapanje pola pojačavača kompenzacionom nulom, što znači da će kružno pojačanje ostati dvopolna funkcija ako je

kompenzaciono kolo prvog reda. Kada se napravi pojačavač sa pojačanjem 100 i primeni diferencijalna kompenzacija, vrednost kružnog pojačanja na niskim učestanostima je jednaka 1000. Za ovakvu vrednost $|A\beta(0)|$, polovi moraju da se znatno razlikuju da fazna margina ne bi bila zanemarljiva, što je objašnjeno u prvom delu ovog rešenja. Stoga je i u ovom slučaju komponenta fazne karakteristike koja potiče od nižeg pola f_{k1} kompenzovanog kružnog pojačanja na jediničnoj učestanosti $f_{ck0,001}$ jednaka $\pi/2$. Da bi fazna margina bila jednaka $\pi/4$, potrebno je da komponenta fazne karakteristike koja potiče od višeg pola f_{k2} na jediničnoj učestanosti $f_{ck0,001}$ bude jednaka $\pi/4$, što znači da f_{k2} treba da se poklapa sa $f_{ck0,001}$. U tom slučaju sa Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike kružnog pojačanja sa diferencijalnom kompenzacijom sledi:

$$20\log|A\beta_k(0)| = 60\text{dB} = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{ck0,001}}{f_{k1}}, \qquad (2.20.7)$$

odakle sledi:

$$f_{k1} = 0{,}001 f_{ck0,001} = 0{,}001 f_{k2}. \qquad (2.20.8)$$

Dakle, odnos učestanosti polova treba kompenzacijom da se poveća sa 10 na 1000. Kod integralnog kompenzatora učestanost pola je manja od učestanosti nule, pa se odnos polova kružnog pojačanja povećava poklapanjem kompenzacione nule i manjeg pola operacionog pojačavača. U tom slučaju biće $f_{k2} = f_{ck0,001} = f_2 = 100\text{kHz}$, pa propusni opseg kompenzovanog pojačavača sigurno ne može da bude približno 1MHz.

Učestanosti nule diferencijalnog kompenzatora je manja od učestanosti pola, pa se odnos polova kružnog pojačanja povećava poklapanjem kompenzacione nule i većeg pola operacionog pojačavača, tj. $f_{zk} = f_2 = 100\text{kHz}$. Da bi fazna margina bila jednaka $\pi/4$, drugi pol kompenzovanog kružnog pojačanja, tj. pol kompenzacionog kola, treba da se poklopi sa jediničnom učestanošću $f_{ck0,001}$, koja će u ovom slučaju imati novu vrednost. Kod proračuna ove vrednosti, mora se uzeti u obzir da kompenzaciono kolo unosi slabljenje u pojačanje operacionog pojačavača koje je jednako odnosu kompenzacionog pola i nule, zbog otpornika R_k od ulaza trećeg stepena do mase (videti sliku 2.20.3 na kojoj je prikazan kompenzovani operacioni pojačavač). Dakle:

$$\begin{aligned} 60\text{dB} - 20\log\frac{f_{pk}}{f_{zk}} &= 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{ck0,001}}{f_{k1}} \\ = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_{pk}}{f_1} &= 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{f_2\cdot f_{pk}}{f_{zk}\cdot f_1}. \end{aligned} \qquad (2.20.9)$$

Iz ove jednačine sledi:

$$1000 = \frac{f_2}{f_1}\cdot\left(\frac{f_{pk}}{f_{zk1}}\right)^2 = 10\cdot\left(\frac{f_{pk}}{f_{zk1}}\right)^2, \qquad (2.20.10)$$

tj.:

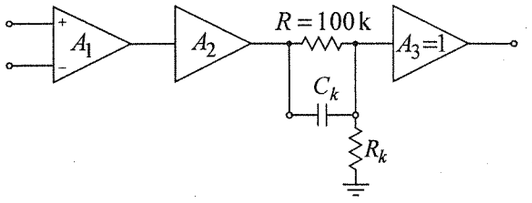
$$f_{ck0,001} = f_{k2} = f_{pk} = 10 f_{zk} = 10 f_2 = 1\text{MHz}. \qquad (2.20.11)$$

Time je ujedno zadovoljen uslov da propusni opseg bude približno jednak 1MHz.

Pošto je za kompenzaciono kolo sa slike 2.20.3:

$$f_{pk} = \frac{R + R_k}{2\pi \cdot R R_k C_k} \text{ i } f_{zk} = \frac{1}{2\pi \cdot R C_k} = 0{,}1 f_{pk}, \qquad (2.20.12)$$

iz izračunatih vrednosti za f_{pk} i f_{zk} i zadate vrednosti $R = 100\,\text{k}\Omega$ lako se određuje $C_k = 15{,}92\,\text{pF}$ i $R_k = 11{,}11\,\text{k}\Omega$.



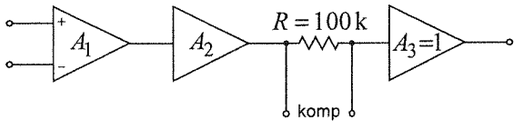
Slika 2.20.3.

2.21. Na slici 2.21.1 je prikazan trostepeni operacioni pojačavač koji ima izvedene priključke za spoljašnju kompenzaciju. Amplitudska karakteristika je dvopolna. Izlazni stepen ima jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg. Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je 100 dB.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100, u odzivu na jediničnu Hevisajdovu funkciju javlja se veliko premašenje sa oscilacijama učestanosti 1 MHz koje se veoma sporo smiruju. Smatrati da su učestanosti polova mnogo manje od učestanosti jediničnog pojačanja.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 1000, fazna margina kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$ (posmatrano na Bodeovoj aproksimativnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja).

Kompenzovati operacioni pojačavač poklapajući nulom kompenzacionog kola pol pojačavača, koristeći priključke za kompenzaciju i kompenzacione elemente po potrebi, tako da pojačavač pojačanja 100 napravljen od kompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika ima faznu marginu kružnog pojačanja jednaku $\pi/3$ (posmatrano na tačnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja). Koristiti diferencijalnu kompenzaciju.



Slika 2.21.1.

Rešenje:

Zadatak je veoma sličan zadatku 2.20. Razlika je u eksplicitno traženoj diferencijalnoj kompenzaciji i u vrednosti potrebne fazne margine kompenzovanog pojačavača. Prema tome, na isti način kao u rešenju zadatka 2.20 određuju se učestanosti polova $f_2 = 100\,\text{kHz}$ i $f_1 = 10\,\text{kHz}$. Sem toga, i ovde se zahteva poklapanje pola pojačavača kompenzacionom nulom, što znači da će kružno pojačanje ostati dvopolna funkcija ako je kompenzaciono kolo prvog reda. Kada se napravi pojačavač sa pojačanjem 100, vrednost kružnog pojačanja na niskim učestanostima je jednaka 1000. Za ovakvu vrednost $|A\beta(0)|$, polovi moraju da se znatno razlikuju da fazna margina ne bi bila zanemarljiva. Diferencijalnom kompenzacijom rastojanje između polova može da se poveća ako se kompenzacionom nulom poništi drugi pol nekompenzovanog kružnog pojačanja. Kompenzacioni pol tada postaje drugi pol kompenzovanog kružnog pojačanja. Pošto je zadata fazna margina od $\pi/3$ $(>\pi/4)$, jedinična učestanost kompenzovanog kružnog pojačanja f_{ck} treba da bude manja od učestanosti drugog pola. Stoga je:

$$20\log|A_0\beta| = 20\log 1000 = 60\,\text{dB} = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \cdot \log\frac{f_{ck}}{f_1}; \qquad (2.21.1)$$

$$\log f_{ck} - \log f_1 = 3\,\text{dec}. \qquad (2.21.2)$$

Zbog velikog rastojanja $\log f_{ck}$ i $\log f_1$, doprinos prvog pola ukupnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja na jediničnoj učestanosti jednak je $\pi/2$, pa komponenta koja potiče od kompenzacionog pola f_{pk} treba da bude jednaka $\pi/6$ da bi fazna margina bila $\pi/3$, tj. $\text{arctg}(f_{ck}/f_{pk}) = 30°$, dakle $f_{ck} = f_{pk}/\sqrt{3}$. Stoga treba da bude $f_{pk} = \sqrt{3} f_{ck} = \sqrt{3} \cdot 1000 f_1 = 17{,}3\,\text{MHz}$. Pošto je $f_{zk} = f_2 = 100\,\text{kHz}$, uz pomoć zadate vrednosti $R = 100\,\text{k}\Omega$ i izraza (2.20.12) iz zadatka 2.20 lako se izračunavaju elementi kompenzacionog kola koje se realizuje kao na slici 2.20.3:

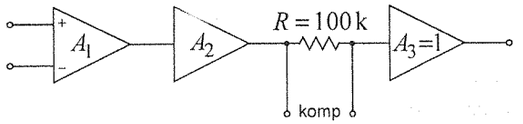
$$C_k = \frac{1}{2\pi f_{zk} R} = 15{,}92\,\text{pF} \text{ i } R_k = \frac{R}{\frac{f_{pk}}{f_{zk}} - 1} = 581{,}4\,\Omega. \qquad (2.21.3)$$

2.22. Na slici 2.22.1 je prikazan trostepeni operacioni pojačavač koji ima izvedene priključke za spoljašnju kompenzaciju. Amplitudska karakteristika je dvopolna, pri čemu je jedan pol na vrlo niskim učestanostima. Izlazni stepen ima jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača napravi jedinični neinvertujući pojačavač, jedinična učestanost kružnog pojačanja je $f_{c1}=10\,\mathrm{MHz}$, a fazna margina je približno nula.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100, fazna margina kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimativnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja.

Kompenzovati operacioni pojačavač poklapajući nulom kompenzacionog kola pol pojačavača, koristeći priključke za kompenzaciju i kompenzacione elemente po potrebi, tako da pojačavač pojačanja 10 napravljen od kompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika ima faznu marginu kružnog pojačanja jednaku $\pi/4$. Izbor načina kompenzacije vršiti tako da približni propusni opseg pojačavača bude veći od 1MHz.



Slika 2.22.1.

Rešenje:

Zadatak je sličan zadatku 2.20. Na osnovu trećeg pasusa teksta zadatka sledi da je u slučaju primene nekompenzovanog operacionog pojačavača za pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100 jedinična učestanost kružnog pojačanja za pola dekade viša od učestanosti višeg pola (videti rešenje zadatka 2.12). Pošto je nagib amplitudske karakteristike kružnog pojačanja iznad učestanosti drugog pola jednak $-40\,\mathrm{dB/dec}$, a karakteristika je spuštena za 40dB (u odnosu na amplitudsku karakteristiku kružnog pojačanja jediničnog pojačavača):

$$20\log\frac{1}{\beta}=40\,\mathrm{dB}=-40\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}\cdot\log\frac{f_{c0,01}}{f_{c1}}, \qquad (2.22.1)$$

sledi da je u ovom slučaju jedinična učestanost jednaka $f_{c0,01}=0{,}1f_{c1}=1\,\mathrm{MHz}$. Stoga je viši pol pojačavača na učestanosti $f_2=f_{c1}/\sqrt{10}=316{,}23\,\mathrm{kHz}$. Na toj učestanosti u ovom slučaju kružno pojačanje iznosi 20dB.

Kod pojačavača koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 10, bez primene kompenzacije vrednost kružnog pojačanja bi na f_2 iznosila 40dB. Nije teško proveriti da se integralnom kompenzacijom ne može obezbediti približna vrednost propusnog opsega pojačavača veća od 1MHz. Naime, kod integralnog kompenzatora

učestanost pola je manja od učestanosti nule, pa je potrebno da se nulom poništi niži pol nekompenzovanog pojačavača da bi se ostvarila tražena fazna margina od $\pi/4$ (videti rešenje zadatka 2.4). U tom slučaju drugi pol kompenzovanog kružnog pojačanja ostaje na $f_2=316{,}23\,\mathrm{kHz}$, a toliko iznosi i jedinična učestanost za traženu faznu marginu, zbog čega propusni opseg ima znatno manju vrednost od potrebne.

Diferencijalnom kompenzacijom mogu se ispuniti zadati uslovi. Kompenzaciono kolo izgleda kao na slici 2.20.3. Nulom treba da se poništi viši pol pojačavača, tj. $f_{zk}=316{,}23\,\mathrm{kHz}$. Da bi fazna margina bila $\pi/4$, drugi pol kompenzovanog kružnog pojačanja, tj. pol kompenzacionog kola, treba da bude jednak jediničnoj učestanosti. Zbog otpornika R_k priključenog između ulaza trećeg stepena i mase, kompenzaciono kolo unosi slabljenje u pojačanje operacionog pojačavača i u kružno pojačanje. Slabljenje je jednako odnosu kompenzacione nule i pola. Stoga je na f_2 vrednost kružnog pojačanja u kompenzovanom slučaju $40\,\mathrm{dB}-20\log\left(f_{pk}/f_{zk}\right)$. Pošto je između f_{zk} (tj. f_2) i f_{pk} nagib amplitudske karakteristike kružnog pojačanja jednak $-20\,\mathrm{dB/dec}$, sledi da je:

$$40\,\mathrm{dB}-20\log\frac{f_{pk}}{f_{zk}}=20\cdot\log\frac{f_{pk}}{f_{zk}}, \qquad (2.22.2)$$

tj.:

$$f_{pk}=10f_{zk}=10f_2=3{,}16\,\mathrm{MHz}. \qquad (2.22.3)$$

Odavde se lako određuje da je:

$$R_k=\frac{R}{\left(\frac{f_{pk}}{f_{zk}}-1\right)}=\frac{R}{9}=11{,}11\,\mathrm{k\Omega}\ \text{i}\ C_k=\frac{1}{2\pi f_{zk}R}=5{,}033\,\mathrm{pF}. \qquad (2.22.4)$$

2.23. Na slici 2.23.1 je prikazan trostepeni operacioni pojačavač koji ima izvedene priključke za spoljašnju kompenzaciju. Amplitudska karakteristika je dvopolna. Izlazni stepen ima jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg. Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je 120dB.

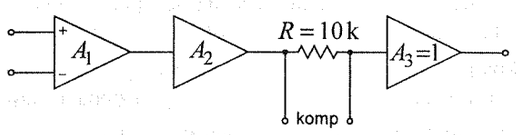
Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 10, u odzivu na jediničnu Hevisajdovu funkciju javlja se veliko premašenje sa oscilacijama učestanosti 1Mrad/s koje se veoma sporo smiruju.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100, fazna margina kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimativnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja.

Kompenzovati operacioni pojačavač koristeći priključke za kompenzaciju i kompenzacione elemente po potrebi. Kompenzacija treba da obezbedi da neinvertujući pojačavač, napravljen od kompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika u kolu

povratne sprege, ima vremensku konstantu smirivanja odziva na jediničnu Hevisajdovu funkciju jednaku $2\mu s$, za sve vrednosti odnosa otpornika u kolu povratne sprege pri kojima je odziv oscilatornog karaktera.

Odrediti pojačanje ovog neinvertujućeg pojačavača pri niskim učestanostima, tako da margina faze kružnog pojačanja bude $\pi/4$.



Slika 2.23.1.

Rešenje:

Na osnovu drugog pasusa teksta zadatka sledi da je u slučaju primene nekompenzovanog operacionog pojačavača za pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 10 jedinična učestanost kružnog pojačanja jednaka $\omega_{c0,1} = 1\,\text{Mrad/s}$ (videti rešenje zadatka 2.5), a fazna margina gotovo nula, što znači da su oba pola znatno niže od $1\,\text{Mrad/s}$. U ovom slučaju, vrednost kružnog pojačanja na niskim učestanostima je 100000 (120 dB - 20 dB).

Na osnovu trećeg pasusa teksta zadatka sledi da je u slučaju primene nekompenzovanog operacionog pojačavača za pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100 jedinična učestanost kružnog pojačanja $\omega_{c0,01}$ za pola dekade viša od učestanosti višeg pola, kao i da su polovi vrlo razmaknuti (videti rešenje zadatka 2.12). Sem toga je:

$$\left|A\beta\left(j\omega_2\right)\right| = 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{c0,01}}{\omega_2} = 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\frac{1}{2}\text{dec} = 20\,\text{dB}. \qquad (2.23.1)$$

Amplitudska karakteristika kružnog pojačanja je smanjena za 20 dB u odnosu na karakteristiku kružnog pojačanja za pojačavač pojačanja jednakog 10. Pošto je fazna margina manja od $\pi/4$, nagib amplitudske karakteristike kružnog pojačanja između učestanosti drugog pola i jedinične učestanosti je $-40\,\text{dB/dec}$, pa sledi:

$$20\,\text{dB} = 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{c0,1}}{\omega_2} - 40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{c0,01}}{\omega_2}, \qquad (2.23.2)$$

tj.:

$$\log\omega_{c0,1} - \log\omega_{c0,01} = 1/2\,\text{dec}. \qquad (2.23.3)$$

Dakle:

$$\log\omega_{c0,1} - \log\omega_2 = 1\,\text{dec} \Rightarrow \omega_2 = 0{,}1\omega_{c0,1} = 100\,\text{krad/s}. \qquad (2.23.4)$$

Sa Bodeove amplitudske karakteristike kružnog pojačanja za pojačavač sa pojačanjem jednakim 100 je nivo amplitudske karakteristike na učestanosti ω_1:

$$20\log\left|A_0\beta\right| = 80\,\text{dB} = 20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_2}{\omega_1} + 20\,\text{dB}, \qquad (2.23.5)$$

tj.:

$$\omega_1 = \omega_2/10^3 = 100\,\text{rad/s}. \qquad (2.23.6)$$

Vremenska konstanta smirivanja odziva na jediničnu Hevisajdovu funkciju pojačavača sa povratnom spregom jednaka je recipročnoj vrednosti realnog dela polova. Da bi ona bila nezavisna od konstante kružnog pojačanja (za sve vrednosti odnosa otpornika u kolu povratne sprege pri kojima je odziv oscilatornog karaktera) geometrijsko mesto polova sa povratnom spregom van realne ose treba da predstavlja pravu paralelnu sa imaginarnom osom. Dakle, kružno pojačanje treba da ima dva realna konačna pola (nule treba da budu u beskonačnosti, da zbir polova sa povratnom spregom ne bi zavisio od konstante kružnog pojačanja). Da bi vremenska konstanta smirivanja odziva bila jednaka $2\mu s$, aritmetička sredina polova kružnog pojačanja treba da bude $1/(2\mu s) = 500\,\text{krad/s}$. Pošto polovi nekompenzovanog pojačavača ne zadovoljavaju ovaj uslov, jedan od polova treba kompenzacijom "premestiti" na novi položaj na realnoj osi. To se postiže poklapanjem tog pola kompenzacionom nulom i postavljanjem kompenzacionog pola u potreban položaj. Obzirom da zbir učestanosti polova treba povećati, učestanost kompenzacionog pola treba da bude veća od učestanosti nule, što znači da kompenzacija treba da bude diferencijalna,a kompenzaciono kolo izgleda kao na slici 2.20.3. Ako bi se nulom poništio niži, dominantni pol, kompenzacioni pol bi morao da bude na 900 krad/s. Rastojanje kompenzacione nule i pola bi tada bilo skoro četiri dekade. Toliko bi bilo i slabljenje na niskim učestanostima koje u operacioni pojačavač unosi razdelnik kojeg formiraju otpornici R i R_k u kompenzacionom kolu (tj. skoro 80 dB). Stoga bi pojačanje kompenzovanog operacionog pojačavača na niskim učestanostima bilo samo malo veće od 100, što je suviše malo jer ne može da obezbedi dovoljno veliku vrednost $\left|A\beta(0)\right|$ kada se primeni povratna sprega. Ako se viši pol nekompenzovanog operacionog pojačavača poništi kompenzacionom nulom, kompenzacioni pol treba da bude na $999{,}9\,\text{krad/s} \cong 1\,\text{Mrad/s}$. Tada rastojanje kompenzacione nule i pola iznosi samo jednu dekadu, odnosno slabljenje na niskim učestanostima koje unosi kompenzaciono kolo je samo 20 dB, što je prihvatljivo. Dakle, ispravno je postaviti kompenzacionu nulu na $100\,\text{krad/s}$, a kompenzacioni pol na $1\,\text{Mrad/s}$, pa je:

$$C_k = \frac{1}{\omega_{-k}R} = 1\,\text{nF} \text{ i } R_k = \frac{R}{\left(\frac{\omega_{pk}}{\omega_{-k}} - 1\right)} = 1{,}1\,\text{k}\Omega. \qquad (2.23.7)$$

Pošto su učestanosti polova kompenzovanog operacionog pojačavača vrlo različite, jedinična učestanost kružnog pojačanja treba da bude jednaka učestanosti višeg pola, da bi fazna margina bila jednaka $\pi/4$. Nivo pojačanja kompenzovanog operacionog pojačavača na učestanosti kompenzacionog pola ω_{pk} je:

$$20\log A_0\frac{R_k}{R+R_k}-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{pk}}{\omega_1}=100\,\text{dB}-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{1\,\text{Mrad/s}}{100\,\text{rad/s}}=20\,\text{dB}. \qquad (2.23.8)$$

Da bi ω_{pk} bila jedinična učestanost kružnog pojačanja, kolo povratne sprege treba da unosi slabljenje od $20\,\text{dB}$. Dakle, pojačanje pojačavača sa povratnom spregom na niskim učestanostima treba da iznosi $20\,\text{dB}$, da bi fazna margina kružnog pojačanja bila $\pi/4$.

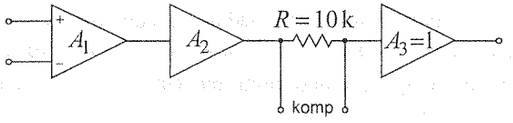
2.24. Na slici 2.24.1 je prikazan trostepeni operacioni pojačavač koji ima izvedene priključke za spoljašnju kompenzaciju. Amplitudska karakteristika je dvopolna. Izlazni stepen ima jedinično pojačanje i veoma širok propusni opseg. Pojačanje operacionog pojačavača na niskim učestanostima je $120\,\text{dB}$.

Ako se od nekompenzovanog operacionog pojačavača napravi jedinični neinvertujući pojačavač, u odzivu na jediničnu Hevisajdovu funkciju javlja se veliko premašenje sa oscilacijama učestanosti $1\,\text{Mrad/s}$ koje se veoma sporo smiruju.

Ako se primenom nekompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika napravi pojačavač koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 10, fazna margina kružnog pojačanja iznosi $\pi/8$, posmatrano na Bodeovoj aproksimativnoj faznoj karakteristici kružnog pojačanja.

Kompenzovati operacioni pojačavač koristeći priključke za kompenzaciju i kompenzacione elemente po potrebi. Kompenzacija treba da obezbedi da neinvertujući pojačavač, napravljen od kompenzovanog operacionog pojačavača i dva otpornika u kolu povratne sprege, ima vremensku konstantu smirivanja odziva na jediničnu Hevisajdovu funkciju jednaku $2\,\mu\text{s}$, za sve vrednosti odnosa otpornika u kolu povratne sprege pri kojima je odziv prigušeno oscilatornog karaktera.

Odrediti pojačanje ovog neinvertujućeg pojačavača pri niskim učestanostima, tako da mu amplitudska karakteristika bude maksimalno ravna u koordinatnom početku.



Slika 2.24.1.

Rešenje:

Zadatak je veoma sličan zadatku 2.23. Razlika je u vrednostima pojačanja za dve varijante sa nekompenzovanim operacionim pojačavačem i u uslovu koji treba da zadovolji pojačavač sa kompenzovanim operacionim pojačavačem.

Iako su obe vrednosti pojačanja sa povratnom spregom ovde 10 puta manje od odgovarajućih u zadatku 2.23, analiza se vrši na isti način i daje isti rezultat, tj. učestanost

drugog pola je 10 puta manja od jedinične učestanosti kružnog pojačanja za varijantu sa zanemarljivom faznom marginom (u ovom slučaju to je jedinični pojačavač):

$$\log\omega_{c1}-\log\omega_2=1\,\text{dec}\Rightarrow\omega_2=0{,}1\omega_{c1}=100\,\text{krad/s}. \qquad (2.24.1)$$

Sem toga je:

$$\left|A\beta\left(j\omega_2\right)\right|=40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{c0,1}}{\omega_2}=40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\frac{1}{2}\text{dec}=20\,\text{dB}. \qquad (2.24.2)$$

Sa Bodeove aproksimacije amplitudske karakteristike kružnog pojačanja za pojačavač sa pojačanjem jednakim 10 je:

$$20\log\left|A_0\beta\right|=100\,\text{dB}=20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_2}{\omega_1}+20\text{dB}, \qquad (2.24.3)$$

tj.:

$$\omega_1=\omega_2/10^4=10\,\text{rad/s}. \qquad (2.24.4)$$

Da bi vremenska konstanta smirivanja odziva bila jednaka $2\,\mu\text{s}$, aritmetička sredina polova kružnog pojačanja treba da bude $1/(2\,\mu\text{s})=500\,\text{krad/s}$. Sa istim obrazloženjem kao u zadatku 2.23, to se postiže poništavanjem višeg pola nekompenzovanog operacionog pojačavača kompenzacionom nulom i postavljanjem kompenzacionog pola na učestanost $1\,\text{Mrad/s}$. Kompenzaciono kolo je iste topologije kao u zadatku 2.23, a i učestanosti kompenzacione nule i pola kao i vrednost otpornika R, pa su potrebne iste vrednosti $C_k=1/(\omega_{-k}R)=1\,\text{nF}$ i $R_k=R/\left(\omega_{pk}/\omega_{-k}-1\right)=1{,}1\,\text{k}\Omega$.

Pošto su učestanosti polova kompenzovanog operacionog pojačavača vrlo različite, jedinična učestanost kružnog pojačanja treba da bude upola manja od učestanosti višeg pola ω_{pk}, da bi pojačavač sa povratnom spregom imao maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku (videti rešenje zadatka 2.5). Nivo pojačanja kompenzovanog operacionog pojačavača na učestanosti kompenzacionog pola ω_{pk} je:

$$20\log A_0\frac{R_k}{R+R_k}-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{\omega_{pk}}{\omega_1}=100\,\text{dB}-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\cdot\log\frac{1\,\text{Mrad/s}}{10\,\text{rad/s}}=0\,\text{dB}. \qquad (2.24.5)$$

Da bi ω_{pk} bila jedinična učestanost kružnog pojačanja, kolo povratne sprege treba da unosi slabljenje od $6\,\text{dB}$. Dakle, nivo pojačanja pojačavača sa povratnom spregom na niskom učestanostima treba da iznosi $6\,\text{dB}$, da bi mu amplitudska karakteristika bila maksimalno ravna.

2.25. Operacioni pojačavač se sastoji iz tri pojačavačka stepena. Prvi stepen je diferencijalni pojačavač sa vrlo širokim propusnim opsegom, napravljen od bipolarnih tranzistora sa $\beta, r_{ce}\to\infty$. Ovaj diferencijalni pojačavač ima strujno ogledalo u kolektorima, a polarisan je izvorom konstantne struje $I_0=50\,\mu\text{A}$. Drugi stepen ima vrlo veliku ulaznu otpornost i pojačanje napona, a treći stepen je pojačavač velikih signala sa velikim propusnim opsegom, naponskim pojačanjem jednakim jedinici i izlaznom

СУЭТФ

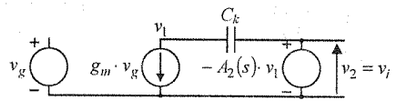
otpornošću od 100Ω. Operacioni pojačavač ima priključke za kompenzaciju u kolu lokalne povratne sprege drugog stepena.

a) Odrediti potrebnu kapacitivnost C_k koju treba priključiti između kompenzacionih priključaka da bi jedinična učestanost operacionog pojačavača bila $\omega_T = 10\,\text{Mrad/s}$, ako se zna da je pri ovolikoj vrednosti fazna margina kružnog pojačanja jediničnog neinvertujućeg pojačavača, napravljenog od ovog operacionog pojačavača, jednaka $\pi/2$.

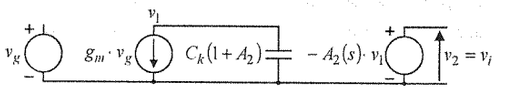
b) Od ovako kompenzovanog operacionog pojačavača primenom otporne povratne sprege je napravljen neinvertujući pojačavač sa pojačanjem na niskim učestanostima jednakim 100. Ako je ovaj pojačavač opterećen kondenzatorom kapacitivnosti $C_p = 100\,\text{nF}$, odrediti vrednost dodatnog kompenzacionog elementa koji treba priključiti između kompenzacionih priključaka zajedno sa C_k određenim pod a), tako da fazna margina kružnog pojačanja bude jednaka $\pi/2$. Smatrati da kolo povratne sprege ne opterećuje izlaz pojačavača.

Rešenje:

a) Izlazna otpornost diferencijalnog pojačavača je beskonačna, a njegova transkonduktansa jednaka je transkonduktansi svakog od tranzistora (zbog strujnog ogledala), tj. $g_m = (I_o/2)/V_T = 1\text{mS}$. Drugi stepen je invertujući, pošto operacioni pojačavač ima priključke za kompenzaciju u kolu lokalne povratne sprege drugog stepena. Ekvivalentna šema kompenzovanog operacionog pojačavača prikazana je na slici 2.25.1. Primenom Milerove teoreme ekvivalentna šema sa slike 2.25.1 može da se transformiše u šemu sa slike 2.25.2. Pri tome je uticaj Milerovog efekta prikazan samo na ulazu pojačavača A_2, pošto je izlazni zavisni naponski generator idealan pa Milerov efekat ne utiče na vrednost izlaznog napona. Za kolo sa slike 2.25.2 važi sledeća prenosna funkcija:



Slika 2.25.1.



Slika 2.25.2.

$$A_{komp}(s) = \frac{g_m A_2}{sC_k(1+A_2)} \cong \frac{g_m}{sC_k} \qquad (2.25.1)$$

Pošto se radi o prenosnoj funkciji integratora, fazna margina je jednaka $\pi/2$. Na ω_T vrednost modula ovog pojačanja jednaka je jedinici, iz čega sledi da je $C_k = g_m/\omega_T = 100\,\text{pF}$.

b) Kada se pojačavač sa povratnom spregom koji ima pojačanje na niskim učestanostima jednako 100 optereti kondenzatorom kapacitivnosti $C_p = 100\,\text{nF}$, kružno

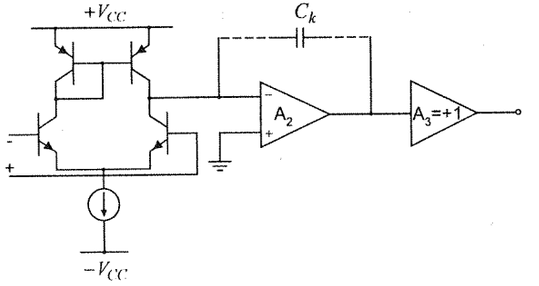
pojačanje pored pola integratora ima i pol čija je učestanost $\omega_{p2} = 1/(R_i C_p) = 10^5\,\text{rad/s}$. Pošto u ovom slučaju faktor povratne sprege iznosi 0,01, karakteristika kružnog pojačanja je spuštena za 40dB u odnosu na slučaj pod a), pa se jedinična učestanost kružnog pojačanja nalazi približno na istoj učestanosti, tj. na $\omega_{c0,01} = 10^5\,\text{rad/s}$. Stoga je fazna margina bez dodatne kompenzacije jednaka $\pi/4$. Da bi fazna margina i u ovom slučaju bila $\pi/2$, potrebno je pol ω_{p2} poništiti kompenzacionom nulom. To se ostvaruje vezivanjem redne veze C_k i R_k na kompenzacione priključke. Pošto je učestanost kompenzacione nule jednaka $\omega_{-k} = 1/(R_k C_k) = 10^5\,\text{rad/s}$, vrednost kompenzacionog otpornika treba da bude $R_k = R_i C_p / C_k = 100\,\text{k}\Omega$.

Napomena: Poništavanjem nule i pola $\omega_{-k} = \omega_{p2}$ dobija se integratorska karakteristika kružnog pojačanja, tj. fazna karakteristika kružnog pojačanja jednaka je $\pi/2$ za sve učestanosti, pa je i fazna margina jednaka $\pi/2$ za sve vrednosti faktora povratne sprege.

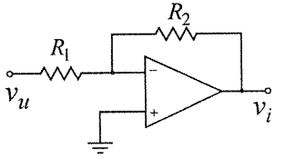
2.26. a) Na slici 2.26.1.a prikazan je operacioni pojačavač kompenzovan dominantnim polom pomoću kondenzatora C_k, pri čemu je $A_2 = \text{const.} \gg 1$.

Izvesti izraz i izračunati graničnu učestanost u slučaju da je pojačavač vezan kao jedinični invertor ($R_1 = R_2 = R$) sa slike 2.26.1.b, $C_k = 30\,\text{pF}$, a ekvivalentna strmina diferencijalnog pojačavača je $g_m = 200\mu\text{A/V}$.

b) Kolika treba da bude kompenzaciona kapacitivnost u slučaju da je operacioni pojačavač vezan kao na slici 2.26.1.b, a $R_2 = 9R_1$, pa da granična učestanost ostane nepromenjena (ako je izvor napona v_u idealan)?



Slika 2.26.1.a.



Slika 2.26.1.b.

Rešenje:

a) Za kompenzovani operacioni pojačavač sa slike 2.26.1.a važi ekvivalentna šema iz zadatka 2.25 prikazana na slici 2.25.1 i zatim transformisana šema na slici 2.25.2. Stoga je njegovo pojačanje jednako:

$$A_{komp}(s)=\frac{g_m A_2}{sC_k(1+A_2)}\cong\frac{g_m}{sC_k} \qquad (2.26.1)$$

Kada je pojačavač vezan kao jedinični invertor ($R_1=R_2=R$) sa slike 2.26.1.b, pojačanje sa povratnom spregom je:

$$A_r(s)=\frac{v_i(s)}{v_u(s)}=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{A_{komp}(s)\cdot\beta}}=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+\frac{s}{\frac{g_m}{C_k}\cdot\beta}}, \qquad (2.26.2)$$

pa je granična učestanost:

$$\omega_g=\frac{g_m}{C_k}\cdot\beta=\frac{g_m}{2C_k}=3{,}33\,\text{Mrad/s}. \qquad (2.26.3)$$

b)

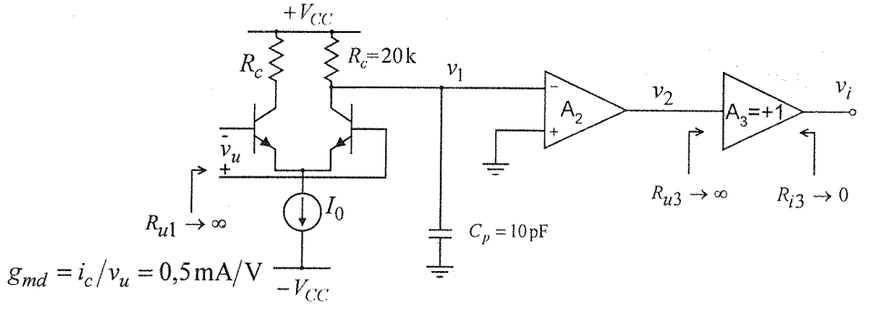
$$\omega_g=\frac{g_m}{C_{kb}}\cdot\beta_b=3{,}33\,\text{Mrad/s}\Rightarrow\frac{\beta}{C_k}=\frac{\beta_b}{C_{kb}}=\frac{0{,}1}{C_{kb}}=\frac{\beta}{5C_{kb}}, \qquad (2.26.4)$$

dakle $C_{kb}=C_k/5=6\,\text{pF}$.

2.27. Na slici 2.27.1 je zadato tipično kolo integrisanog operacionog pojačavača. Parazitna kapacitivnost C_p stvara pol $\omega_{p1}=1/(R_cC_p)$. Drugi pol pojačavača potiče od drugog, naponskog stepena koji ima prenosnu funkciju:

$$A_2(j\omega)=v_2/v_1=A_{20}/(1+j\omega/\omega_{p2}),$$

gde je $\omega_{p2}=10\,\text{krad/s}$, $A_{20}=1000$, $R_{u2}\to\infty$, $R_{i2}\to 0$. Izlazni pojačavački stepen ima pol na veoma visokim učestanostima.



Slika 2.27.1.

Primenom kompenzacionog kondenzatora C_k od ulaza do izlaza drugog stepena, dobija se mogućnost kompenzovanja operacionog pojačavača tehnikom dominantnog pola za čisto otporno kolo povratne sprege. Izračunati vrednost kondenzatora C_k tako da se dobije kompenzacija dominantnim polom sa faznom marginom od $\pi/4$, za jedinični neinvertujući pojačavač sa povratnom spregom.

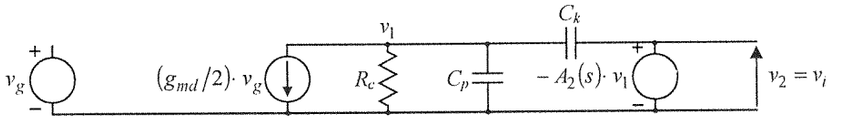
Napomena: Kod primene Milerove teoreme koristiti kompleksan izraz za pojačanje drugog stepena A_2.

Rešenje:

U ekvivalentnoj šemi za male signale nekompenzovanog pojačavača sa slike ulazni diferencijalni stepen može da se predstavi ekvivalentnim zavisnim strujnim generatorom čija je struja jednaka $i_c=g_{md}\cdot v_u$. Ovaj strujni generator je opterećen paralelnom vezom otpornika R_c i kondenzatora C_p. Učestanost pola koji je posledica prisustva kapacitivnosti C_p (to je drugi pol operacionog pojačavača) je:

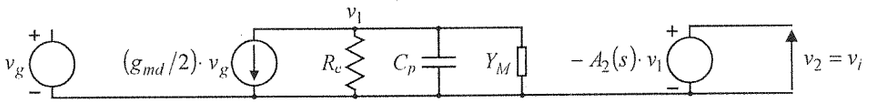
$$\omega_{p1}=1/(R_cC_p)=1/(20\text{k}\Omega\cdot 10\text{pF})=5\,\text{Mrad/s} \qquad (2.27.1)$$

Ako se drugi pojačavački stepen u šemi za male signale predstavi ekvivalentnim idealnim naponski kontrolisanim naponskim generatorom, i ako se treći stepen zbog jediničnog pojačanja (i beskonačne ulazne i nulte izlazne otpornosti) izostavi, ekvivalentna šema operacionog pojačavača ima izgled prikazan na slici 2.27.2. Prikazana ekvivalentna šema odnosi se na kompenzovani operacioni pojačavač, pošto je u njoj prikazan i kompenzacioni kondenzator C_k od ulaza do izlaza drugog stepena.



Slika 2.27.2.

Ekvivalentna šema sa slike 2.27.2 može da se transformiše primenom Milerove teoreme. Pri tome je potrebno odrediti samo uticaj Milerovog efekta na ulazu pojačavača A_2, pošto je izlazni zavisni naponski generator idealan pa Milerov efekat ne utiče na vrednost izlaznog napona. Transformisana ekvivalentna šema je prikazana na slici 2.27.3.



Slika 2.27.3.

Uticaj Milerovog efekta na ulazu pojačavača A_2 predstavljen je admitansom Y_M:

$$Y_M = C_k s \cdot \left[1 + A_2(s)\right] = C_k s \cdot \left(1 + \frac{A_{20}}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}}\right); \tag{2.27.2}$$

$$Y_M = \frac{C_k s \cdot \left(1 + A_{20} + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}} = (1 + A_{20}) \cdot C_k s \cdot \frac{1 + \frac{s}{(1 + A_{20}) \cdot \omega_{p2}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}}. \tag{2.27.3}$$

Za jedinični neinvertujući pojačavač sa povratnom spregom faktor povratne sprege iznosi $\beta = 1$. Ako se ovakav pojačavač napravi od kompenzovanog operacionog pojačavača sa slike, kružno pojačanje je jednako:

$$A\beta_k(s) = -A_k(s) = -\frac{-g_{md}}{\frac{1}{R_c} + C_p s + Y_M} \cdot \frac{-A_{20}}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}}; \tag{2.27.4}$$

$$A\beta_k(s) = \frac{-g_{md}}{\left(\frac{1}{R_c} + C_p s\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right) + (1 + A_{20}) \cdot C_k s \cdot \left[1 + \frac{s}{(1 + A_{20}) \cdot \omega_{p2}}\right]} \cdot \frac{A_{20}}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}}; \tag{2.27.5}$$

$$A\beta_k(s) = \frac{-g_{md} \cdot R_c \cdot A_{20}}{\left(1 + R_c C_p s\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right) + (1 + A_{20}) \cdot R_c C_k s \cdot \left[1 + \frac{s}{(1 + A_{20}) \cdot \omega_{p2}}\right]}; \tag{2.27.6}$$

$$A\beta_k(s) = \frac{-g_{md} \cdot R_c \cdot A_{20}}{1 + s\left\{\frac{1}{\omega_{p2}} + R_c C_p \left[1 + \frac{(1 + A_{20}) \cdot C_k}{C_p}\right]\right\} + \frac{R_c C_p s^2}{\omega_{p2}}\left(1 + \frac{C_k}{C_p}\right)}. \tag{2.27.7}$$

Zbog $A_{20} \gg 1$ i pretpostavljajući da je $A_{20} \cdot C_k \gg C_p$:

$$A\beta_k(s) \cong \frac{-g_{md} \cdot R_c \cdot A_{20}}{1 + \left(\frac{1}{\omega_{p2}} + A_{20} \cdot R_c C_k\right) \cdot s + \left(1 + \frac{C_k}{C_p}\right) \cdot \frac{R_c C_p}{\omega_{p2}} \cdot s^2}. \tag{2.27.8}$$

Proizvod polova kompenzovanog kružnog pojačanja je manji od proizvoda polova nekompenzovanog kružnog pojačanja $\left(1 + C_k / C_p\right)$ puta. Pošto se ovde operacioni pojačavač kompenzuje tehnikom dominantnog pola, jasno je da su polovi kružnog pojačanja realni, a njihove učestanosti međusobno vrlo različite. Stoga se one mogu aproksimativno odrediti korišćenjem Vietovih pravila uz zanemarivanje vremenske konstante nedominantnog pola u odnosu na vremensku konstantu dominantnog. Sledi da su ove učestanosti:

$$\omega_{pk1} \cong \frac{1}{\frac{1}{\omega_{p2}} + A_{20} \cdot R_c C_k} \tag{2.27.9}$$

i:

$$\omega_{pk2} \cong \frac{1}{\omega_{pk1} \cdot \left(1 + \frac{C_k}{C_p}\right) \cdot \frac{R_c C_p}{\omega_{p2}}}. \tag{2.27.10}$$

Da bi fazna margina bila jednaka $\pi/4$ potrebno je da bude zadovoljen uslov:

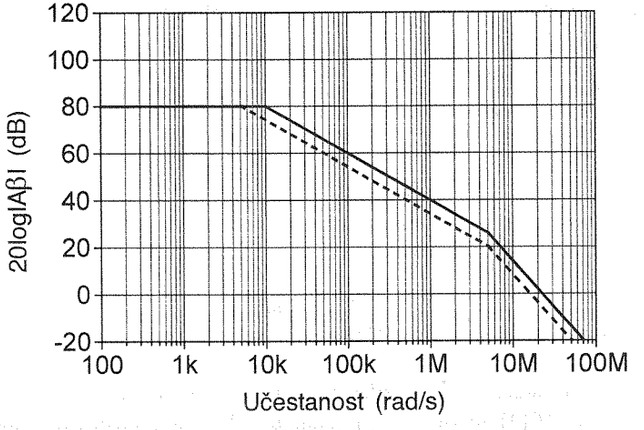
$$\left|A\beta_k(0)\right| \cdot \omega_{pk1} = \omega_{pk2}, \tag{2.27.11}$$

dakle:

$$\frac{g_{md} \cdot R_c \cdot A_{20}}{\frac{1}{\omega_{p2}} + A_{20} \cdot R_c C_k} = \frac{\frac{1}{\omega_{p2}} + A_{20} \cdot R_c C_k}{\left(1 + \frac{C_k}{C_p}\right) \cdot \frac{R_c C_p}{\omega_{p2}}}. \tag{2.27.12}$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine za date brojne vrednosti dobija se jedno pozitivno rešenje $C_k = 9{,}58\,\text{pF}$. Sada se mogu izračunati učestanosti polova $\omega_{pk1} \cong 5{,}13\,\text{krad/s}$ i $\omega_{pk2} \cong 5\,\text{Mrad/s}$. Vidi se da je u ovom slučaju učestanost višeg pola ostala približno nepromenjena.

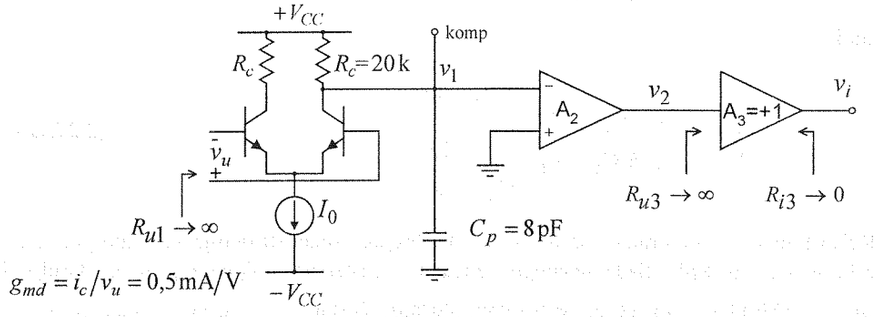
Bodeove aproksimacije amplitudskih karakteristika kružnog pojačanja za nekompenzovan (punom linijom) i kompenzovan pojačavač (isprekidanom linijom) prikazane su na slici 2.27.4.



Slika 2.27.4.

2.28. Na slici 2.28.1 je zadato tipično kolo integrisanog operacionog pojačavača. Parazitna kapacitivnost C_p stvara pol $\omega_{p1} = 1/(R_c C_p)$. Drugi pol pojačavača potiče od drugog, naponskog stepena koji ima prenosnu funkciju $A_2(j\omega) = v_2/v_1 = A_{20}/(1 + j\omega/\omega_{p2})$, gde je $\omega_{p2} = 2\pi \cdot 10^2$ rad/s, $A_{20} = 1000$, $R_{u2} \to \infty$, $R_{i2} \to 0$. Izlazni pojačavački stepen ima pol na veoma visokim učestanostima.

Kompenzovati operacioni pojačavač priključivanjem kompenzacione mreže R_k, C_k na odgovarajući priključak na ulazu drugog stepena, tako da jedinični pojačavač sa povratnom spregom ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku. Nacrtati kompenzacionu mrežu i izračunati elemente. Izračunati propusni opseg jediničnog pojačavača sa povratnom spregom.



Slika 2.28.1.

Rešenje:

Ulazni diferencijalni stepen nekompenzovanog pojačavača sa slike može da se predstavi kao u zadatku 2.27 ekvivalentnim zavisnim strujnim generatorom čija je struja jednaka $i_c = g_{md} \cdot v_u$. Ovaj strujni generator je opterećen paralelnom vezom otpornika R_c i kondenzatora C_p. Učestanost pola koji je posledica prisustva kapacitivnosti C_p (to je drugi pol operacionog pojačavača) je:

$$\omega_{p1} = \frac{1}{R_c C_p} = \frac{1}{20\text{k}\Omega \cdot 8\text{pF}} = 6{,}25\,\text{Mrad/s}, \tag{2.28.1}$$

pa je odnos učestanosti polova jednak:

$$\frac{\omega_{p1}}{\omega_{p2}} = \frac{1}{R_c C_p \omega_{p2}} = \frac{6{,}25\,\text{Mrad/s}}{2\pi \cdot 10^2\,\text{rad/s}} = 9947. \tag{2.28.2}$$

Pošto je i u ovom zadatku uslov zadat za jedinični pojačavač sa povratnom spregom ($\beta = 1$), vrednost $A\beta(0)$ je ista kao u zadatku 2.27, zbog identične šeme za $\omega = 0$: $|A\beta(0)| = g_{md} \cdot R_c \cdot A_{20} = 10^4 > \omega_{p1}/\omega_{p2}$. U zadatku 2.5 je pokazano da pojačavač sa dvopolnom karakteristikom kružnog pojačanja ima maksimalno ravnu amplitudsku

karakteristiku ako je odnos polova kružnog pojačanja jednak $2 \cdot |A\beta(0)|$. Prema tome, kompenzacijom treba povećati odnos polova na ovu vrednost.

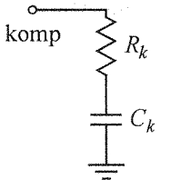
Pojačavač se kompenzuje priključivanjem kompenzacione mreže između priključka za kompenzaciju "komp" i mase. Ako se kao u prethodnom zadatku drugi pojačavački stepen u šemi za male signale predstavi ekvivalentnim idealnim naponski kontrolisanim naponskim generatorom, i ako se treći stepen zbog jediničnog pojačanja (i beskonačne ulazne i nulte izlazne otpornosti) izostavi, ekvivalentna šema kompenzovanog operacionog pojačavača ista je kao šema na slici 2.27.3, pri čemu umesto admitanse Y_M u šemu treba uključiti kompenzacionu mrežu.

Jedna mogućnost je da se kompenzaciona mreža realizuje kao paralelna veza kompenzacionih elemenata R_k i C_k, čime se menja vrednost učestanosti višeg pola:

$$\omega_{pk1} = \frac{1}{(R_c \parallel R_k)(C_p + C_k)}, \tag{2.28.3}$$

ali se istovremeno smanjuje vrednost kružnog pojačanja za $\omega = 0$ na $10^4 \cdot R_k/(R_c + R_k)$. Pošto treba odrediti vrednosti dva kompenzaciona elementa da bi se zadovoljio jedan uslov $\left(\omega_{pk1} = \omega_{pk2} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot R_k/(R_c + R_k) = \omega_{p2} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot R_k/(R_c + R_k)\right)$, očigledno je da postoji neograničen broj rešenja. Rešenje kod kojeg bi se usvojilo $R_k = \infty$, nije moguće, pošto bi se u tom slučaju za neku vrednost $C_k \neq 0$ učestanost višeg pola smanjila, a potrebno je njeno povećanje. Ako se usvoji $C_k = 0$, dobija se $R_k = 47{,}85\,\text{k}\Omega$. Ovo rešenje je u opštem slučaju povoljnije od kombinacije dva elementa $C_k \parallel R_k$, pošto se dodavanjem $C_k \neq 0$ nepotrebno smanjuje učestanost višeg pola i $|A\beta_{komp}(0)|$.

Druga mogućnost je da se kompenzaciona mreža realizuje kao redna veza kompenzacionih elemenata R_k i C_k kao što je prikazano na slici 2.28.2, čime se menjaju vrednosti učestanosti oba pola, a vrednost kružnog pojačanja za $\omega = 0$ se ne smanjuje. Ovakvom kompenzacionom mrežom vrši se razdvajanje polova [6], [7], [8]. Kružno pojačanje u ovom slučaju je:



Slika 2.28.2.

$$A\beta_{komp} = -g_{md} \cdot \frac{\frac{R_c}{1 + R_c C_p s} \cdot \left(R_k + \frac{1}{C_k s}\right)}{\frac{R_c}{1 + R_c C_p s} + R_k + \frac{1}{C_k s}} \cdot \frac{A_{20}}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}}; \tag{2.28.4}$$

$$A\beta_{komp} = \frac{-g_{md} \cdot R_c \cdot A_{20} \cdot (1 + R_k C_k s)}{R_c C_k s + (1 + R_c C_p s)(1 + R_k C_k s)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}}. \tag{2.28.5}$$

Kada se kompenzacionom nulom poništi pol ω_{p2}:

$$A\beta_{komp} = -\frac{g_{md}\cdot R_c\cdot A_{20}}{R_cC_ks+(1+R_cC_ps)(1+R_kC_ks)}. \qquad (2.28.6)$$

Imajući u vidu da je $\omega_{p2}=1/(R_kC_k)$, iz imenioca (2.28.6) se na osnovu Vietovih pravila vidi da je zbir vremenskih konstanti polova veći za R_cC_k u odnosu na slučaj bez kompenzacije, dok je njihov proizvod ostao isti. To znači da je odnos vremenskih konstanti polova, pa stoga i učestanosti polova, veći nego kod nekompenzovanog kružnog pojačanja. Pošto kompenzacija vrši razdvajanje polova, vremenska konstanta dominantnog pola je približno jednaka zbiru vremenskih konstanti oba pola, pa je učestanost dominantnog pola približno jednaka:

$$\omega_{pk1}=\frac{1}{R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k} \qquad (2.28.7)$$

a učestanost višeg pola je:

$$\omega_{pk2}=\frac{1}{R_cC_pR_kC_k\omega_{pk1}}=\frac{R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k}{R_cC_pR_kC_k}. \qquad (2.28.8)$$

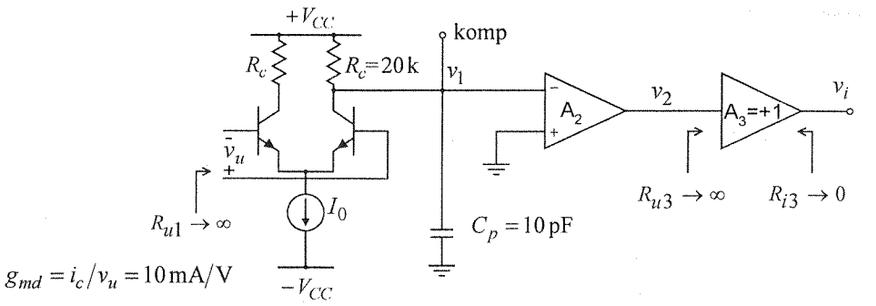
Uslov za maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku u ovom slučaju je:

$$2\cdot 10^4=\frac{\omega_{pk2}}{\omega_{pk1}}=\frac{(R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k)^2}{R_cC_pR_kC_k}. \qquad (2.28.9)$$

Iz ovog uslova i uslova za poništavanje kompenzacione nule i pola ω_{p2} izračunava se $C_k=33{,}26$ nF i $R_k=47{,}85$ kΩ. Iz dobijenog rezultata za R_k može se videti da se viši pol kompenzovanog kružnog pojačanja nalazi približno na istoj učestanosti kao u prvom rešenju pri $C_k=0$. Dodavanjem C_k redno sa R_k sprečeno je smanjivanje $|A\beta_{komp}(0)|$ u odnosu na vrednost kod nekompenzovanog kružnog pojačanja.

2.29. Na slici 2.29.1 je zadato tipično kolo integrisanog operacionog pojačavača. Parazitna kapacitivnost C_p stvara pol $\omega_{p1}=1/(R_cC_p)$. Drugi pol pojačavača potiče od drugog, naponskog stepena koji ima prenosnu funkciju $A_2(j\omega)=v_2/v_1=A_{20}/(1+j\omega/\omega_{p2})$, gde je $\omega_{p2}=100$ rad/s, $A_{20}=1000$, $R_{u2}\to\infty$, $R_{i2}\to 0$. Izlazni pojačavački stepen ima pol na veoma visokim učestanostima.

Kompenzovati operacioni pojačavač priključivanjem kompenzacione mreže na odgovarajući priključak na ulazu drugog stepena, tako da jedan od polova nekompenzovanog pojačavača bude poništen kompenzacionom nulom (nacrtati kompenzacionu mrežu). Izračunati elemente kompenzacione mreže tako da fazna margina kružnog pojačanja jediničnog pojačavača, napravljenog od ovog operacionog pojačavača primenom povratne sprege, bude jednaka $\pi/3$.



Slika 2.29.1.

Rešenje:

Na isti način kao u zadatku 2.28 učestanost pola koji je posledica prisustva kapacitivnosti C_p (to je drugi pol operacionog pojačavača) je:

$$\omega_{p1}=\frac{1}{R_cC_p}=\frac{1}{20\text{k}\Omega\cdot 10\text{pF}}=5\text{ Mrad/s}. \qquad (2.29.1)$$

Kompenzaciona mreža je kao na slici 2.28.2, pa je:

$$A\beta_{komp}=-g_{md}\cdot\frac{\frac{R_c}{1+R_cC_ps}\cdot\left(R_k+\frac{1}{C_ks}\right)}{\frac{R_c}{1+R_cC_ps}+R_k+\frac{1}{C_ks}}\cdot\frac{A_{20}}{1+\frac{s}{\omega_{p2}}}, \qquad (2.29.2)$$

tj.:

$$A\beta_{komp}=-g_{md}\cdot R_c\cdot A_{20}\frac{1+R_kC_ks}{R_cC_ks+(1+R_cC_ps)(1+R_kC_ks)}\cdot\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_{p2}}}. \qquad (2.29.3)$$

Kada se kompenzacionom nulom poništi pol ω_{p2}:

$$A\beta_{komp}=-\frac{g_{md}\cdot R_c\cdot A_{20}}{R_cC_ks+(1+R_cC_ps)(1+R_kC_ks)}. \qquad (2.29.4)$$

Iz imenioca (2.29.4) se vidi da je zbir vremenskih konstanti polova veći za R_cC_k u odnosu na slučaj bez kompenzacije, dok je njihov proizvod ostao isti. To znači da je odnos vremenskih konstanti polova, pa stoga i učestanosti polova, veći nego kod nekompenzovanog kružnog pojačanja. Pošto kompenzacija vrši razdvajanje polova, vremenska konstanta dominantnog pola je približno jednaka zbiru vremenskih konstanti oba pola. Sledi da je učestanost dominantnog pola približno:

$$\omega_{pk1}=\frac{1}{R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k} \qquad (2.29.5)$$

a učestanost višeg pola je:

$$\omega_{pk2}=\frac{1}{R_cC_pR_kC_k\omega_{pk1}}=\frac{R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k}{R_cC_pR_kC_k}. \qquad (2.29.6)$$

Jedinična učestanost kružnog pojačanja je manja od učestanosti višeg pola (videti rešenje zadatka 2.3):

$$\omega_{ck1}=\omega_{pk1}\cdot A_0=\frac{A_0}{R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k}, \qquad (2.29.7)$$

gde je $A_0=g_{md}\cdot R_c\cdot A_{20}=2\cdot 10^5$. Pošto ω_{pk1} na učestanosti ω_{ck1} doprinosi faznoj karakteristici kružnog pojačanja sa približno $-\pi/2$, da bi fazna margina kružnog pojačanja bila jednaka $\pi/3$ potrebno je da bude zadovoljen uslov $\operatorname{arctg}\frac{\omega_{ck1}}{\omega_{pk2}}=30°$, tj.:

$$\omega_{ck1}=\frac{\omega_{pk2}}{\sqrt{3}}=\frac{R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k}{\sqrt{3}R_cC_pR_kC_k}. \qquad (2.29.8)$$

Izjednačavanjem (2.29.7) i (2.29.8) dobija se:

$$\left(R_cC_k+R_cC_p+R_kC_k\right)^2=\sqrt{3}\cdot 2\cdot 10^5\cdot R_cC_pR_kC_k. \qquad (2.29.9)$$

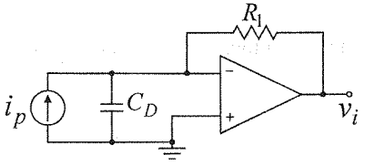
Pošto je:

$$R_cC_pR_kC_k=\frac{1}{\omega_{p1}\omega_{p2}}=\frac{1}{5\cdot 10^8}, \qquad (2.29.10)$$

iz poslednje dve jednačine se izračunava $C_k=816\,\text{nF}$ i $R_k=12{,}25\,\text{k}\Omega$.

2.30. U fotopojačavaču prikazanom na slici 2.30.1 i_p je struja fotodiode a $C_D=50\,\text{pF}$ njena kapacitivnost.

a) Ako je pojačanje u otvorenoj petlji upotrebljenog operacionog pojačavača $A(s)=\frac{\omega_T}{s}=\frac{1\,\text{Mrad/s}}{s}$ ($R_u\to\infty$, $R_i\to 0$) i $R_1=1\,\text{M}\Omega$, odrediti Q-faktor polova transimpedanse fotopojačavača $Z_m(s)=\frac{V_i(s)}{I_p(s)}$.



Slika 2.30.1.

b) Dodavanjem kompenzacionog kondenzatora C_k kompenzovati fotopojačavač. Odrediti vrednost C_k tako da transimpedansa fotopojačavača ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku.

Rešenje:

a) Izlazni napon kola sa slike 2.30.1 je:

$$V_i(s)=-A(s)\cdot V_-(s)=-A(s)\left[\frac{R_1}{1+R_1C_Ds}I_p(s)+\frac{1}{1+R_1C_Ds}V_i(s)\right]. \qquad (2.30.1)$$

Iz (2.30.1) se dobija transimpedansa:

$$Z_m(s)=\frac{V_i(s)}{I_p(s)}=-\frac{R_1\cdot A(s)}{\left(1+R_1C_Ds+A(s)\right)}. \qquad (2.30.2)$$

Uvrštavanjem datog izraza za $A(s)$ i sređivanjem se dobija:

$$Z_m(s)=\frac{V_i(s)}{I_p(s)}=-\frac{\omega_T/C_D}{s^2+\frac{s}{R_1C_D}+\frac{\omega_T}{R_1C_D}}. \qquad (2.30.3)$$

Q-faktor polova je:

$$Q=\frac{\sqrt{\frac{\omega_T}{R_1C_D}}}{\frac{1}{R_1C_D}}=\sqrt{R_1C_D\omega_T}=\sqrt{50}=7{,}07. \qquad (2.30.4)$$

b) Kompenzacioni kondenzator se priključuje paralelno otporniku R_1. Izraz za transimpedansu u ovom slučaju može da se dobije zamenom R_1 sa $\frac{R_1}{1+R_1C_ks}$ u (2.30.3). Posle sređivanja se dobija:

$$Z_m(s)=\frac{V_i(s)}{I_p(s)}=-\frac{\frac{\omega_T}{C_D+C_k}}{s^2+\frac{1/R_1+\omega_TC_k}{C_D+C_k}s+\frac{\omega_T}{R_1(C_D+C_k)}}. \qquad (2.30.5)$$

Pošto je prenosna funkcija dvopolna sa nulama u beskonačnosti, uslov za maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku je:

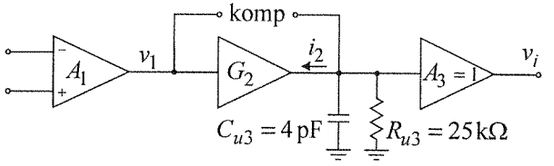
$$Q=\frac{\sqrt{\frac{\omega_T}{R_1(C_D+C_k)}}}{\frac{1/R_1+\omega_TC_k}{C_D+C_k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2.30.6)$$

Odavde se izračunava $C_k=10\,\text{pF}$.

2.31. Na slici 2.31.1 je prikazano kolo integrisanog operacionog pojačavača. Pojačanje prvog stepena je $A_1(j\omega)=A_{10}/(1+j\omega/\omega_{p1})$, $A_{10}=100$, $\omega_{p1}=1\,\text{Mrad/s}$. Drugi stepen je transkonduktansni pojačavač sa transkonduktansom $G_2=40\text{mS}$. Treći stepen je jedinični naponski pojačavač sa ulaznom otpornošću $R_{u3}=25\text{k}\Omega$ i ulaznom kapacitivnošću $C_{u3}=4\text{pF}$.

a) Koristeći priključke za kompenzaciju prikazane na slici kompenzovati operacioni pojačavač tako da margina faze kružnog pojačanja za jedinični neinvertujući pojačavač napravljen od kompenzovanog operacionog pojačavača bude jednaka $\pi/4$. Kompenzacija ne treba da smanji vrednost pojačanja operacionog pojačavača na niskim učestanostima.

b) Ako se od operacionog pojačavača kompenzovanog u tački a) napravi jedinični invertujući pojačavač, izračunati propusni opseg napravljenog pojačavača.



Slika 2.31.1

Rešenje:

a) Pojačanje na niskim učestanostima nekompenzovanog operacionog pojačavača jednako je $A(0)=A_{10}G_2R_{u3}=10^5$, a učestanosti polova su $\omega_{p1}=1\,\text{Mrad/s}$ i $1/(R_{u3}C_{u3})=10\,\text{Mrad/s}$. Na osnovu ovih vrednosti se može zaključiti da je fazna margina zanemarljiva.

Otpornost kompenzacione mreže između kompenzacionih priključaka treba da bude beskonačna, da bi pojačanja operacionog pojačavača na niskim učestanostima ostalo nepromenjeno. Ukoliko bi se pojačavač kompenzovao samo priključivanjem kompenzacionog kondenzatora između kompenzacionih priključaka, prenosna funkcija bi imala nulu u desnoj poluravni kompleksne učestanosti. Podešavanjem učestanosti ove nule ne može se zadovoljiti zadati uslov za faznu marginu.

Priključivanjem redne veze kompenzacionog kondenzatora i otpornika između kompenzacionih priključaka, nula prenosne funkcije može da se postavi u levu poluravan [2]. U tom slučaju prenosna funkcija kompenzovanog operacionog pojačavača je:

$$A(s)=\frac{A_{10}}{1+\dfrac{s}{\omega_{p1}}}\cdot\frac{G_2R_{u3}\left[\dfrac{sC_k}{G_2}-(1+sC_kR_k)\right]}{sC_kR_{u3}+(1+sC_kR_k)(1+sC_{u3}R_{u3})}. \qquad (2.31.1)$$

Pol prvog stepena može da se poništi nulom:

$$\frac{1}{(R_k-1/G_2)C_k}=\omega_{p1}=1\,\text{Mrad/s}, \qquad (2.31.2)$$

pa preostaje dvopolna prenosna funkcija čiji su polovi ω_{pk1} i ω_{pk2} dati rešenjima jednačine:

$$sC_kR_{u3}+(1+sC_kR_k)(1+sC_{u3}R_{u3})=0, \qquad (2.31.3)$$

tj.:

$$s^2C_kR_kC_{u3}R_{u3}+s\left[C_k(R_{u3}+R_k)+C_{u3}R_{u3}\right]+1=0. \qquad (2.31.4)$$

Margina faze kružnog pojačanja za jedinični neinvertujući pojačavač napravljen od kompenzovanog operacionog pojačavača treba da bude jednaka $\pi/4$, pa stoga polovi treba da zadovolje uslov (videti rešenje zadatka 2.4):

$$\frac{\omega_{pk2}}{\omega_{pk1}}=A_0|\beta|=A_0=10^5. \qquad (2.31.5)$$

Pošto je $\omega_{pk1}\ll\omega_{pk2}$, vremenska konstanta manjeg pola jednaka je koeficijentu u linearnom članu gornje jednačine:

$$\frac{1}{\omega_{pk1}}=C_k(R_{u3}+R_k)+C_{u3}R_{u3}. \qquad (2.31.6)$$

Pošto je:

$$\omega_{pk1}\cdot\omega_{pk2}=\frac{1}{(C_kR_kC_{u3}R_{u3})}, \qquad (2.31.7)$$

učestanost drugog pola je:

$$\omega_{pk2}=\sqrt{\frac{10^5}{C_kR_kC_{u3}R_{u3}}}. \qquad (2.31.8)$$

Rešavanjem (2.31.2), (2.31.5), (2.31.6) i (2.31.7) dobija se $R_k=265{,}45\Omega$ i $C_k=4{,}04\text{nF}$. Na osnovu ovih vrednosti dobija se $\omega_{pk2}=965\,\text{Mrad/s}$.

b) Ako se od operacionog pojačavača kompenzovanog u tački a) napravi jedinični invertujući pojačavač, pošto je faktor povratne sprege upola manji, presečna učestanost kružnog pojačanja će biti upola manja od ω_{pk2}, što znači da invertujući jedinični pojačavač ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku. Stoga mu je propusni opseg jednak $\omega_g=\omega_{pk2}/\sqrt{2}=682\,\text{Mrad/s}$.

Literatura 2:

[1] B. Raković, *Elektronika – linearna integrisana kola*, poglavlje 4, Građevinska knjiga, Beograd 1983.

[2] P. Gray, P. Hurst, S. Lewis, R. Meyer, *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, poglavlje 9, John Wiley & Sons, Inc., New York 2001.

[3] M. Stojić, *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, poglavlje 6, Naučna knjiga, Beograd 1985.

[4] R. Horvat, *Sinteza Električnih mreža*, poglavlje 12, Naučna knjiga, Beograd 1970.

[5] B. Raković, *Elektronika – linearna integrisana kola*, poglavlje 3, Građevinska knjiga, Beograd 1983.

[6] B. Raković, *Elektronika – linearna integrisana kola*, poglavlje 6, Građevinska knjiga, Beograd 1983.

[7] S. Tešić, D. Vasiljević, *Osnovi elektronike*, poglavlje 13, Građevinska knjiga, Beograd 2000.

[8] S. Marjanović, *Elektronika linearnih kola i sistema*, poglavlje 4, Akademska misao Elektrotehnički fakultet, Beograd 2002.

III

Analogni filtri

3.1. a) Definisati normalizovan NF filtar.

b) Polazeći od funkcije prenosa normalizovanog Batervortovog NF filtra n-tog reda izračunati izraz za položaj polova u ravni kompleksne učestanosti.

c) Izračunati funkciju prenosa normalizovanog Batervortovog NF filtra četvrtog reda.

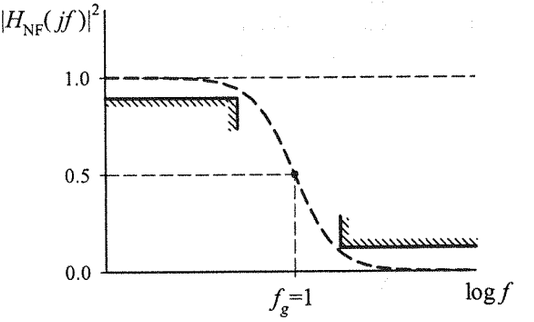
d) Realizovati pasivnu mrežu filtra čija je funkcija prenosa određena u tački c). Mreža bez gubitaka je zatvorena otpornikom $R=1\Omega$, a pobudni naponski generator je idealan.

e) U pasivnom kolu realizovanom u tački d) skalirati impedanse na nivo $R_0=1\text{k}\Omega$, a zatim izvršiti transformaciju kola u VF filtar granične učestanosti 1kHz. Dobijenu pasivnu mrežu VF filtra realizovati u direktnoj formi koristeći simulaciju induktivnosti preko žiratora na bazi GIC konvertora. Predložiti vrednosti elemenata u GIC konvertoru.

Rešenje:

a) Normalizovan NF filtar je filtar kod koga je izvršena normalizacija po učestanosti i po amplitudi, tako da i granična učestanost filtra i maksimalna vrednost amplitudske karakteristike funkcije prenosa imaju vrednost 1. Normalizovan NF filtar ima važnu ulogu u postupku projektovanja analognih filtara.

Projektni zahtevi za analogne filtre najčešće se definišu u formi gabarita za amplitudsku karakteristiku funkcije prenosa filtra. Pošto postoji više tipova funkcija prenosa, a gabariti mogu biti proizvoljni, da bi se uprostio postupak projektovanja obično se zadati gabariti filtra prvo transformišu u odgovarajuće gabarite normalizovanog NF filtra [1]. Zatim se iz skupa poznatih aproksimacija za amplitudsku karakteristiku NF filtra bira ona koja zadovoljava te gabarite (slika 3.1.1.), i na osnovu toga određuje funkcija prenosa normalizovanog NF filtra. Najpoznatije aproksimacije za amplitudsku karakteristiku NF filtra su Batervortova, Čebiševljeva, inverzna Čebiševljeva, eliptička i Beselova [1]. O fazama projektovanja koje slede nakon toga biće više reči kasnije.



Slika 3.1.1.

b) Normalizovan Batervortov NF filtar n-tog reda ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku čiji je kvadrat oblika:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}. \qquad (3.1.1)$$

Kvadrat modula funkcije prenosa se može izračunati kao proizvod $H(j\omega)H(-j\omega)$, pa se uvođenjem smene $s=j\omega$ u prethodni izraz dobija:

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}=\frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}. \qquad (3.1.2)$$

Ova funkcija ima $2n$ polova čiji se položaj u kompleksnoj ravni može odrediti rešavanjem jednačine:

$$1+(-1)^n s^{2n}=0. \qquad (3.1.3)$$

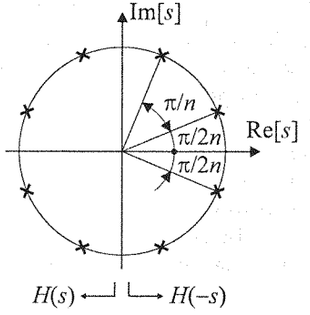
Ako je n parno, prethodna jednačina se može napisati u obliku $1+s^{2n}=0$, odnosno:

$$s^{2n}=-1=e^{j(2k-1)\pi}. \qquad (3.1.4)$$

Rešenja ove jednačine su:

$$\hat{s}_k=e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}},\ \text{za}\ k=1, 2, \ldots, 2n. \qquad (3.1.5)$$

To znači da se polovi funkcije $H(s)H(-s)$ nalaze na jediničnom krugu u kompleksnoj ravni na jednakim rastojanjima $2\pi/2n=\pi/n$. Polovi funkcije $H(s)$ moraju biti u levoj poluravni da bi sistem bio stabilan [2], a simetrično raspoređeni polovi u desnoj poluravni pripadaće funkciji $H(-s)$. Pošto svaki kompleksan pol funkcije $H(s)$ mora da ima konjugovano-kompleksan par, za parno n polovi moraju biti raspoređeni kao što je prikazano na slici 3.1.2.



Slika 3.1.2.

U levoj poluravni ima n rešenja definisanih izrazom (3.1.5), a njihove vrednosti se dobijaju za $k>n/2$ i $k<3n/2$. Ako se uvede oznaka $s_k \triangleq \hat{s}_{k+n/2}$, rešenja u levoj poluravni su:

$$s_k=e^{j\frac{[2(k+n/2)-1]\pi}{2n}}=e^{j\left(\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j\left(\theta_k+\frac{\pi}{2}\right)},\ \text{za}\ k=1, 2, \ldots, n, \qquad (3.1.6)$$

gde je $\theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi$. Znači, položaj polova funkcije prenosa normalizovanog Batervortovog NF filtra parnog reda u kompleksnoj ravni je opisan jednačinom:

$$s_k=\cos\left(\theta_k+\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\theta_k+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta_k+j\cos\theta_k,\ \text{za}\ k=1, 2, \ldots, n. \qquad (3.1.7)$$

Na osnovu položaja polova može se izračunati funkcija prenosa filtra u faktorizovanom obliku:

$$H(s)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{s-s_k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{s+\sin\theta_k-j\cos\theta_k}. \qquad (3.1.8)$$

Grupisanjem po dva faktora sa konjugovano-kompleksnim polovima:

$$(s-s_k)(s-\bar{s}_k)=s^2+2\sin\theta_k\cdot s+\sin^2\theta_k+\cos^2\theta_k=s^2+2\sin\theta_k\cdot s+1, \qquad (3.1.9)$$

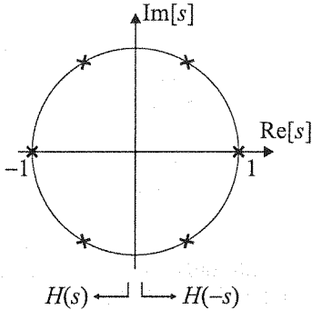
dobija se izraz za funkciju prenosa normalizovanog Batervortovog NF filtra parnog reda:

$$H(s)=\prod_{k=1}^{n/2}\frac{1}{s^2+2\sin\theta_k\cdot s+1},\ \text{gde je}\ \theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi. \qquad (3.1.10)$$

Ako je n neparno, jednačina (3.1.3) se transformiše u jednačinu $1-s^{2n}=0$ čija su rešenja:

$$\hat{s}_k=e^{j\frac{2k\pi}{2n}},\ \text{za}\ k=1, 2, \ldots, 2n. \qquad (3.1.11)$$

Rešenja se nalaze na jediničnom krugu, na istim međusobnim rastojanjima kao u prethodnom slučaju (π/n). Raspored rešenja je sada drugačiji, jer jednačina (3.1.11) ima dva realna rešenja u tačkama $s=1$ i $s=-1$. To znači da funkcije $H(s)$ i $H(-s)$ imaju po jedan pol na realnoj osi, a ostali polovi su raspoređeni simetrično u konjugovano-kompleksnim parovima na jediničnom krugu (slika 3.1.3.).



Slika 3.1.3.

Slično kao u prethodnom slučaju dobija se izraz za funkciju prenosa normalizovanog Batervortovog NF filtra neparnog reda:

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{s^2+2\sin\theta_k\cdot s+1},\ \text{gde je}\ \theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi. \qquad (3.1.12)$$

c) Zamenom vrednosti $n=4$ u jednačinu (3.1.10) dobija se:

$$H(s)=\frac{1}{\left(s^2+2\sin\frac{\pi}{8}\cdot s+1\right)\left(s^2+2\sin\frac{3\pi}{8}\cdot s+1\right)}, \qquad (3.1.13)$$

odnosno:

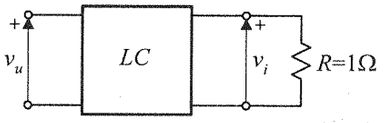
$$H(s)=\frac{1}{(s^2+0{,}76s+1)(s^2+1{,}85s+1)}. \qquad (3.1.14)$$

Funkcija prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra četvrtog reda je:

$$H(s)=\frac{1}{s^4+2{,}61s^3+3{,}41s^2+2{,}61s+1}. \qquad (3.1.15)$$

d) Nakon što je izračunata funkcija prenosa $H(s)$, sledeći korak u projektovanju filtra je sinteza električne mreže sa takvom funkcijom prenosa. Prema položaju polova i tipu funkcije $H(s)$ prvo treba izabrati mrežu odgovarajuće topologije, a zatim odrediti vrednosti elemenata u toj mreži.

Pasivna mreža bez gubitaka se može realizovati u vidu lestvičaste LC mreže. Kada se takva mreža zatvori otpornikom na ulaznim, na izlaznim ili na oba kraja, dobijaju se Darlingtonova kola koja se često koriste u realizaciji pasivnih filtara [3]. Darlingtonovo kolo sa otpornikom $R=1\Omega$ na izlaznim krajevima prikazano je na slici 3.1.4.



Slika 3.1.4.

Ako se pasivna mreža predstavi kao četvoropol opisan y-parametrima, funkcija prenosa Darlingtonovog kola sa otpornikom $R=1\Omega$ na izlaznim krajevima je:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{-y_{21}}{\frac{1}{R}+y_{22}}=\frac{-y_{21}}{1+y_{22}}. \qquad (3.1.16)$$

Član $1+y_{22}$ u imeniocu predstavlja paralelnu vezu otpornika $R=1\Omega$ i izlazne admitanse y_{22} pasivne mreže. Sinteza pasivnog kola koje će imati zadatu funkciju prenosa $H(s)$ vrši se realizacijom izlazne admitanse y_{22}, pri čemu broj konačnih nula funkcije prenosa (to su ujedno konačne nule parametra y_{21}), određuje način na koji će ta admitansa biti realizovana [3]. Da bi zadata funkcija prenosa bila svedena na oblik (3.1.16), neophodno je poznavati osobine parametara y_{21} i y_{22} lestvičastih LC mreža. Oba parametra treba da budu racionalne funkcije kompleksne promenjive s sa realnim koeficijentima, pri čemu u brojiocu i imeniocu tih funkcija moraju biti polinomi različite parnosti [4]. Parametar y_{22} ima još niz osobina koje su zajedničke za sve ulazne/izlazne funkcije lestvičastih LC mreža, o čemu će više reči biti kasnije.

Funkcija prenosa koju treba realizovati u ovom primeru je data jednačinom (3.1.15). Polinom u brojiocu te funkcije je paran polinom ($P(s)=1$), pa se polinomi u brojiocu i imeniocu moraju podeliti neparnim delom polinoma iz imenioca:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{2{,}61s^3+2{,}61s}}{1+\frac{s^4+3{,}41s^2+1}{2{,}61s^3+2{,}61s}}. \qquad (3.1.17)$$

Na ovaj način je u brojiocu dobijena racionalna funkcija koja predstavlja količnik parnog i neparnog polinoma, dakle zadovoljava osobine koje treba da ima parametar y_{21} lestvičaste LC mreže. Poređenjem ovog izraza sa (3.1.16), dobija se:

$$y_{22}=\frac{s^4+3{,}41s^2+1}{2{,}61s^3+2{,}61s}. \qquad (3.1.18)$$

Ova racionalna funkcija predstavlja količnik parnog i neparnog dela Hurvicovog polinoma [2], što znači da zadovoljava osobine izlazne admitanse lestvičaste LC mreže.

Funkcija prenosa (3.1.15) nema konačnih nula, pa se izlazna admitansa razvija u vidu Kauerove I forme [4]:

$$Y_1=y_{22}=\frac{s^4}{2{,}61s^3}+\frac{2{,}41s^2+1}{2{,}61s^3+2{,}61s}=0{,}38s+\frac{1}{Z_2}, \qquad (3.1.19)$$

$$Z_2=\frac{2{,}61s^3+2{,}61s}{2{,}41s^2+1}=\frac{2{,}61}{2{,}41}s+\frac{1{,}53s}{2{,}41s^2+1}=1{,}08s+\frac{1}{Y_3}, \qquad (3.1.20)$$

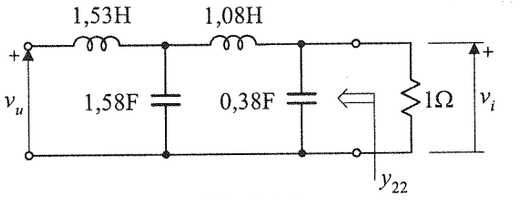
$$Y_3=\frac{2{,}41s^2+1}{1{,}53s}=\frac{2{,}41}{1{,}53}s+\frac{1}{1{,}53s}=1{,}58s+\frac{1}{Z_4}, \qquad (3.1.21)$$

$$Z_4=1{,}53s, \qquad (3.1.22)$$

i na kraju se dobija:

$$y_{22}=0{,}38s+\cfrac{1}{1{,}08s+\cfrac{1}{1{,}58s+\cfrac{1}{1{,}53s}}}. \qquad (3.1.23)$$

U ovom primeru je razvoj izlazne admitanse u Kauerovu I formu izvršen u četiri koraka, odnosno određena su četiri koeficijenta uz s u verižnom razlomku, što odgovara realizaciji mreže četvrtog reda. Prvi član u izrazu (3.1.23) predstavlja admitansu kondenzatora vrednosti 0,38F koja je paralelno vezana sa impedansom Z_2 (jednačina (3.1.19)). Impedansa Z_2 predstavlja rednu vezu induktivnosti 1,08H i admitanse Y_3 (jednačina (3.1.20)), koju čini paralelna veza kapacitivnosti 1,58F i induktivnosti 1,53H (jednačina (3.1.21)). Ovi elementi se crtaju sa desna u levo, jer y_{22} treba da bude izlazna admitansa pasivne mreže. Krajevi poslednjeg elementa ostaju otvoreni i predstavljaju ulazne priključke pasivne mreže na koje se vezuje idealan naponski generator (pri računanju izlazne admitanse te mreže generator će biti zamenjen kratkom vezom, tako da se y_{22} neće promeniti). Sintetisana pasivna mreža ima formu lestvičaste LC mreže, jer se naizmenično javljaju kondenzatori u paralelnim i induktivnosti u rednim granama (slika 3.1.5.). Još ostaje da se na izlazne krajeve te mreže sa desne strane veže otpornik $R=1\Omega$, čime se realizuje član $1+y_{22}$ u izrazu (3.1.16).



Slika 3.1.5.

Pasivno kolo prikazano na slici 3.1.5. nije od praktičnog značaja, jer su vrednosti kapacitivnih i induktivnih elemenata suviše velike za realizaciju. U stvari, impedanse u ovom kolu su normalizovane, jer je kolo sintetisano na osnovu funkcije prenosa koja je bila normalizovana. Zbog toga se obično nakon sinteze pasivnog kola mora vršiti skaliranje impedansi i denormalizacija učestanosti, o čemu će biti reči kasnije. Ovi postupci se mogu primeniti i u nekoj od kasnijih faza tokom projektovanja filtra.

e) Funkcija prenosa $H(s)$ linearnog vremenski invarijantnog kola se neće promeniti ako se izvrši skaliranje impedansi u tom kolu, odnosno ako se sve impedanse pomnože istom konstantom [1]. Obično se konstanta skaliranja bira tako da se normalizovane otpornosti u kolu filtra dovedu na odgovarajući nivo koji je pogodan za realizaciju (denormalizacija učestanosti neće imati uticaja na njihove vrednosti, jer impedansa otpornika ne zavisi od učestanosti).

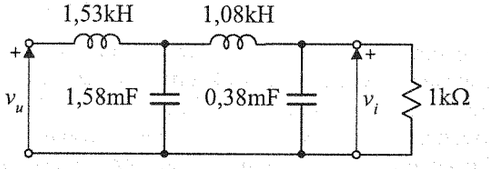
Ako je konstanta skaliranja R_0, normalizovane impedanse Z_n će skaliranjem dobiti nove vrednosti $Z_{skal} = Z_n R_0$, odnosno svaki element u kolu filtra će dobiti novu vrednost:

$$R_{skal} = R_n R_0, \tag{3.1.24}$$

$$Z_{L\,skal} = Z_{L_n} R_0 = sL_n R_0 = sL_{skal} \Rightarrow L_{skal} = L_n R_0, \tag{3.1.25}$$

$$Z_{C_{skal}} = Z_{C_n} R_0 = \frac{1}{sC_n} R_0 = \frac{1}{sC_{skal}} \Rightarrow C_{skal} = \frac{C_n}{R_0}. \tag{3.1.26}$$

Prema tekstu zadatka je R_0=1kΩ, pa u kolu prikazanom na slici 3.1.5. sve induktivnosti i otpornosti treba pomnožiti sa 10^3, a kapacitivnosti podeliti tom konstantom. Pasivno kolo sa skaliranim impedansama prikazano je na slici 3.1.6.



Slika 3.1.6.

Transformacija normalizovanog NF filtra u VF filtar granične učestanosti 1kHz vrši se smenom, [1]:

$$s \to \frac{\omega_0}{s} = \frac{2\pi 10^3}{s}. \tag{3.1.27}$$

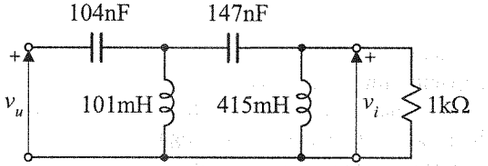
Transformacija se može izvršiti uvođenjem ove smene u funkciju prenosa NF filtra ili, kao što se traži u ovom zadatku, korišćenjem ove smene za transformaciju svakog elementa NF kola čija impedansa zavisi od učestanosti. To znači da će sve induktivnosti biti preslikane u odgovarajuće kapacitivnosti:

$$Ls \to \frac{L\omega_0}{s} \Rightarrow C' = \frac{1}{L\omega_0}, \tag{3.1.28}$$

i obrnuto:

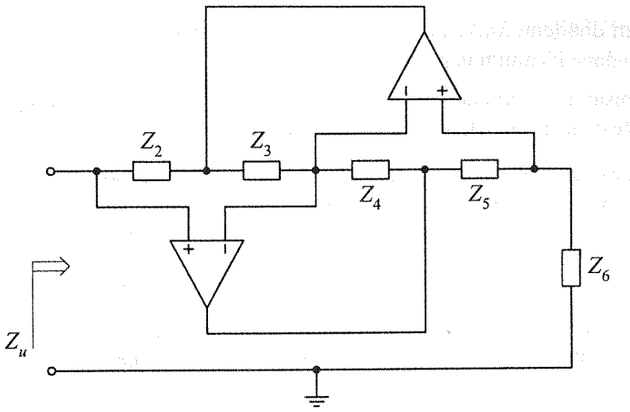
$$\frac{1}{Cs} \to \frac{1}{\frac{C\omega_0}{s}} = \frac{s}{C\omega_0} \Rightarrow L' = \frac{1}{C\omega_0}. \tag{3.1.29}$$

Otpornici neće promeniti vrednosti, jer njihova impedansa ne zavisi od učestanosti. Primenom opisane transformacije na elemente NF filtra sa slike 3.1.6. dobija se kolo VF filtra granične učestanosti 1kHz prikazano na slici 3.1.7.



Slika 3.1.7.

Vrednosti elemenata u ovom kolu su prihvatljive za realizaciju filtra sa diskretnim komponentama, ali ne i za realizaciju u integrisanoj tehnologiji. Realizacija pasivnih induktivnosti u integrisanoj tehnologiji povezana je sa nizom ograničenja u pogledu vrednosti i kvaliteta tih elemenata. Zbog toga se često za realizaciju filtara u integrisanim kolima umesto pasivnih induktivnosti koriste aktivna kola koja vrše simulaciju induktivnosti. Jedno od takvih kola je generalisani impedansni konvertor (GIC - *Generalized Impedance Converter*) [5], prikazan na slici 3.1.8.

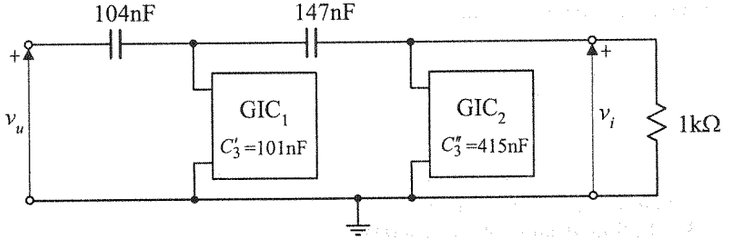


Slika 3.1.8.

Ulazna impedansa GIC konvertora je:

$$Z_u(s) = \frac{Z_2 Z_4 Z_6}{Z_3 Z_5}, \tag{3.1.30}$$

što znači da takvo kolo simulira uzemljenu induktivnost između ulaznih krajeva ukoliko se izaberu impedanse Z_3 ili Z_5 kapacitivnog, a sve ostale impedanse rezistivnog karaktera. Izbor vrednosti elemenata GIC konvertora se vrši prema induktivnosti koju treba simulirati, ali treba voditi računa da raspon vrednosti tih elemenata ne bude veliki u odnosu na vrednosti ostalih elemenata u kolu filtra. Na primer, da bi se simulirale induktivnosti 101mH i 415mH u kolu prikazanom na slici 3.1.7. pogodno je izabrati Z_2=Z_4=Z_6=Z_5=1kΩ, C_3'=101nF i C_3''=415nF u GIC konvertorima, jer su ostali elementi u kolu filtra tog reda veličine. Realizacija zadatog VF filtra u direktnoj formi sa simulacijom induktivnosti preko GIC konvertora prikazana je na slici 3.1.9.



Slika 3.1.9.

3.2. Zadat je gabarit normalizovanog NF Batervortovog filtra:

$|H(j0{,}5)|^2 > 0{,}95$ u propusnom opsegu,

$|H(j2)|^2 < 0{,}005$ u nepropusnom opsegu.

a) Odrediti najmanji potreban red filtra i odgovarajuću funkciju prenosa.

b) Realizovati dobijenu funkciju prenosa u vidu mreže bez gubitaka zatvorene otpornikom $R=1\Omega$ i pobuđene idealnim naponskim generatorom.

c) Transformisati pasivno kolo NF filtra iz tačke b) u filtar propusnik opsega učestanosti na centralnoj učestanosti $\omega_0=1$krad/s sa propusnim opsegom $B=240$rad/s.

d) Filtar iz tačke b) realizovati u direktnoj formi koristeći otpornike, kondenzatore i FDNR komponente. Nacrtati realizaciju FDNR komponente i predložiti vrednosti elemenata.

Rešenje:

a) Polazeći od izraza (3.1.1) za kvadrat modula funkcije prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra n-tog reda i zadatog gabarita za propusni opseg, dobija se uslov:

$$|H(j0{,}5)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}>0{,}95, \tag{3.2.1}$$

odnosno:

$$1+\frac{1}{4^n}<\frac{100}{95}\ \Rightarrow\ 4^n>19\ \Rightarrow\ n\geq 3. \tag{3.2.2}$$

Slično se za nepropusni opseg dobija:

$$|H(j2)|^2=\frac{1}{1+2^{2n}}<0{,}005, \tag{3.2.3}$$

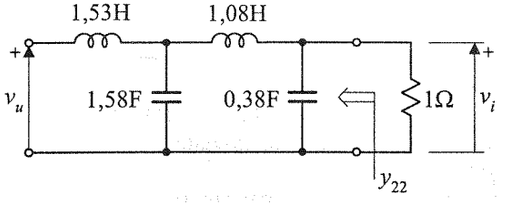
odnosno:

$$1+2^{2n}>200\ \Rightarrow\ 4^n>199\ \Rightarrow\ n\geq 4. \tag{3.2.4}$$

Oba gabarita moraju biti zadovoljena, pa se minimalan red filtra uvek određuje iz strožijeg uslova, u ovom slučaju $n=4$. Funkcija prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra četvrtog reda izračunata je u zadatku 3.1:

$$H(s)=\frac{1}{s^4+2{,}61s^3+3{,}41s^2+2{,}61s+1}. \tag{3.2.5}$$

b) Postupak realizacije pasivne mreže bez gubitaka zatvorene otpornikom $R=1\Omega$ i pobuđene idealnim naponskim generatorom sa funkcijom prenosa (3.2.5) detaljno je opisan u zadatku 3.1.d). Sintetisano kolo je prikazano na slici 3.2.1.



Slika 3.2.1.

c) Transformacija normalizovanog NF filtra u filtar propusnik opsega učestanosti sa propusnim opsegom B i centralnom učestanošću ω_0 vrši se smenom, [1]:

$$s\rightarrow\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}. \tag{3.2.6}$$

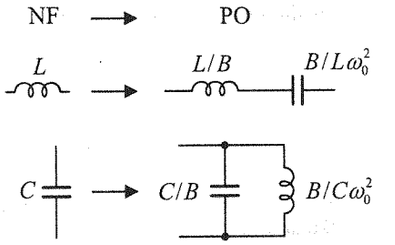
Ako je potrebno transformisati kolo jednog tipa filtra u drugi, onda se ova smena koristi za transformaciju svake impedanse u polaznom kolu. Na primer, impedansa induktivnosti L iz kola NF filtra se preslikava u kolo filtra propusnika opsega učestanosti na sledeći način:

$$Ls\rightarrow L\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}=\frac{L}{B}s+\frac{1}{\frac{B}{L\omega_0^2}s}, \tag{3.2.7}$$

tj. preslikava se u rednu vezu induktivnosti L/B i kapacitivnosti $B/L\omega_0^2$ (slika 3.2.2.). Slično se može pokazati za kapacitivnosti iz NF kola:

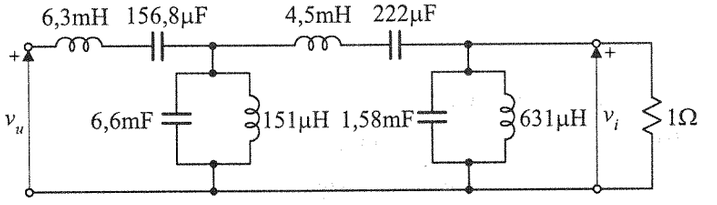
$$\frac{1}{Cs}\rightarrow\frac{1}{C\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}}=\frac{1}{\frac{C}{B}s+\frac{1}{\frac{B}{C\omega_0^2}s}}, \tag{3.2.8}$$

koje se preslikavaju u paralelnu vezu kapacitivnosti C/B i induktivnosti $B/C\omega_0^2$ u kolu filtra propusnika opsega učestanosti (slika 3.2.2.).



Slika 3.2.2.

Primenom ovih transformacija na svaki element NF kola sa slike 3.2.1 za $\omega_0=1$krad/s i $B=240$rad/s, dobija se filtar propusnik opsega učestanosti prikazan na slici 3.2.3. koji zadovoljava zahteve postavljene u tekstu zadatka.

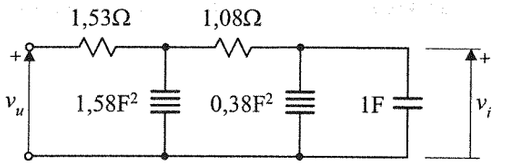


Slika 3.2.3.

d) U pasivnom kolu NF filtra prikazanom na slici 3.2.1. induktivnosti nisu uzemljenje, što znači da se kolo GIC konvertora prikazano na slici 3.1.8. ne može koristiti za realizaciju takvih induktivnosti. Ukoliko se sve impedanse u kolu slici 3.2.1. podele sa s, umesto neuzemljenih induktivnosti u rednim granama će biti otpornici vrednosti $L\,\Omega$ ($sL\cdot 1/s=L$). Funkcija prenosa kola se neće promeniti posle ove transformacije, ali će se

promeniti tip svih ostalih elemenata u kolu (slika 3.2.4.). Umesto otpornika u originalnom kolu, pojaviće se kondenzatori vrednosti $1/R\,\mathrm{F}$ ($R\cdot 1/s=\dfrac{1}{1/R\cdot s}$), a umesto kondenzatora elementi čija je impedansa oblika:

$$Z(s)=\frac{1}{s^2C}. \tag{3.2.9}$$



Slika 3.2.4.

Takvi elementi se nazivaju frekventno zavisne negativne otpornosti ili FDNR (*Frequency Dependant Negative Resistor*) komponente [5]. Jedna od često korišćenih realizacija FDNR komponente je realizacija koja se bazira na GIC konvertoru. Na osnovu izraza za ulaznu impedansu GIC konvertora (3.1.30), može se zaključiti da za realizaciju frekventno zavisne negativne otpornosti dve impedanse u brojiocu treba da budu kapacitivnog, a sve ostale impedanse rezistivnog karaktera. Na primer:

$$Z_u(j\omega)=\frac{-R_6}{R_3R_5C_2C_4\omega^2}. \tag{3.2.10}$$

Ukoliko u jednom kolu treba realizovati nekoliko FDNR komponenata različitih vrednosti, obično se razlikuje samo po jedan element u svakom GIC konvertoru, a svi ostali elementi imaju iste vrednosti. Na primer, za realizaciju dve FDNR komponente u kolu prikazanom na slici 3.2.4. mogu se izabrati sledeći elementi: $R_3=R_5=R_6=1\Omega$, $C_2=1\,\mathrm{F}$ i $C_4'=1{,}58\,\mathrm{F}$ za jednu, odnosno $C_4''=0{,}38\,\mathrm{F}$ za drugu FDNR komponentu. Kao i u prethodnim realizacijama, vrednosti ovih elemenata se moraju skalirati na nivo koji će biti prihvatljiv za praktičnu realizaciju filtra, ali to nije traženo u tekstu zadatka.

3.3. Zadat je gabarit normalizovanog NF Batervortovog filtra:

$|H(j0{,}5)|^2>0{,}9$ u propusnom opsegu,

$|H(j2)|^2<0{,}02$ u nepropusnom opsegu.

a) Odrediti najmanji potreban red filtra.

b) Sintetisati funkciju prenosa za filtar iz tačke a).

c) Realizovati dobijenu funkciju prenosa u vidu mreže bez gubitaka otvorene na izlaznim krajevima i pobuđene generatorom unutrašnje otpornosti $R_u=1\Omega$.

d) Transformisati pasivno kolo NF filtra iz tačke c) u filtar propusnik opsega učestanosti na centralnoj učestanosti $\omega_0=10\,\mathrm{krad/s}$ sa propusnim opsegom $B=500\,\mathrm{rad/s}$.

e) Izvršiti denormalizaciju učestanosti u funkciji prenosa iz tačke b) za $\omega_D=1\,\mathrm{Mrad/s}$.

f) Funkciju prenosa NF filtra dobijenu u tački e) realizovati u formi aktivnog filtra na bazi tehnike promenljivih stanja.

Rešenje:

a) Na osnovu zadatih gabarita u propusnom i nepropusnom opsegu za normalizovan NF Batervortov filtar dobijaju se sledeći uslovi:

$$|H(j0{,}5)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}>0{,}9 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4^n}<\frac{1}{9} \;\Rightarrow\; n\geq 2, \tag{3.3.1}$$

odnosno:

$$|H(j2)|^2=\frac{1}{1+2^{2n}}<0{,}02 \;\Rightarrow\; 4^n>49 \;\Rightarrow\; n\geq 3. \tag{3.3.2}$$

Najmanji red filtra koji zadovoljava oba gabarita je $n=3$.

b) Zamenom vrednosti $n=3$ u izrazu (3.1.12) za funkciju prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra neparnog reda dobija se:

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+2\sin\frac{\pi}{6}\cdot s+1}=\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}, \tag{3.3.3}$$

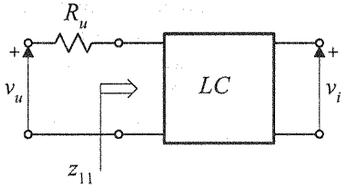
odnosno:

$$H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}. \tag{3.3.4}$$

c) U ovom primeru će zadata funkcija prenosa biti realizovana preko Darlingtonovog kola sa otpornikom na ulaznim krajevima i otvorenim izlaznim krajevima (slika 3.3.1.). Pasivna mreža bez gubitaka će biti realizovana u vidu lestvičaste LC mreže. Uz pretpostavku da je pasivna mreža opisana z-parametrima, funkcija prenosa ovog tipa Darlingtonovih kola će biti, [3]:

$$H(s)=\frac{z_{12}}{1+z_{11}}. \tag{3.3.5}$$

Član $1+z_{11}$ u imeniocu predstavlja rednu vezu otpornika $R_u=1\Omega$ i ulazne impedanse z_{11} pasivne mreže. Sinteza pasivnog kola koje će imati zadatu funkciju prenosa $H(s)$ svodi se na realizaciju ulazne impedanse z_{11}, pri čemu je način na koji će ta impedansa biti realizovana određen brojem konačnih nula funkcije prenosa [3].



Slika 3.3.1.

Parametri z_{11} i z_{12} treba da zadovoljavaju iste osobine koje su bile navedene za parametre y_{22} i y_{21} lestvičastih LC mreža u prethodnim primerima. Prema tome, pošto je

polinom u brojiocu funkcije prenosa (3.3.4) paran polinom ($P(s)$=1), ta funkcija prenosa se može svesti na oblik (3.3.5) samo ako se polinomi u brojiocu i imeniocu podele neparnim delom polinoma iz imenioca te funkcije:

$$H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}=\frac{\frac{1}{s^3+2s}}{1+\frac{2s^2+1}{s^3+2s}}=\frac{z_{12}}{1+z_{11}}. \qquad (3.3.6)$$

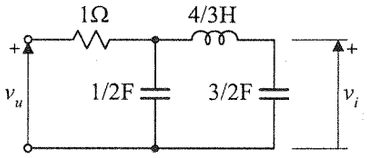
Iz prethodnog izraza se dobija ulazna impedansa lestvičaste LC mreže:

$$z_{11}=\frac{2s^2+1}{s^3+2s}. \qquad (3.3.7)$$

Ova racionalana funkcija predstavlja količnik parnog i neparnog dela Hurvicovog polinoma, što znači da zadovoljava osobine ulazne impedanse lestvičaste LC mreže [4]. Pošto funkcija prenosa (3.3.4) nema konačnih nula, može se zaključiti da ulaznu impedansu treba razvijati u Kauerovu I formu. Međutim, jedan od potrebnih uslova za razvoj proizvoljne ulazne funkcije u Kauerovu I formu je da stepen polinoma u brojiocu te funkcije bude za 1 veći od stepena polinoma u imeniocu. To znači da se u ovom primeru ne može razvijati u Kauerovu I formu impedansa z_{11}, već njena recipročna vrednost:

$$z_{11}=\frac{1}{\frac{s^3+2s}{2s^2+1}}=\frac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{1}{\frac{3}{2}s}}}. \qquad (3.3.8)$$

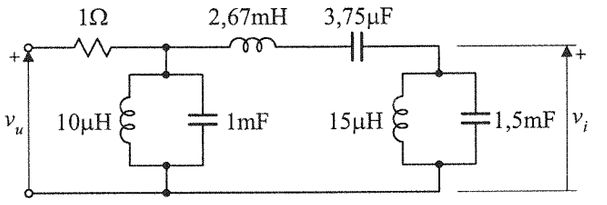
Prvi član u ovom izrazu predstavlja admitansu kondenzatora vrednosti 1/2F koja je paralelno vezana sa impedansom koju čini redna veza induktivnosti 4/3H i kapacitivnosti 3/2F. Ovi elementi se crtaju sa leva u desno, jer je z_{11} ulazna impedansa pasivne mreže. Redosled elemenata u pasivnoj mreži mora da odgovara redosledu koeficijenata u verižnom razlomku, jer se na poslednjem elementu dobija izlazni napon za koji je računata funkcija prenosa. Sa leve strane lestvičaste mreže, na red sa ulaznom impedansom z_{11} se dodaje otpornik R_u=1Ω i tako se dobijaju ulazni priključci filtra na koje se vezuje idealan naponski generator (slika 3.3.2.).



Slika 3.3.2.

Tip funkcije prenosa sintetisanog pasivnog kola uvek se može proveriti na sledeći način. Za jednosmerne i signale veoma niskih učestanosti kondenzatori predstavljaju otvorenu, a induktivnosti kratku vezu, pa će kolo prikazano na slici 3.3.2. da propušta takve ulazne signale na izlaz. Za signale veoma visokih učestanosti kondenzatori predstavljaju kratku, a induktivnosti otvorenu vezu, pa ovo kolo neće propuštati takve signale. Dakle, sintetisano je pasivno kolo koje će se ponašati kao NF filtar, što je i bio cilj u ovom zadatku.

d) Koristeći postupak opisan u zadatku 3.2.c) za transformaciju kola NF filtra u filtar propusnik opsega učestanosti, za zadate vrednosti ω_0=10krad/s i B=500rad/s, dobija se kolo prikazano na slici 3.3.3.



Slika 3.3.3.

e) Zadati gabariti filtara u ovom, kao i u prethodnim zadacima, su normalizovani i po učestanosti i po amplitudi. Normalizovane učestanosti se dobijaju deljenjem svih učestanosti u realnom gabaritu filtra nekom određenom učestanošću, obično graničnom učestanošću tog filtra. To znači da su u funkcijama prenosa koje se određuju na osnovu normalizovanih gabarita, kao što je funkcija (3.3.4), učestanosti takođe normalizovane:

$$H(s_n)=\frac{1}{s_n^3+2s_n^2+2s_n+1}. \qquad (3.3.9)$$

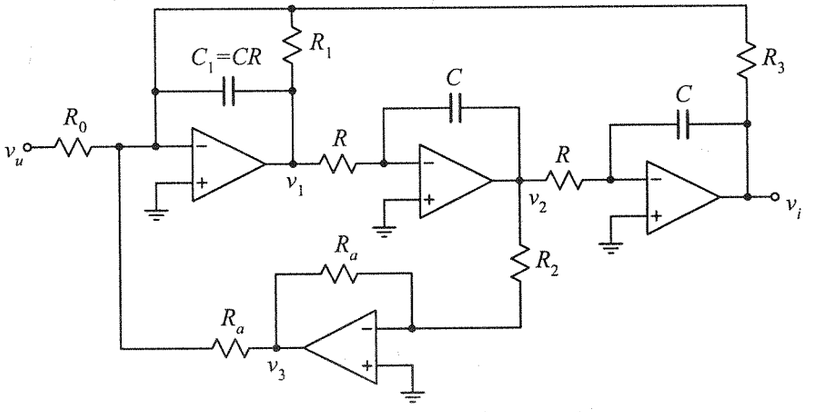
Da bi se izvršila denormalizacija učestanosti za neku određenu vrednost ω_D potrebno je uvesti smenu:

$$s_n=\frac{s}{\omega_D}. \qquad (3.3.10)$$

U ovom primeru je zadato ω_D=1Mrad/s, pa je posle denormalizacije učestanosti funkcija prenosa:

$$H(s)=\frac{10^{18}}{s^3+2s^2 10^6+2s10^{12}+10^{18}}. \qquad (3.3.11)$$

f) Tehnika promenljivih stanja se ubraja u metode direktne realizacije aktivnih filtara na osnovu zadate funkcije prenosa. Iz opšte šeme za realizaciju NF filtra n-tog reda tehnikom promenljivih stanja [6], dobija se šema NF filtra trećeg reda prikazana na slici 3.3.4.



Slika 3.3.4.

Funkcija prenosa ovog kola može se izračunati iz sledećeg sistema jednačina:

$$v_1 = -sCRv_2, \tag{3.3.12}$$

$$v_2 = -sCRv_i, \tag{3.3.13}$$

$$G_a v_3 = -G_2 v_2, \tag{3.3.14}$$

$$G_0 v_u + G_a v_3 + (G_1 + sCR)v_1 + G_3 v_i = 0, \tag{3.3.15}$$

odnosno:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{-G_0}{(sCR)^3+G_1(sCR)^2+G_2(sCR)+G_3}, \tag{3.3.16}$$

gde je $G_i = 1/R_i$, $i = \overline{0,3}$. Izjednačavanjem koeficijenata u ovom izrazu sa koeficijentima u funkciji prenosa (3.3.11) i usvajanjem vrednosti $R_0 = 1\text{k}\Omega$, dobija se uslov $CR = 10^{-7}$. Prema tome, elementi u kolu prikazanom na slici 3.3.4. mogu imati sledeće vrednosti: $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 100\text{nF}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 50\Omega$ i $R_3 = 1\text{k}\Omega$.

3.4. Zadat je gabarit normalizovanog NF Batervortovog filtra:

$|H(j0{,}5)|^2 > 0{,}99$ u propusnom opsegu,

$|H(j2)|^2 < 0{,}02$ u nepropusnom opsegu.

a) Odrediti potreban red i funkciju prenosa filtra koji zadovoljava zadati gabarit.

b) Izvršiti transformaciju filtra iz prethodne tačke u VF filtar sa donjom graničnom učestanošću $\omega_c = 1\text{krad/s}$.

c) Realizovati funkciju prenosa filtra iz tačke b) u vidu mreže bez gubitaka zatvorene na izlaznim krajevima otpornikom $R_p = 1\Omega$.

d) Pasivnu mrežu dobijenu u prethodnoj tački realizovati u direktnoj formi koristeći simulaciju induktivnosti preko žiratora napravljenog na bazi GIC konvertora.

Rešenje:

a) Na osnovu zadatih gabarita u propusnom i nepropusnom opsegu za normalizovan NF Batervortov filtar dobijaju se sledeći uslovi:

$$|H(j0{,}5)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} > 0{,}99 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4^n} < \frac{1}{99} \;\Rightarrow\; n \geq 4, \tag{3.4.1}$$

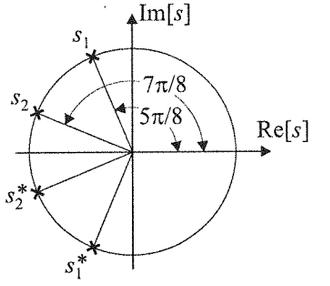
odnosno:

$$|H(j2)|^2 = \frac{1}{1+2^{2n}} < 0{,}02 \;\Rightarrow\; 4^n > 49 \;\Rightarrow\; n \geq 3. \tag{3.4.2}$$

Najmanji red filtra koji zadovoljava oba gabarita je $n = 4$.

Funkcija prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra četvrtog reda u prethodnim primerima je računata zamenom vrednosti $n = 4$ u opštem izrazu za funkciju prenosa za filtre parnog reda. U ovom zadatku će biti pokazano kako se ta funkcija može izračunati samo na osnovu poznatog rasporeda polova u kompleksnoj ravni.

Na osnovu razmatranja u zadatku 3.1, zaključeno je da se polovi funkcije prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra nalaze u levoj polovini kompleksne ravni na jediničnom krugu, da su ekvidistantni i da svaki kompleksan pol ima konjugovano-kompleksan par. Ako levoj poluravni kompleksne učestanosti odgovara ukupan fazni ugao π, rastojanje između susednih polova Batervortovog filtra četvrtog reda mora biti $\pi/4$. Polovi ne mogu biti na imaginarnoj osi zbog stabilnosti kola [2], što znači da su kompleksni, odnosno da postoje dva para konjugovano-kompleksnih polova. Da bi svi ovi uslovi bili zadovoljeni, jedini mogući raspored polova je prikazan na slici 3.4.1. Vrednosti tih polova su:



Slika 3.4.1.

$$s_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + j\sin\frac{5\pi}{8}, \qquad s_1^* = \cos\frac{5\pi}{8} - j\sin\frac{5\pi}{8}, \tag{3.4.3}$$

$$s_2 = \cos\frac{7\pi}{8} + j\sin\frac{7\pi}{8}, \qquad s_2^* = \cos\frac{7\pi}{8} - j\sin\frac{7\pi}{8}. \tag{3.4.4}$$

Polazeći od izraza za funkciju prenosa u faktorizovanom obliku:

$$H(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_1^*)(s-s_2)(s-s_2^*)}, \tag{3.4.5}$$

i grupisanjem po dva faktora sa konjugovano-kompleksnim polovima, dobija se:

$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 - 2\cos\frac{5\pi}{8}\cdot s + 1\right)\left(s^2 - 2\cos\frac{7\pi}{8}\cdot s + 1\right)}, \tag{3.4.6}$$

odnosno:

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2{,}61s^3 + 3{,}41s^2 + 2{,}61s + 1}. \tag{3.4.7}$$

b) U ovom primeru transformacija NF filtra u VF filtar sa donjom graničnom učestanošću $\omega_c = 1\text{krad/s}$ vrši se na nivou funkcije prenosa uvođenjem smene $s \to \frac{\omega_c}{s}$ u izraz (3.4.7):

$$H_{VF}(s) = \frac{1}{\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^4 + 2{,}61\cdot\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^3 + 3{,}41\cdot\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^2 + 2{,}61\cdot\left(\frac{\omega_c}{s}\right) + 1}. \tag{3.4.8}$$

Sređivanjem prethodne jednačine dobija se funkcija prenosa VF filtra:

$$H_{VF}(s)=\frac{s^4}{s^4+2{,}61\cdot10^3 s^3+3{,}41\cdot10^6 s^2+2{,}61\cdot10^9 s+10^{12}}. \qquad (3.4.9)$$

c) Opšti oblik funkcije prenosa Darlingtonovih kola sa otpornikom vrednosti 1Ω na izlaznim krajevima je:

$$H(s)=\frac{-y_{21}}{1+y_{22}}. \qquad (3.4.10)$$

Funkcija prenosa (3.4.9) koju treba realizovati ima paran polinom u brojiocu ($P(s)=s^4$). Da bi ta funkcija bila svedena na prethodni oblik, neophodno je polinome u brojiocu i imeniocu te funkcije podeliti neparnim delom polinoma iz imenioca:

$$H(s)=\frac{\dfrac{s^4}{2{,}61\cdot10^3 s^3+2{,}61\cdot10^9 s}}{1+\dfrac{s^4+3{,}41\cdot10^6 s^2+10^{12}}{2{,}61\cdot10^3 s^3+2{,}61\cdot10^9 s}}. \qquad (3.4.11)$$

Iz izraza (3.4.10) i (3.4.11) se može zaključiti da je izlazna admitansa lestvičaste LC mreže koju treba realizovati:

$$y_{22}=\frac{s^4+3{,}41\cdot10^6 s^2+10^{12}}{2{,}61\cdot10^3 s^3+2{,}61\cdot10^9 s}. \qquad (3.4.12)$$

Pošto je filtar četvrtog reda, a funkcija $H(s)$ treba da ima četvorostruku nulu u koordinatnom početku, u ovom slučaju se razvoj izlazne admitanse vrši isključivo u vidu Kauerove II forme. Potreban uslov za takav razvoj je da polinom u imeniocu funkcije koja se razvija bude neparan [3], što zadovoljava gore izračunata funkcija y_{22}. Tokom razvoja u Kauerovu II formu vrši se izdvajanje koeficijenata uz članove $1/s$, sve dok se polazna funkcija ne svede na verižni razlomak sa po jednim članom u svakom nivou tog razlomka. To znači da broj koraka tokom razvoja u Kauerovu II formu mora da odgovara redu polazne funkcije. Razvoj izlazne admitanse y_{22} izgleda ovako:

$$Y_1=y_{22}=\frac{10^{12}}{2{,}61\cdot10^9 s}+\frac{2{,}41\cdot10^6 s^2+s^4}{2{,}61\cdot10^9 s+2{,}61\cdot10^3 s^3}=\frac{1}{2{,}61\cdot10^{-3} s}+\frac{1}{Z_2}, \qquad (3.4.13)$$

$$Z_2=\frac{2{,}61\cdot10^9+2{,}61\cdot10^3 s^2}{2{,}41\cdot10^6 s+s^3}=\frac{2{,}61\cdot10^9}{2{,}41\cdot10^6 s}+\frac{1{,}53\cdot10^3 s^2}{2{,}41\cdot10^6 s+s^3}=\frac{1}{9{,}24\cdot10^{-4} s}+\frac{1}{Y_3}, \qquad (3.4.14)$$

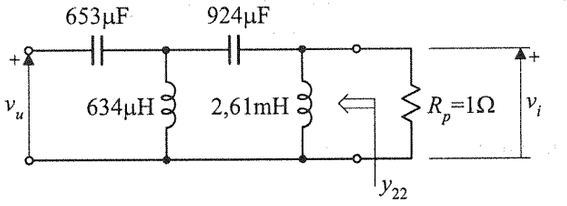
$$Y_3=\frac{2{,}41\cdot10^6+s^2}{1{,}53\cdot10^3 s}=\frac{2{,}41\cdot10^6}{1{,}53\cdot10^3 s}+\frac{s^2}{1{,}53\cdot10^3 s}=\frac{1}{6{,}34\cdot10^{-4} s}+\frac{1}{Z_4}, \qquad (3.4.15)$$

$$Z_4=\frac{1{,}53\cdot10^3}{s}=\frac{1}{6{,}53\cdot10^{-4} s}, \qquad (3.4.16)$$

odnosno, u formi verižnog razlomka:

$$y_{22}=\frac{1}{2{,}61\cdot10^{-3} s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{9{,}24\cdot10^{-4} s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{6{,}34\cdot10^{-4} s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{6{,}53\cdot10^{-4} s}}}}. \qquad (3.4.17)$$

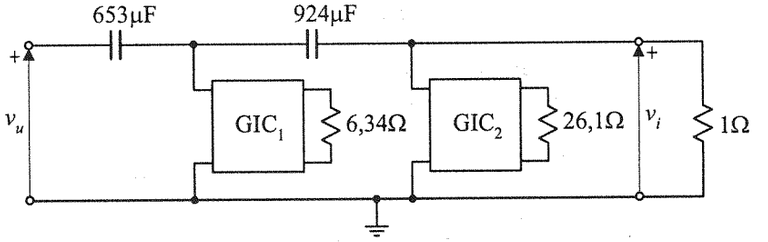
Elementi pasivne mreže se crtaju sa desna u levo redosledom kojim se pojavljuju u verižnom razlomku. Jedan kraj poslednjeg elementa se ostavlja otvoren i predstavlja ulazni priključak filtra, a sa desne strane lestvičaste LC mreže se paralelno vezuje izlazni otpornik R_p (slika 3.4.2.). Smatrajući da kondenzatori u rednim granama predstavljaju otvorenu vezu za signale veoma niskih učestanosti, a kratku vezu za signale visokih učestanosti, može se zaključiti da ova pasivna mreža predstavlja VF filtar.



Slika 3.4.2.

d) U pasivnom kolu VF filtra prikazanom na slici 3.4.2. sve induktivnosti su uzemljene. Korišćenjem GIC konvertora za simulaciju tih induktivnosti direktno se može dobiti realizacija aktivnog filtra sa istom funkcijom prenosa. Šema GIC konvertora, kao i način na koji je potrebno izabrati elemente za simulaciju induktivnosti, opisani su u zadatku 3.1.

Za simulaciju induktivnosti 634μH i 2,61mH u kolu sa slike 3.4.2. mogu se izabrati sledeći elementi u GIC konvertorima: $Z_2=Z_4=Z_3=1\Omega$, $Z_5=\frac{1}{sC_5}$, $C_5=100\mu F$ i $Z_6'=R_6'=6{,}34\Omega$, odnosno $Z_6''=R_6''=26{,}1\Omega$ (slika 3.4.3.).



Slika 3.4.3.

3.5. a) Odrediti potreban red i funkciju prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra koji zadovoljava gabarite:

$|H(j0{,}5)|^2 > 0{,}95$ u propusnom opsegu,

$|H(j2)|^2 < 0{,}02$ u nepropusnom opsegu.

b) Realizovati dobijenu funkciju prenosa u vidu mreže bez gubitaka zatvorene na izlaznim krajevima otpornikom R_p=1kΩ i pobuđene idealnim naponskim generatorom.

c) Pasivno kolo NF filtra iz tačke b) transformisati u filtar propusnik opsega učestanosti na centralnoj učestanosti ω_0=10krad/s sa propusnim opsegom B=1krad/s.

d) Nacrtati kolo KHN filtra i izračunati funkciju prenosa od ulaza sekcije do izlaza na kome se realizuje funkcija prenosa filtra propusnika opsega.

Rešenje:

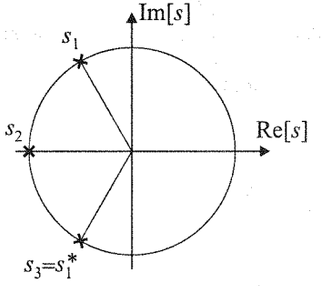
a) Na osnovu zadatih gabarita u propusnom i nepropusnom opsegu za normalizovan NF Batervortov filtar dobijaju se sledeći uslovi:

$$|H(j0{,}5)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} > 0{,}95 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4^n} < \frac{1}{19} \;\Rightarrow\; n \geq 3, \tag{3.5.1}$$

$$|H(j2)|^2 = \frac{1}{1+2^{2n}} < 0{,}02 \;\Rightarrow\; 4^n > 49 \;\Rightarrow\; n \geq 3. \tag{3.5.2}$$

Najmanji red filtra koji zadovoljava oba gabarita je $n=3$.

Funkcija prenosa će biti izračunata na osnovu poznatog položaja polova u kompleksnoj ravni. Slično kao u prethodnom zadatku, može se zaključiti da će polovi funkcije prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra trećeg reda biti na jediničnom krugu u levoj polovini kompleksne ravni, na jednakim međusobnim rastojanjima π/3. Jedan pol mora biti realan, znači nalazi se u tački (−1,0), a preostala dva pola čine konjugovano-kompleksan par sa faznim uglovima ±π/3 u odnosu na negativan deo realne ose (slika 3.5.1.). Vrednosti polova su:



Slika 3.5.1.

$$s_{1,3} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{3.5.3}$$

$$s_2 = -1, \tag{3.5.4}$$

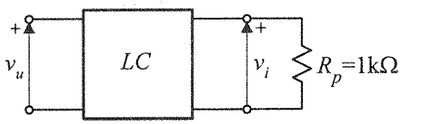
pa je funkcija prenosa ovog filtra:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}, \tag{3.5.5}$$

odnosno:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}. \tag{3.5.6}$$

b) U ovom primeru će zadata funkcija prenosa prvo biti realizovana preko Darlingtonovog kola zatvorenog otpornikom vrednosti 1Ω na izlaznim krajevima, a zatim će impedanse u tom kolu biti skalirane na nivo R_p=1kΩ (slika 3.5.2.).



Slika 3.5.2.

Prema postupku koji je ranije opisan, zadata funkcija prenosa se transformiše na sledeći način:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s^3+2s}}{1+\frac{2s^2+1}{s^3+2s}} = \frac{-y_{21}}{1+y_{22}}, \tag{3.5.7}$$

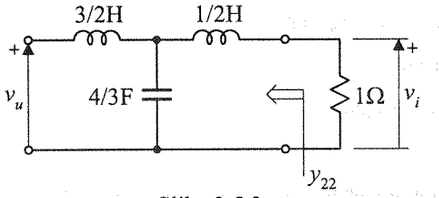
tako da se može odrediti vrednost izlazne admitanse lestvičaste LC mreže:

$$y_{22} = \frac{2s^2+1}{s^3+2s}. \tag{3.5.8}$$

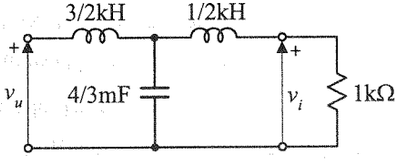
Pošto funkcija prenosa nema konačnih nula, može se zaključiti da izlaznu admitansu treba razvijati u Kauerovu I formu. Stepen polinoma u brojiocu izlazne admitanse je manji od stepena polinoma u imeniocu, pa se u ovom primeru ne može razvijati u Kauerovu I formu admitansa y_{22}, već njena recipročna vrednost:

$$y_{22} = \frac{1}{\frac{s^3+2s}{2s^2+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{1}{\frac{3}{2}s}}}. \tag{3.5.9}$$

Verižni razlomak u imeniocu ovog izraza je po prirodi impedansa, pa je prvi element induktivnost vrednosti 1/2H vezana na red sa ostalim elementima (slika 3.5.3.). Kondenzatori u paralelnim i induktivnosti u rednim granama ove mreže ukazuju da je sintetisano kolo NF filtra. Po uslovu zadatka, ostaje još da se impedanse skaliraju na nivo nivo R_p=1kΩ (slika 3.5.4.).

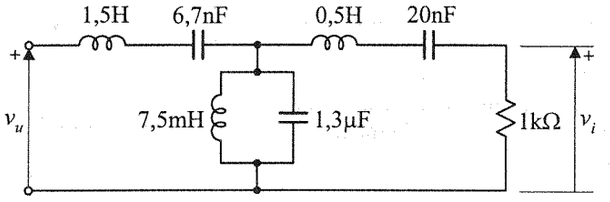


Slika 3.5.3.



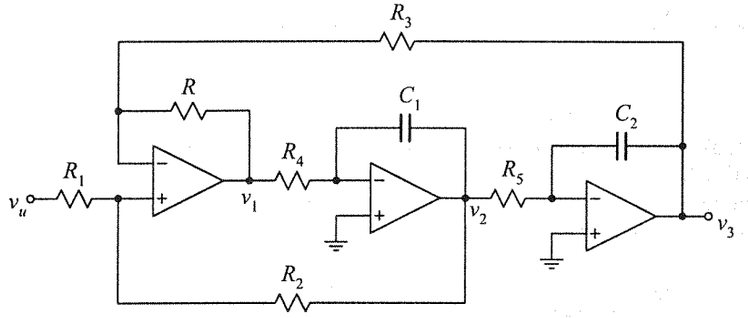
Slika 3.5.4.

c) Koristeći smenu $s \to \frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}$ za transformaciju elemenata NF filtra prikazanog na slici 3.5.4. i zadate vrednosti ω_0=10krad/s i B=1krad/s, dobija se kolo filtra propusnika opsega učestanosti prikazano na slici 3.5.5.



Slika 3.5.5.

d) Na slici 3.5.6. je prikazana bikvadratna sekcija KHN filtra (naziv je dobila prema početnim slovima prezimena autora *Kerwin*, *Huelsman*, *Newcomb* [5]). Svi tipovi funkcija prenosa koji se mogu realizovati korišćenjem ove sekcije biće izračunati u zadatku 3.18.



Slika 3.5.6

Funkcija prenosa filtra propusnika opsega učestanosti dobija se na izlazu v_2:

$$H_2(s)=\frac{v_2}{v_u}=\frac{-R_2(R+R_3)}{R(R_1+R_2)}\cdot\frac{sC_2R_5}{s^2\dfrac{C_1C_2R_3R_4R_5}{R}+sC_2R_5\dfrac{R_1(R+R_3)}{R(R_1+R_2)}+1}. \qquad (3.5.10)$$

3.6 Zadat je gabarit normalizovanog NF Batervortovog filtra:

$|H(j0{,}5)|^2 > 0{,}9$ u propusnom opsegu,

$|H(j2)|^2 < 0{,}015$ u nepropusnom opsegu.

a) Odrediti najmanji potreban red filtra.

b) Odrediti funkciju prenosa NF filtra iz prethodne tačke. Izvršiti transformaciju NF filtra u normalizovan VF filtar.

c) Realizovati dobijenu funkciju prenosa VF filtra u vidu mreže bez gubitaka otvorene na izlaznim krajevima i pobuđene generatorom unutrašnje otpornosti R_u=1Ω. Skalirati impedanse na nivo R_u=1kΩ.

d) U pasivnom kolu VF filtra iz tačke c) izvršiti denormalizaciju učestanosti tako da donja granična učestanost filtra bude ω_g=100krad/s.

e) Funkciju prenosa VF filtra iz tačke d) realizovati u formi aktivnog filtra korišćenjem KHN sekcija.

Rešenje:

a) Na osnovu zadatih gabarita u propusnom i nepropusnom opsegu za normalizovan NF Batervortov filtar dobijaju se sledeći uslovi:

$$|H(j0{,}5)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}>0{,}9 \Rightarrow \frac{1}{4^n}<\frac{1}{9} \Rightarrow n\geq 2, \qquad (3.6.1)$$

$$|H(j2)|^2=\frac{1}{1+2^{2n}}<0{,}015 \Rightarrow 4^n>65{,}67 \Rightarrow n\geq 4. \qquad (3.6.2)$$

Najmanji red filtra koji zadovoljava oba gabarita je $n=4$.

b) Funkcija prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra četvrtog reda izračunata je u zadatku 3.1:

$$H(s)=\frac{1}{(s^2+0{,}76s+1)(s^2+1{,}85s+1)}=\frac{1}{s^4+2{,}61s^3+3{,}41s^2+2{,}61s+1}. \qquad (3.6.3)$$

Smenom $s \to \frac{1}{s}$ ta funkcija se transformiše u funkciju prenosa normalizovanog VF filtra:

$$H(s)=\frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)^4+2{,}61\cdot\left(\frac{1}{s}\right)^3+3{,}41\cdot\left(\frac{1}{s}\right)^2+2{,}61\cdot\left(\frac{1}{s}\right)+1}, \qquad (3.6.4)$$

$$H(s)=\frac{s^4}{s^4+2{,}61s^3+3{,}41s^2+2{,}61s+1}. \qquad (3.6.5)$$

c) Sinteza pasivne mreže bez gubitaka otvorene na izlaznim krajevima i pobuđene generatorom unutrašnje otpornosti R_u=1Ω vrši se prema postupku koji je opisan u zadatku 3.3. Funkciju prenosa (3.6.5) treba svesti na sledeći oblik:

$$H(s)=\frac{\dfrac{s^4}{2{,}61s^3+2{,}61s}}{1+\dfrac{s^4+3{,}41s^2+1}{2{,}61s^3+2{,}61s}}=\frac{z_{12}}{1+z_{11}}. \qquad (3.6.6)$$

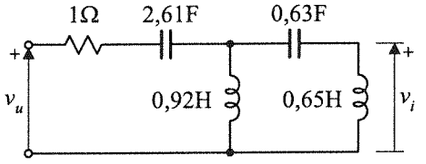
Odavde sledi da je ulazna impedansa pasivne mreže:

$$z_{11}=\frac{s^4+3{,}41s^2+1}{2{,}61s^3+2{,}61s}. \tag{3.6.7}$$

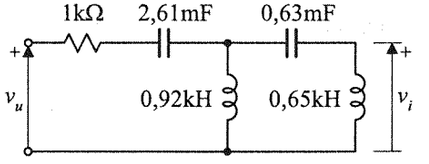
Funkcija prenosa (3.6.5) je četvrtog reda i ima četvorostruku nulu u koordinatnom početku, što znači da ulaznu impedansu treba razvijati u vidu Kauerove II forme. Polinom u imeniocu ulazne impedanse z_{11} je neparan, tako da se direktno može razvijati z_{11}. Postupak razvijanja je isti kao u zadatku 3.4, tako da se na kraju dobija izraz:

$$z_{11}=\cfrac{1}{2{,}61s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}92s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}63s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}65s}}}}. \tag{3.6.8}$$

Prvi element u razvoju impedanse z_{11} je kapacitivnost 2,61F vezana na red sa ostalim elementima koji su naizmenično induktivnosti u paralelnim i kapacitivnosti u rednim granama lestvičaste mreže (slika 3.6.1.). Posle skaliranja impedansi na nivo R_u=1kΩ kolo čija je funkcija prenosa zadata jednačinom (3.6.5) izgleda kao na slici 3.6.2.



Slika 3.6.1.



Slika 3.6.2.

d) U zadatku 3.3. je opisan postupak denormalizacije učestanosti odgovarajućom transformacijom funkcije prenosa. Denormalizacija učestanosti se može izvršiti i transformacijom elemenata u pasivnom kolu. Smatrajući da je pasivno kolo realizovano na osnovu gabarita normalizovanih u odnosu na graničnu učestanost filtra, impedansa induktivnosti u takvom kolu je:

$$s_nL=\frac{s}{\omega_g}L=s\frac{L}{\omega_g}. \tag{3.6.9}$$

To znači da realnim učestanostima odgovaraju induktivnosti $\frac{L}{\omega_g}$, odnosno da denormalizacija učestanosti može da se obavi deljenjem svih induktivnosti u kolu sa ω_g=100krad/s. Slično se može zaključiti posmatranjem izraza za impedansu kondenzatora:

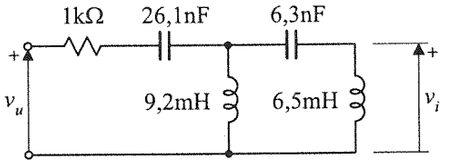
$$\frac{1}{s_nC}=\frac{1}{\frac{s}{\omega_g}C}=\frac{1}{s\frac{C}{\omega_g}}. \tag{3.6.10}$$

Primenom ovog postupka na elemente kola prikazanog na slici 3.6.2. dobijaju se nove vrednosti elemenata VF filtra sa donjom graničnom učestanošću ω_g=100krad/s:

$$L_2=\frac{0{,}92\cdot10^3}{100\cdot10^3}=9{,}2\text{mH},\ L_4=\frac{0{,}65\cdot10^3}{100\cdot10^3}=6{,}5\text{mH}, \tag{3.6.11}$$

$$C_1=\frac{2{,}61\cdot10^{-3}}{100\cdot10^3}=26{,}1\text{nF},\ C_3=\frac{0{,}63\cdot10^{-3}}{100\cdot10^3}=6{,}3\text{nF}. \tag{3.6.12}$$

odnosno, dobija se kolo prikazano na slici 3.6.3.

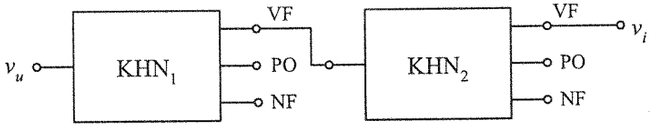


Slika 3.6.3.

e) Bikvadratna sekcija KHN filtra prikazana je na slici 3.5.6. u prethodnom zadatku. Funkcija prenosa filtra propusnika visokih učestanosti se dobija na izlazu v_1 te sekcije:

$$H_1(s)=\frac{v_1}{v_u}=\frac{R_2(R+R_3)}{R(R_1+R_2)}\cdot\frac{s^2C_1C_2R_4R_5}{s^2C_1C_2\frac{R_3R_4R_5}{R}+sC_2\frac{R_1R_5(R+R_3)}{R(R_1+R_2)}+1}. \tag{3.6.13}$$

Pošto je ovo funkcija drugog reda, za realizaciju VF filtra iz tačke d) koji je četvrtog reda potrebno je kaskadno vezati dve ovakve sekcije (slika 3.6.4.).



Slika 3.6.4.

VF filtar iz tačke d) ima donju graničnu učestanost ω_g=100krad/s i funkciju prenosa koja odgovara Batervortovoj aproksimaciji četvrtog reda. Najjednostavniji način da se odrede funkcije prenosa KHN sekcija koje su potrebne za realizaciju tog filtra je da se direktno u faktorizovani izraz (3.6.3) za funkciju prenosa normalizovanog Batervortovog NF filtra uvede smena $s\to\frac{\omega_g}{s}$:

$$H(s)=\frac{1}{\left(\frac{\omega_g}{s}\right)^2+0{,}76\frac{\omega_g}{s}+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\omega_g}{s}\right)^2+1{,}85\frac{\omega_g}{s}+1}, \tag{3.6.14}$$

odnosno:

$$H(s)=\frac{s^2}{\left(\frac{s}{\omega_g}\right)^2+0{,}76\frac{s}{\omega_g}+1}\cdot\frac{s^2}{\left(\frac{s}{\omega_g}\right)^2+1{,}85\frac{s}{\omega_g}+1}. \tag{3.6.15}$$

Izjednačavanjem koeficijenata u izrazima (3.6.13) i (3.6.15) dobijaju se vrednosti elemenata u KHN sekcijama. Očigledno je broj slobodnih promenljivih u izrazu (3.6.13) veći od broja koeficijenata u izrazu (3.6.15), tako da se neki elementi mogu slobodno izabrati. Na primer, usvajanjem vrednosti $R=R_1=R_2=R_3=1\text{k}\Omega$, dobijaju se vrednosti za $C_2R_5=0{,}76\cdot10^{-5}$ i $C_1R_4=1{,}32\cdot10^{-5}$, odnosno $C_2=7{,}6\text{nF}$, $R_5=1\text{k}\Omega$, $C_1=13{,}2\text{nF}$ i $R_4=1\text{k}\Omega$ za prvu KHN sekciju. Slično se za drugu KHN sekciju mogu izabrati vrednosti elemenata: $R=R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=1\text{k}\Omega$, $C_2=18{,}5\text{nF}$ i $C_1=5{,}4\text{nF}$.

3.7. Projektovati niskopropusni filtar koji će na učestanostima manjim od $f_1=5\text{kHz}$ imati slabljenje naponske funkcije prenosa manje od 0,8dB, a na učestanostima većim od $f_2=20\text{kHz}$ slabljenje veće od 20dB.

a) Odrediti gabarite normalizovanog NF filtra koji odgovara zadatim specifikacijama. Smatrati da je učestanost za koju se vrši normalizacija geometrijska sredina učestanosti f_1 i f_2.

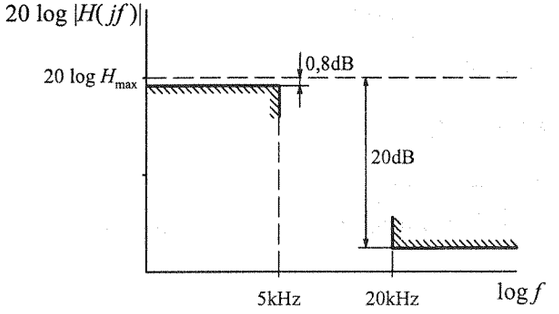
b) Odrediti potreban red i funkciju prenosa normalizovanog Batervortovog NF filtra koji zadovoljava gabarite određene u tački a).

c) Realizovati dobijenu funkciju prenosa u vidu mreže bez gubitaka otvorene na izlaznim krajevima i pobuđene naponskim generatorom unutrašnje otpornosti $R_g=1\text{k}\Omega$.

d) Transformisati pasivno kolo iz tačke c) tako da funkcija prenosa zadovoljava zadate specifikacije na učestanostima f_1 i f_2. Objasniti kako se na osnovu dobijenog pasivnog kola može izvršiti direktna realizacija aktivnog filtra sa tom funkcijom prenosa ako je na ulazu kola isti pobudni generator.

Rešenje:

a) Gabarit ovog NF filtra je zadat preko specifikacija za naponsku funkciju prenosa i realne učestanosti (slika 3.7.1.). Da bi se dobio gabarit normalizovanog NF filtra potrebno je izvršiti normalizaciju zadatog gabarita i po amplitudi i po učestanosti.



Slika 3.7.1.

Na učestanostima manjim od $f_1=5\text{kHz}$ slabljenje naponske funkcije prenosa, odnosno odstupanje modula funkcije prenosa u odnosu na maksimalnu vrednost $H_{\max}=|H(jf)|_{f_{\max}}$ u propusnom opsegu filtra, treba da bude manje od 0,8dB:

$$20\log H_{\max}-20\log|H(jf_1)|\le 0{,}8\text{dB}\,, \tag{3.7.1}$$

$$\frac{H_{\max}}{|H(jf_1)|}\le 10^{0{,}04}\;\Rightarrow\;\frac{|H(jf_1)|}{H_{\max}}\ge 0{,}912\,. \tag{3.7.2}$$

Deljenje modula funkcije prenosa na proizvoljnoj učestanosti maksimalnom vrednošću modula te funkcije predstavlja normalizaciju po amplitudi. Obično se gabariti normalizovanih NF filtara definišu za kvadrat modula funkcije prenosa, pa se za zadati filtar dobija prvi gabarit normalizovan po amplitudi:

$$|H_n(jf_1)|^2\ge 0{,}832\,. \tag{3.7.3}$$

Na isti način se može dobiti i drugi gabarit normalizovan po amplitudi:

$$20\log H_{\max}-20\log|H(jf_2)|\ge 20\text{dB}\;\Rightarrow\;\frac{|H(jf_2)|}{H_{\max}}\le 0{,}1\,, \tag{3.7.4}$$

odnosno:

$$|H_n(jf_2)|^2\le 0{,}01\,. \tag{3.7.5}$$

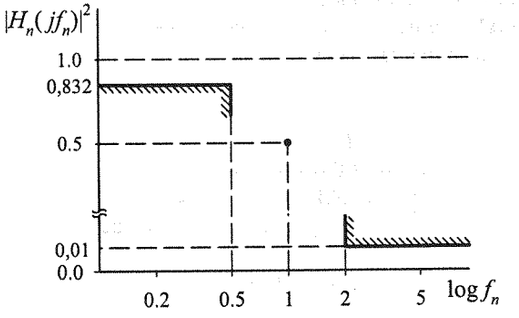
U tekstu zadatka se zahteva da učestanost za koju se vrši normalizacija gabarita po učestanosti bude geometrijska sredina f_1 i f_2, tj. $f_0=\sqrt{f_1f_2}=\sqrt{5\cdot20}\text{kHz}=10\text{kHz}$. Prema tome, normalizovane učestanosti u gabaritu su:

$$f_{1n}=\frac{f_1}{f_0}=0{,}5\,,\quad f_{2n}=\frac{f_2}{f_0}=2\,, \tag{3.7.6}$$

odnosno, normalizovani gabariti NF filtra (slika 3.7.2.), su:

$$|H_n(j0{,}5)|^2\ge 0{,}832\,, \tag{3.7.7}$$

$$|H_n(j2)|^2\le 0{,}01\,. \tag{3.7.8}$$



Slika 3.7.2.

b) Na osnovu izračunatih gabarita za normalizovan NF filtar dobijaju se uslovi:

$$|H_n(jf_{1n})|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \geq 0{,}832 \Rightarrow \frac{1}{4^n} \leq 0{,}202 \Rightarrow n \geq 2, \qquad (3.7.9)$$

$$|H_n(jf_{2n})|^2 = \frac{1}{1+2^{2n}} \leq 0{,}01 \Rightarrow 4^n \geq 99 \Rightarrow n \geq 4. \qquad (3.7.10)$$

Minimalni red normalizovanog Batervortovog NF filtra koji zadovoljava ove gabarite je $n=4$, a funkcija prenosa:

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2{,}61s^3 + 3{,}41s^2 + 2{,}61s + 1}. \qquad (3.7.11)$$

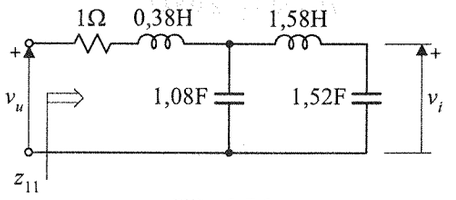
c) Sinteza pasivnog kola bez gubitaka sa otvorenim izlaznim krajevima i otpornikom $R_{gn}=1\Omega$ na ulazu, koje će imati funkciju prenosa izračunatu u prethodnoj tački, obavlja se na način opisan u prethodnim zadacima. Transformacijom funkcije prenosa:

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{2{,}61s^3 + 2{,}61s}}{1 + \dfrac{s^4 + 3{,}41s^2 + 1}{2{,}61s^3 + 2{,}61s}} = \frac{z_{12}}{1+z_{11}}, \qquad (3.7.12)$$

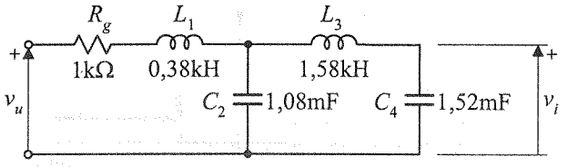
određuje se ulazna impedansa pasivne mreže z_{11}. S obzirom da funkcija prenosa nema konačnih nula, ulazna impedansa se razvija u Kauerovu I formu:

$$z_{11} = 0{,}38s + \cfrac{1}{1{,}08s + \cfrac{1}{1{,}58s + \cfrac{1}{1{,}52s}}}. \qquad (3.7.13)$$

Lestvičasta mreža sintetisana na osnovu ovog razvoja sa otpornikom $R_{gn}=1\Omega$ na ulazu prikazana je na slici 3.7.3. Pošto je po uslovu zadatka unutrašnja otpornost pobudnog generatora $R_g=1\text{k}\Omega$, potrebno je skalirati sve impedanse na taj nivo (slika 3.7.4.).

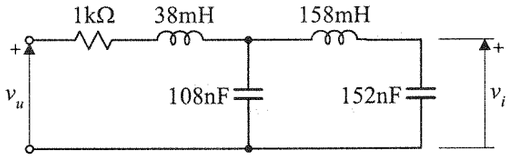


Slika 3.7.3



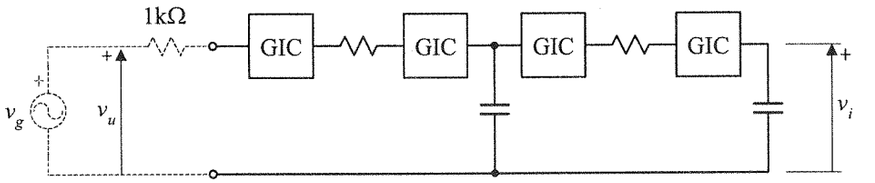
Slika 3.7.4.

d) Pasivno kolo sintetisano u prethodnoj tački ima funkciju prenosa zadatu izrazom (3.7.11) koja je izračunata je za normalizovane učestanosti i nije se promenila nakon skaliranja impedansi. Da bi ta funkcija zadovoljavala specifikacije na učestanostima f_1 i f_2 zadate u tekstu zadatka, mora se izvršiti denormalizacija učestanosti. U tački a) je za normalizaciju učestanosti korišćena konstanta $f_0=10\text{kHz}$, pa se ta ista konstanta koristi i za denormalizaciju učestanosti. Primenom postupka opisanog u zadatku 3.6. na elemente kola sa slike 3.7.4. dobijaju se nove vrednosti: $L_1' = \frac{0{,}38\cdot 10^3}{10\cdot 10^3} = 38\text{mH}$, $C_2' = \frac{1{,}08\cdot 10^{-3}}{10\cdot 10^3} = 108\text{nH}$, $L_3' = \frac{1{,}58\cdot 10^3}{10\cdot 10^3} = 158\text{mH}$ i $C_4' = \frac{1{,}52\cdot 10^{-3}}{10\cdot 10^3} = 152\text{nH}$ (slika 3.7.5.).



Slika 3.7.5.

Induktivnosti u pasivnom kolu prikazanom na slici 3.7.5. su u rednim granama, pa bi se direktna realizacija aktivnog filtra mogla izvršiti deljenjem svih impedansi sa s i korišćenjem FDNR komponenata. Međutim, prilikom sinteze tog pasivnog kola u funkciju prenosa je uračunata unutrašnja otpornost pobudnog naponskog generatora $R_g=1\text{k}\Omega$ čija se vrednost ne može menjati, niti se može transformisati u odgovarajuću kapacitivnost. Zbog toga se svaka neuzemljena induktivnost u kolu sa slike 3.7.5. mora simulirati korišćenjem dva GIC konvertora i otpornika [5], kao što je prikazano na slici 3.7.6. Ostali elementi zadržavaju vrednosti iz pasivnog kola.



Slika 3.7.6.

3.8. Projektovati filtar propusnik niskih učestanosti koji zadovoljava sledeće specifikacije:

- gornja granična učestanost je $f_0=20\text{kHz}$;
- slabljenje naponske funkcije prenosa za $f<f_1=10\text{kHz}$ je manje od 0,5dB;
- slabljenje naponske funkcije prenosa za $f>f_2=40\text{kHz}$ je veće od 25dB.

a) Odrediti gabarite normalizovanog NF filtra koji odgovara zadatim specifikacijama.

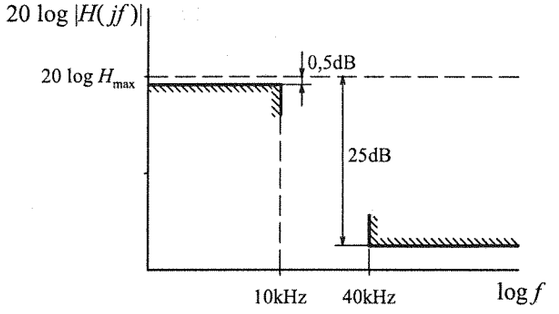
b) Odrediti potreban red i funkciju prenosa Batervortovog normalizovanog NF filtra koji zadovoljava gabarite određene u tački a).

c) Realizovati dobijenu funkciju prenosa NF filtra u vidu mreže bez gubitaka koja se pobuđuje naponskim generatorom unutrašnje otpornosti $R_g=1\Omega$.

d) Predložiti aktivnu realizaciju filtra sa minimalnim brojem operacionih pojačavača koji će imati funkciju prenosa izračunatu u tački b). Nije potrebno računati vrednosti elemenata u predloženom kolu.

Rešenje:

a) Specifikacije NF filtra koji treba projektovati prikazane su na slici 3.8.1. Za određivanje normalizovanih gabarita ovog filtra potrebno je izvršiti normalizaciju učestanosti i modula funkcije prenosa.



Slika 3.8.1.

Gornja granična učestanost ovog NF filtra je $f_0=20$kHz, pa se normalizacija učestanosti vrši deljenjem svih učestanosti sa f_0. To znači da su normalizovane učestanosti koje definišu gabarit $f_{1n}=f_1/f_0=0,5$ i $f_{2n}=f_2/f_0=2$.

Normalizacija modula funkcije prenosa vrši se kao u prethodnom zadatku. Maksimalno dozvoljeno slabljenje za $f<f_1$ treba da bude:

$$20\log\frac{H_{\max}}{|H(jf_{1n})|}\le 0,5\text{dB} \;\Rightarrow\; \frac{H_{\max}}{|H(jf_{1n})|}\le 1,059, \tag{3.8.1}$$

odnosno, prvi gabarit normalizovanog NF filtra je:

$$|H_n(jf_{1n})|^2=|H_n(j0,5)|^2\ge 0,891. \tag{3.8.2}$$

Slično se određuje i drugi gabarit normalizovanog NF filtra:

$$20\log\frac{H_{\max}}{|H(jf_{2n})|}\ge 25\text{dB} \;\Rightarrow\; \frac{H_{\max}}{|H(jf_{2n})|}\ge 17,783, \tag{3.8.3}$$

odnosno:

$$|H_n(jf_{2n})|^2=|H_n(j2)|^2\le 3,16\cdot 10^{-3}. \tag{3.8.4}$$

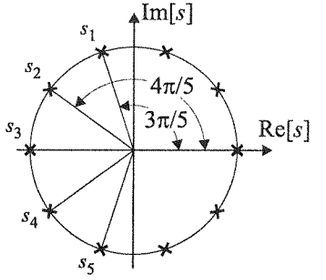
b) Minimalan red normalizovanog NF Batervortovog filtra koji zadovoljava gabarite (3.8.2) i (3.8.4) se određuje iz sledećih izraza:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}\ge 0,891 \;\Rightarrow\; 4^n\ge 8,19 \;\Rightarrow\; n\ge 2, \tag{3.8.5}$$

$$\frac{1}{1+2^{2n}}\le 3,16\cdot 10^{-3} \;\Rightarrow\; 4^n\ge 3,154\cdot 10^2 \;\Rightarrow\; n\ge 5, \tag{3.8.6}$$

što znači da se mora usvojiti $n=5$.

Funkcija prenosa normalizovanog NF Batervortovog filtra petog reda može se odrediti na osnovu poznatog rasporeda polova u kompleksnoj ravni. Jedan pol mora biti na realnoj osi u tački -1, jer je red filtra neparan, dok će ostali polovi biti na jediničnom krugu na jednakim međusobnim rastojanjima od $\pi/5$, simetrično raspoređeni u odnosu na taj realan pol (slika 3.8.2.). Na osnovu toga se mogu odrediti vrednosti svih polova:



Slika 3.8.2.

$$s_{1,5}=\cos\frac{3\pi}{5}\pm j\sin\frac{3\pi}{5}=-0,31\pm j0,95, \tag{3.8.7}$$

$$s_{2,4}=\cos\frac{4\pi}{5}\pm j\sin\frac{4\pi}{5}=-0,81\pm j0,59, \tag{3.8.8}$$

$$s_3=-1, \tag{3.8.9}$$

odnosno, izraz za funkciju prenosa:

$$H(s)=\frac{1}{(s+0,31-j0,95)(s+0,31+j0,95)(s+0,81-j0,59)(s+0,81+j0,59)(s+1)}, \tag{3.8.10}$$

$$H(s)=\frac{1}{(s^2+0,62s+1)(s^2+1,62s+1)(s+1)}, \tag{3.8.11}$$

$$H(s)=\frac{1}{s^5+3,24s^4+5,24s^3+5,24s^2+3,24s+1}. \tag{3.8.12}$$

c) Postupak sinteze pasivne mreže bez gubitaka koja se pobuđuje naponskim generatorom unutrašnje otpornosti $R_g=1\Omega$ i treba da ima zadatu funkciju prenosa detaljno je opisan u zadatku 3.3. Transformacijom izraza za funkciju prenosa (3.8.12) može se odrediti ulazna impedansa pasivne mreže:

$$H(s)=\frac{\dfrac{1}{s^5+5,24s^3+3,24s}}{1+\dfrac{3,24s^4+5,24s^2+1}{s^5+5,24s^3+3,24s}}=\frac{z_{12}}{1+z_{11}}, \tag{3.8.13}$$

$$z_{11}=\frac{3,24s^4+5,24s^2+1}{s^5+5,24s^3+3,24s}. \tag{3.8.14}$$

Zadata funkcija prenosa je petog reda i nema konačnih nula, pa ulaznu impedansu treba razviti u Kauerovu I formu. Pošto je polinom u imeniocu racionalne funkcije opisane izrazom (3.8.14) većeg reda od polinoma u brojiocu, u Kauerovu I formu se razvija njena recipročna vrednost:

$$Y_1 = \frac{1}{z_{11}} = \frac{s^5 + 5{,}24s^3 + 3{,}24s}{3{,}24s^4 + 5{,}24s^2 + 1} = 0{,}31s + \frac{1}{Z_2}, \tag{3.8.15}$$

$$Z_2 = \frac{3{,}24s^4 + 5{,}24s^2 + 1}{3{,}62s^3 + 2{,}93s} = 0{,}89s + \frac{1}{Y_3}, \tag{3.8.16}$$

$$Y_3 = \frac{3{,}62s^3 + 2{,}93s}{2{,}62s^2 + 1} = 1{,}38s + \frac{1}{Z_4}, \tag{3.8.17}$$

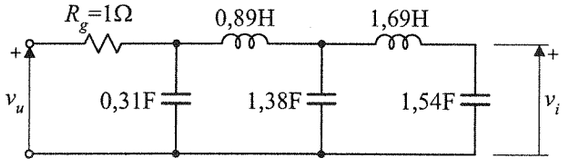
$$Z_4 = \frac{2{,}62s^2 + 1}{1{,}54s} = 1{,}69s + \frac{1}{Y_5}, \tag{3.8.18}$$

$$Y_5 = 1{,}54s\,. \tag{3.8.19}$$

Na osnovu ovog razvoja se može napisati izraz za ulaznu impedansu pasivne mreže:

$$z_{11} = \cfrac{1}{0{,}31s + \cfrac{1}{0{,}89s + \cfrac{1}{1{,}38s + \cfrac{1}{1{,}69s + \cfrac{1}{1{,}54s}}}}}, \tag{3.8.20}$$

odnosno, mogu se odrediti elementi lestvičaste LC mreže (slika 3.8.3.). U sintetisanom kolu ima pet reaktivnih elemenata, pri čemu su sve kapacitivnosti u paralelnim, a sve induktivnosti u rednim granama, što ukazuje da ovo kolo predstavlja NF filtar petog reda.



Slika 3.8.3.

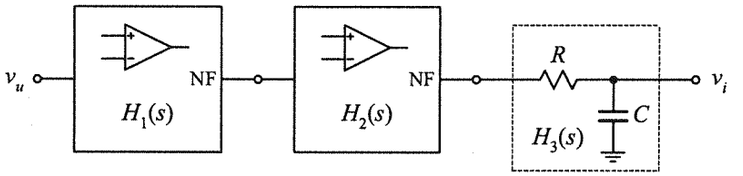
d) Na osnovu izraza (3.8.11) za funkciju prenosa NF filtra u faktorizovanom obliku može se zaključiti da je za aktivnu realizaciju takvog filtra potrebno kaskadno vezati dve sekcije drugog i jednu sekciju prvog reda čije su funkcije prenosa:

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}62s + 1}, \tag{3.8.21}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1.62s + 1}, \tag{3.8.22}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{s+1}. \tag{3.8.23}$$

Da bi broj operacionih pojačavača bio minimalan, sekcije drugog reda treba realizovati korišćenjem bikvadratnih sekcija sa jednim operacionim pojačavačem. Takva sekcija mora da ima mogućnost realizacije NF filtra, kao na primer sekcija sa RC kolom u grani pozitivne reakcije. Sekcija prvog reda se može realizovati bez operacionih pojačavača, korišćenjem proste *RC* mreže prvog reda koja ima funkciju prenosa NF tipa (slika 3.8.4.).



Slika 3.8.4.

3.9. Projektovati filtar propusnik visokih učestanosti koji zadovoljava specifikacije:

- donja granična učestanost je f_0=10kHz;
- slabljenje naponske funkcije prenosa za učestanosti $f < f_1$ =5kHz je veće od 22dB;
- slabljenje naponske funkcije prenosa za učestanosti $f > f_2$ =20kHz je manje od 1dB.

a) Odrediti gabarite normalizovanog VF filtra koji odgovara zadatim specifikacijama, a zatim izračunati gabarite odgovarajućeg normalizovanog NF filtra.

b) Odrediti potreban red i funkciju prenosa Batervortovog normalizovanog NF filtra koji zadovoljava gabarite određene u tački a).

c) Realizovati dobijenu funkciju prenosa NF filtra u vidu mreže bez gubitaka zatvorene na izlaznim krajevima otpornikom R_p =1Ω i pobuđene idealnim naponskim generatorom.

d) Transformacijom pasivnog kola iz tačke c) i korišćenjem žiratora realizovati aktivni VF filtar koji zadovoljava zadate specifikacije. Impedanse skalirati faktorom R_0 =1kΩ.

Rešenje:

a) Postupak određivanja gabarita normalizovanog VF filtra je isti kao postupak korišćen u zadacima 3.7. i 3.8. za NF filtre, samo što se razlikuju uslovi za propusni i nepropusni opseg filtra. Prema tekstu zadatka, za učestanosti manje od f_1 slabljenje naponske funkcije prenosa filtra treba da bude veće od 22dB:

$$20\log|H_{\max}| - 20\log|H(jf_1)| \geq 22\text{dB} \Rightarrow |H(jf_1)| \leq 0{,}079 \cdot |H_{\max}|, \tag{3.9.1}$$

odnosno:

$$|H_n(jf_1)|^2 \leq 6{,}31 \cdot 10^{-3}. \tag{3.9.2}$$

Za učestanosti veće od f_2 slabljenje naponske funkcije prenosa filtra treba da bude manje od 1dB, jer je u pitanju VF filtar:

$$20\log|H_{\max}(jf)| - 20\log|H(jf_2)| \leq 1\text{dB} \Rightarrow |H(jf_2)| \geq 0{,}891 \cdot |H_{\max}|, \tag{3.9.3}$$

odnosno:

$$|H_n(jf_2)|^2 \geq 0{,}794\,. \tag{3.9.4}$$

Normalizovan filtar treba da ima graničnu učestanost $f_{0n}=1$. U ovom slučaju se normalizacija učestanosti vrši za donju graničnu učestanost VF filtra, tako da se dobija $f_{1n}=f_1/f_0=0{,}5$ i $f_{2n}=f_2/f_0=2$. Gabariti normalizovanog VF filtra (slika 3.9.1.), su:

$$|H_n(jf_{1n})|^2 = |H_n(j0{,}5)|^2 \leq 6{,}31\cdot 10^{-3}, \tag{3.9.5}$$

$$|H_n(jf_{2n})|^2 = |H_n(j2)|^2 \geq 0{,}794\,. \tag{3.9.6}$$

U prethodnim zadacima su pokazane transformacije normalizovanog NF filtra u normalizovan VF filtar na nivou funkcije prenosa, kao i transformacije na nivou elementa pasivnog NF kola. Uvođenjem smene $s_n \rightarrow \frac{1}{s_n}$ može se izvršiti i transformacija gabarita normalizovanog NF filtra da bi se dobili gabariti odgovarajućeg normalizovanog VF filtra. Kod normalizovanih filtara ova dva tipa, očigledno se ista smena može koristiti i za obrnute transformacije, tj. transformacije normalizovanog VF u normalizovan NF filtar [1].

Korišćenjem smene $s_n \rightarrow \frac{1}{s_n}$ učestanosti f_{1n} i f_{2n} u gabaritima (3.9.5) i (3.9.6) normalizovanog VF filtra preslikavaju se u normalizovane učestanosti koje definišu gabarit NF filtra:

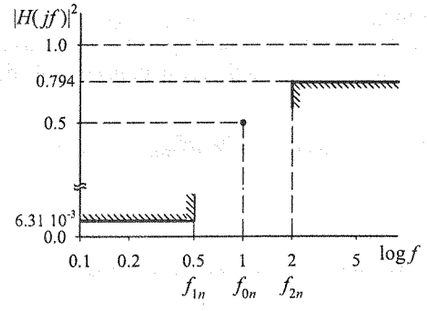
$$f_{1NF}=\frac{1}{f_{1n}}=2\,,\quad f_{2NF}=\frac{1}{f_{2n}}=\frac{1}{2}\,. \tag{3.9.7}$$

Pošto se ovom smenom vrši samo transformacija učestanosti, odgovarajuća slabljenja zadata gabaritima VF filtra se neće promeniti. Odnosno, gabarit (3.9.5) koji je odgovarao učestanostii f_{1n} u VF filtru, ostaje nepromenjen, ali u NF filtru će taj gabarit važiti za učestanost f_{1NF}:

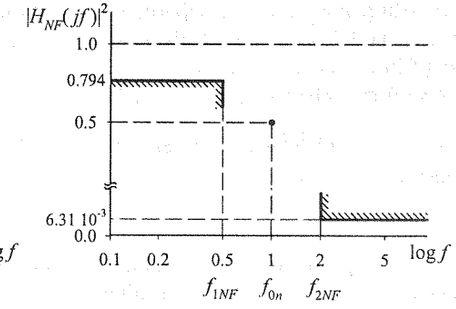
$$|H_{NF}(jf_{1NF})|^2 = |H_{NF}(j2)|^2 \leq 6{,}31\cdot 10^{-3}\,. \tag{3.9.8}$$

Slično se dobija i drugi gabarit normalizovanog NF filtra, (slika 3.9.2.):

$$|H_{NF}(jf_{2NF})|^2 = \left|H_{NF}\left(j\frac{1}{2}\right)\right|^2 \geq 0{,}794\,. \tag{3.9.9}$$



Slika 3.9.1.



Slika 3.9.2.

b) Na osnovu gabarita (3.9.8) i (3.9.9) za normalizovan NF filtar sledi:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \geq 0{,}794 \;\Rightarrow\; 4^n \geq 3{,}854 \;\Rightarrow\; n \geq 1\,, \tag{3.9.10}$$

$$\frac{1}{1+(2)^{2n}} \leq 6{,}31\cdot 10^{-3} \;\Rightarrow\; 4^n \geq 157{,}48 \;\Rightarrow\; n \geq 4\,, \tag{3.9.11}$$

što znači da je minimalan potreban red Batervortovog filtra $n=4$.

Polinom u imeniocu $D(s)=s^n+b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\ldots+b_0$					
Red n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	1,00000000				
2	1,00000000	1,41421356			
3	1,00000000	2,00000000	2,00000000		
4	1,00000000	2,61312593	3,41421356	2,61312593	
5	1,00000000	3,23606798	5,23606798	5,23606798	3,23606798

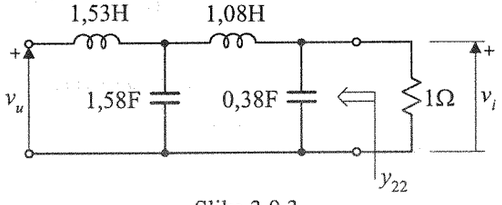
Polinom u imeniocu $D(s)=B_1(s)\,B_2(s)\,B_3(s)\ldots$	
Red n	$B(s)$
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1{,}41421356s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0{,}76536686s+1)(s^2+1{,}84775907s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0{,}61803399s+1)(s^2+1{,}61803399s+1)$

Tabela 3.9.1.

U prethodnim zadacima je pokazano kako se analitički iz opšte formule ili grafički na osnovu položaja polova može odrediti funkcija prenosa Batervortovog normalizovanog NF filtra. U literaturi koja se bavi ovom tematikom mogu se naći tablice sa izračunatim koeficijentima ili faktorizovanim članovima polinoma u imeniocu funkcije prenosa za razne tipove aproksimacija [1]. Takve tablice se često koriste za Čebiševljevu i druge računski zahtevnije aproksimacije, ali postoje i za Batervortovu aproksimaciju (tabela 3.9.1.). Iz ove tabele se direktno može napisati izraz za funkciju prenosa četvrtog reda:

$$H_{NF}(s)=\frac{1}{s^4+2{,}61s^3+3{,}41s^2+2{,}61s+1}\,. \tag{3.9.12}$$

c) Postupak realizacije pasivne mreže bez gubitaka zatvorene otpornikom $R_p=1\Omega$ i pobuđene idealnim naponskim generatorom koja ima funkciju prenosa četvrtog reda Batervortovog NF tipa je opisan u zadatku 3.1.d). Sintetisano kolo je prikazano na slici 3.9.3.



Slika 3.9.3.

d) Transformacija pasivnog kola normalizovanog NF filtra iz tačke c) u VF filtar čija je donja granična učestanost f_0=10kHz vrši se smenom $s_n \to \frac{\omega_0}{s} = \frac{2\pi \cdot 10\text{kHz}}{s}$ kojom se elementi NF kola preslikavaju na sledeći način:

$$Ls_n \to L\frac{\omega_0}{s} = \frac{1}{C_e s},\ C_e = \frac{1}{L\omega_0}, \tag{3.9.13}$$

$$\frac{1}{Cs_n} \to \frac{1}{C\frac{\omega_0}{s}} = L_e s,\ L_e = \frac{1}{C\omega_0}. \tag{3.9.14}$$

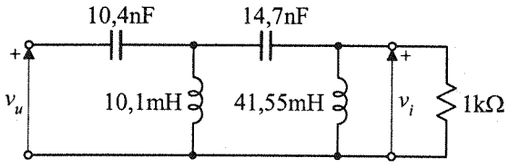
Pored ove transformacije potrebno je izvršiti skaliranje impedansi faktorom R_0=1kΩ, pa je konačno preslikavanje elemenata iz NF kola u VF kolo:

$$L \to C'_e = \frac{C_e}{R_0} = \frac{1}{L\omega_0 R_0}, \tag{3.9.15}$$

$$C \to L'_e = L_e R_0 = \frac{R_0}{C\omega_0}, \tag{3.9.16}$$

$$R \to R' = RR_0. \tag{3.9.17}$$

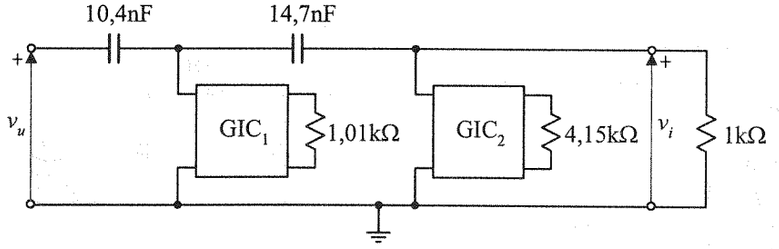
Primenom ovih transformacija na elemente u kolu normalizovanog NF filtra sa slike 3.9.3. dobija se pasivno kolo VF filtra prikazano na slici 3.9.4.



Slika 3.9.4.

U pasivnom kolu ovog VF filtra sve induktivnosti su uzemljene, pa se korišćenjem GIC konvertora za simulaciju tih induktivnosti direktno može dobiti realizacija aktivnog filtra sa istom funkcijom prenosa. Šema GIC konvertora i izbor elemenata za simulaciju induktivnosti su opisani u zadatku 3.1.

Za simulaciju induktivnosti 10,1mH i 41,55mH u kolu na slici 3.9.4. mogu se izabrati sledeći elementi u GIC konvertorima: $Z_2 = Z_4 = Z_3 = 1\text{k}\Omega$, $Z_5 = 1/sC_5$, C_5=10nF i $Z'_6 = R'_6$=1,01kΩ, odnosno $Z''_6 = R''_6$=4,15kΩ (slika 3.9.5.).



Slika 3.9.5.

3.10. a) Realizovati funkciju prenosa: $H(s) = \frac{s^3}{48s^3 + 32s^2 + 6s + 1}$ preko lestvičaste mreže bez gubitaka sa pobudnim generatorom unutrašnje otpornosti R=1Ω.

b) Skalirati impedanse u kolu realizovanom u tački a) ako je normalizacija vršena za vrednosti ω_0=100krad/s i R_g=1kΩ.

c) Nacrtati šemu GIC-a i izračunati njegovu ulaznu impedansu.

d) Pasivnu lestvičastu mrežu iz tačke b) realizovati u direktnoj formi korišćenjem žiratora na bazi GIC-a. Predložiti vrednosti elemenata.

Rešenje:

a) Razdvajanjem parnih i neparnih delova polinoma u imeniocu i brojiocu zadate funkcije prenosa dobija se:

$$H(s) = \frac{s^3}{(48s^3 + 6s) + (32s^2 + 1)} = \frac{N_1(s)}{N_2(s) + P_2(s)}. \tag{3.10.1}$$

Polinomi $N_2(s)$ i $P_2(s)$ predstavljaju neparan i paran deo Hurvicovog polinoma u imeniocu, a polinom $N_1(s)$ u brojiocu je neparan, pa zadata funkcija prenosa može da se realizuje u vidu lestvičaste mreže bez gubitaka sa otpornikom na ulaznim krajevima. S obzirom da je polinom $N_1(s)$ neparan, brojilac i imenilac treba podeliti parnim delom polinoma iz imenioca, tj. polinomom $P_2(s)$:

$$H(s) = \frac{\frac{s^3}{32s^2+1}}{\frac{48s^3+6s}{32s^2+1}+1} = \frac{z_{12}}{z_{11}+1}. \tag{3.10.2}$$

Ulazna impedansa lestvičaste LC mreže je:

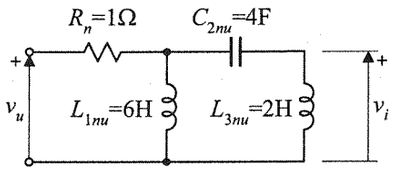
$$z_{11} = \frac{48s^3 + 6s}{32s^2 + 1}. \tag{3.10.3}$$

Pošto je funkcija prenosa trećeg reda i ima trostruku nulu u koordinatnom početku, ovu ulaznu impedansu treba razviti u Kauerovu II formu. Potreban uslov za takav razvoj je da polinom u imeniocu racionalne funkcije koja se razvija bude neparan, tako da se u ovom slučaju ne može direktno razvijati funkcija z_{11} već njena recipročna vrednost:

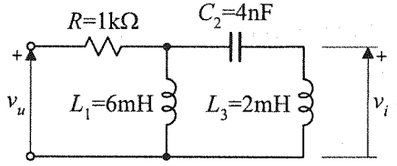
$$z_{11} = \frac{1}{\frac{1+32s^2}{6s+48s^3}} = \frac{1}{\frac{1}{6s} + \frac{1}{\frac{6s+48s^3}{24s^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{6s} + \frac{1}{\frac{1}{4s} + \frac{48s^3}{24s^2}}}, \tag{3.10.4}$$

$$z_{11} = \frac{1}{\frac{1}{6s} + \frac{1}{\frac{1}{4s} + \frac{1}{\frac{1}{2s}}}}. \tag{3.10.5}$$

Pasivno kolo koje čini lestvičasta LC mreža sa ovakvom ulaznom impedansom i otpornikom $R=1\Omega$ na ulazu, prikazana je na slici 3.10.1. Kolo ima tri reaktivna elementa, od kojih su dve induktivnosti u paralelnim i jedna kapacitivnost u rednoj grani kola. To ukazuje da ovo kolo ne propušta signale niskih učestanosti, odnosno da ima funkciju prenosa VF filtra kao i zadata funkcija $H(s)$.



Slika 3.10.1.



Slika 3.10.2.

b) Svi elementi u kolu prikazanom na slici 3.10.1 su normalizovani i po učestanosti i po impedansi. U takvom kolu se sve impedanse računaju za normalizovanu učestanost ω_n, tako da je impedansa induktivnosti L_{nu}:

$$Z_{L_{nu}} = j\omega_n L_{nu} = j\omega \frac{L_{nu}}{\omega_0} = j\omega L_n \Rightarrow L_n = \frac{L_{nu}}{\omega_0}, \tag{3.10.6}$$

gde je L_n induktivnost denormalizovana po učestanosti. To znači da je ova induktivnost normalizovana samo po impedansi, odnosno da je:

$$L_n = \frac{L}{R_g}. \tag{3.10.7}$$

Iz prethodne dve jednačine se dobija vrednost induktivnosti L koja će odgovarati normalizovanoj vrednosti L_{nu} posle skaliranja impedansi i denormalizacije učestanosti:

$$L = \frac{L_{nu} R_g}{\omega_0}. \tag{3.10.8}$$

Slično se dobijaju nove vrednosti za kondenzatore i otpornike:

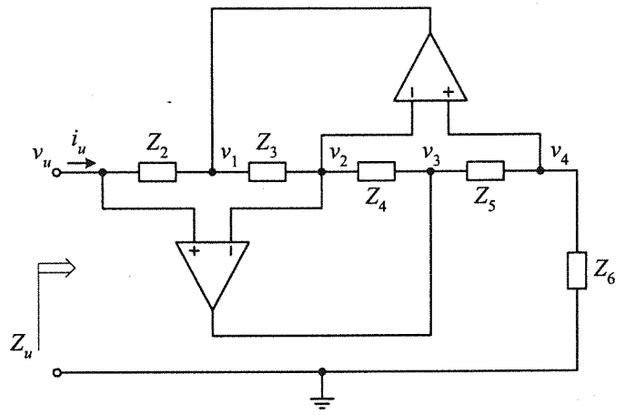
$$Z_{C_{nu}} = \frac{1}{j\omega_n C_{nu}} = \frac{1}{j\omega \frac{C_{nu}}{\omega_0}} = \frac{1}{j\omega C_n} \Rightarrow C_n = \frac{C_{nu}}{\omega_0} = CR_g \Rightarrow C = \frac{C_{nu}}{\omega_0 R_g}, \tag{3.10.9}$$

$$Z_{R_n} = R_n \Rightarrow R_n = \frac{R}{R_g} \Rightarrow R = R_n R_g. \tag{3.10.10}$$

Primenom ovih transformacija na elemente kola sa slike 3.10.1. za ω_0=100krad/s i R_g=1kΩ dobija se kolo prikazano na slici 3.10.2.

c) Generalisani impedansni konvertor (GIC) je prikazan na slici 3.10.3. Smatrajući da su operacioni pojačavači idealni, može se zaključiti da su u ovom kolu jednaki naponi $v_u = v_2 = v_4$, odnosno da su struje kroz ulazne priključke operacionih pojačavača jednake nuli. Na osnovu toga se za čvor v_4 može napisati:

$$\frac{v_3 - v_u}{Z_5} = \frac{v_u}{Z_6} \Rightarrow v_3 = \left(\frac{Z_5}{Z_6} + 1\right) v_u. \tag{3.10.11}$$



Slika 3.10.3.

Slično, za čvor v_2 ($v_2 = v_u$) važi:

$$\frac{v_1 - v_u}{Z_3} = \frac{v_u - v_3}{Z_4} \Rightarrow v_1 = \frac{Z_3}{Z_4}(v_u - v_3) + v_u, \tag{3.10.12}$$

odnosno, zamenom izraza za v_3:

$$v_1 = -\frac{Z_3}{Z_4}\frac{Z_5}{Z_6} v_u + v_u.$$

I na kraju, za čvor v_1:

$$v_1 = v_u - Z_2 i_u \Rightarrow i_u = -\frac{v_1 - v_u}{Z_2} = \frac{1}{Z_2}\frac{Z_3}{Z_4}\frac{Z_5}{Z_6} v_u, \tag{3.10.13}$$

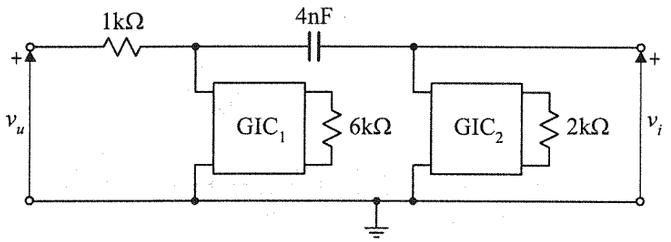
pa je ulazna impedansa GIC-a:

$$Z_u = \frac{v_u}{i_u} = \frac{Z_2 Z_4 Z_6}{Z_3 Z_5}, \tag{3.10.14}$$

ili ulazna admitansa:

$$Y_u = \frac{i_u}{v_u} = \frac{Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4 Z_6} = \frac{\frac{1}{Y_3}\frac{1}{Y_5}}{\frac{1}{Y_2}\frac{1}{Y_4}\frac{1}{Y_6}} = \frac{Y_2 Y_4 Y_6}{Y_3 Y_5}. \tag{3.10.15}$$

d) U kolu prikazanom na slici 3.10.2. potrebno je simulirati dve uzemljene induktivnosti $L_1 = 6\text{mH}$ i $L_3 = 2\text{mH}$ korišćenjem GIC konvertora. S obzirom da u tom kolu postoje još otpornik reda kilooma i kondenzator reda nanofarada, za simulaciju ovih induktivnosti se mogu usvojiti sledeci elementi: $R_2 = R_4 = R_5 = 1\text{k}\Omega$, $C_3 = 1\text{nF}$ i $R_6' = 6\text{k}\Omega$ u prvom GIC konvertoru, odnosno, $R_6'' = 2\text{k}\Omega$ u drugom GIC konvertoru (slika 3.10.4.).



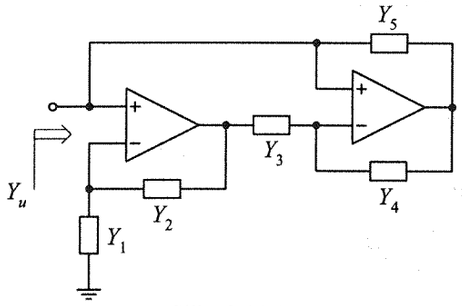
Slika 3.10.4.

3.11. a) Realizovati funkciju prenosa: $H(s)=\dfrac{s^3}{105s^3+50s^2+7s+1}$ preko lestvičaste mreže bez gubitaka zatvorene otpornikom R_p=1Ω.

b) Skalirati impedanse u kolu realizovanom u tački a) na nivo R_p=100Ω i izvršiti denormalizaciju učestanosti za ω_0=100krad/s.

c) Za aktivno kolo prikazano na slici 3.11.1. izračunati ulaznu admitansu ako su upotrebljeni idealni operacioni pojačavači. Kakvu funkciju može da obavlja ovo kolo u realizaciji aktivnih filtara?

d) Koristeći kolo prikazano na slici 3.11.1, predložiti jednu realizaciju aktivnog filtra za pasivnu lestvičastu mrežu realizovanu u tački b).



Slika 3.11.1.

Rešenje:

a) Zadata funkcija prenosa ima Hurvicov polinom u imeniocu i neparan polinom u brojiocu, što znači da se može realizovati preko lestvičaste LC mreže zatvorene otpornikom R_p=1Ω na izlaznim krajevima. Transformacijom te funkcije kao u prethodnom zadatku, dobija se:

$$H(s)=\frac{s^3}{(105s^3+7s)+(50s^2+1)}=\frac{\dfrac{s^3}{50s^2+1}}{\dfrac{105s^3+7s}{50s^2+1}+1}=\frac{-y_{21}}{y_{22}+1}, \qquad (3.11.1)$$

odnosno:

$$y_{22}=\frac{105s^3+7s}{50s^2+1}. \qquad (3.11.2)$$

Pošto je zadata funkcija prenosa VF tipa, izlaznu admitansu treba razviti u Kauerovu II formu [1]. To se može uraditi izdvajanjem koeficijenata uz $1/s$ u izrazu za y_{22} ili uvođenjem smene $s\to\dfrac{1}{p}$ i razvojem novodobijene funkcije u Kauerovu I formu:

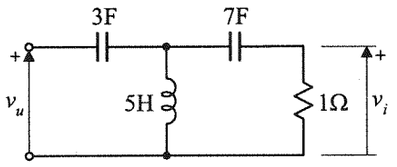
$$y_{22}=\frac{\dfrac{105}{p^3}+\dfrac{7}{p}}{\dfrac{50}{p^2}+1}=\frac{7p^2+105}{p^3+50p}=\frac{1}{\dfrac{p^3+50p}{7p^2+105}}, \qquad (3.11.3)$$

$$y_{22}=\frac{1}{\dfrac{1}{7}p+\dfrac{35p}{7p^2+105}}=\frac{1}{\dfrac{1}{7}p+\dfrac{1}{\dfrac{1}{5}p+\dfrac{105}{35p}}}=\frac{1}{\dfrac{1}{7}p+\dfrac{1}{\dfrac{1}{5}p+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}p}}}. \qquad (3.11.4)$$

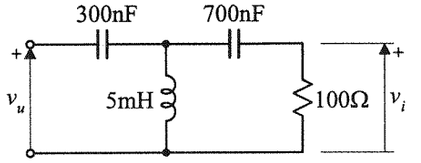
Vraćanjem iste smene u prethodni izraz dobija se polazna funkcija razvijena u Kauerovu II formu:

$$y_{22}=\frac{1}{\dfrac{1}{7s}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{5s}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3s}}}}. \qquad (3.11.5)$$

Na osnovu razvoja y_{22} određeni su elementi pasivnog kola koje ima zadatu funkciju prenosa i prikazani na slici 3.11.2.



Slika 3.11.2.



Slika 3.11.3.

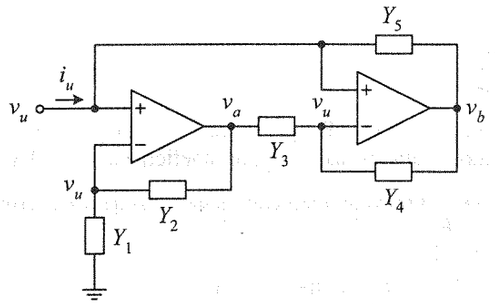
b) Skaliranje impedansi i denormalizacija učestanosti se mogu izvršiti primenom transformacija opisanih u prethodnom zadatku. Za R_p=100Ω i ω_0=100krad/s dobija se kolo prikazano na slici 3.11.3.

c) Prema oznakama na slici 3.11.4. može se napisati sledeći sistem jednačina:

$$v_uY_1=(v_a-v_u)Y_2, \qquad (3.11.6)$$

$$(v_a-v_u)Y_3=(v_u-v_b)Y_4, \qquad (3.11.7)$$

$$i_u=(v_u-v_b)Y_5, \qquad (3.11.8)$$



Slika 3.11.4.

odakle se dobija:

$$\frac{v_u Y_1}{Y_2} = (v_u - v_b)\frac{Y_4}{Y_3} = \frac{i_u}{Y_5}\frac{Y_4}{Y_3}, \tag{3.11.9}$$

odnosno:

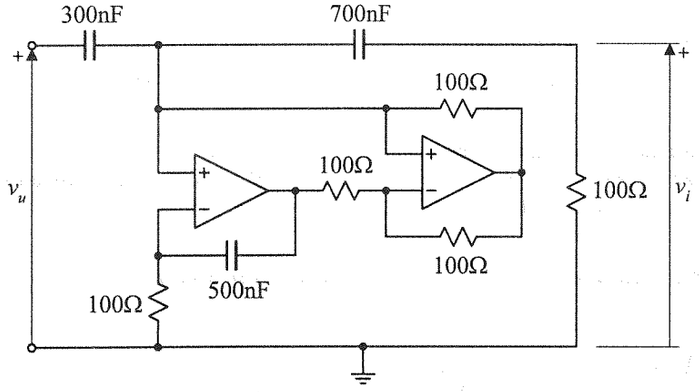
$$Y_u = \frac{i_u}{v_u} = \frac{Y_1 Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4}. \tag{3.11.10}$$

Ulazna admitansa ovog kola je jednaka ulaznoj admitansi GIC konvertora (izraz (3.10.15)), oba kola imaju jedan ulazni priključak na masi, tako da je i njihova primena ista. Znači, ovo kolo se može koristiti za simulaciju uzemljenih induktivnosti ili realizaciju FDNR komponenata u aktivnim filtrima, a poznato je pod nazivom *Riordan*-ov žirator [5].

d) Ako se izabere $Y_1 = Y_3 = Y_5 = Y_4 = 1/R$ i $Y_2 = sC$ ulazna admitansa kola prikazanog na slici 3.11.1. postaje:

$$Y_u = \frac{1}{Y_2 R^2} = \frac{1}{sCR^2}. \tag{3.11.11}$$

Za simulaciju induktivnosti 5mH u kolu prikazanom na slici 3.11.3, u žiratoru se mogu izabrati otpornici vrednosti $R = 100\Omega$ i kondenzator $C = 500\text{nF}$. Realizacija takvog aktivnog kola je prikazana na slici 3.11.5.



Slika 3.11.5.

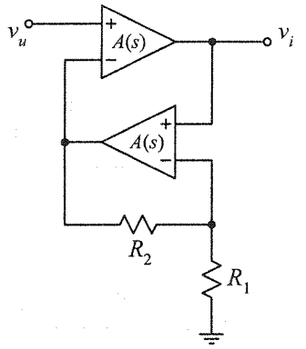
3.12. a) Realizovati funkciju prenosa:

$$H(s) = \frac{ks}{s^2 + 10s + 24}$$

preko lestvičaste RC mreže zatvorene otpornikom od 4Ω. Napomena: račun obaviti isključivo u razlomcima.

b) U realizaciji pasivnog kola iz tačke a) izvršiti denormalizaciju učestanosti za $\omega_0 = 10\text{krad/s}$.

c) U kolu na slici 3.12.1. operacioni pojačavači imaju pojačanje u otvorenoj petlji $A(s) = \frac{B}{s} = \frac{10^6}{s}$. Izračunati funkciju prenosa $H(s) = \frac{v_i}{v_u}$, a zatim odrediti učestanost i Q faktor polova te funkcije.



Slika 3.12.1.

Rešenje:

a) Zadata funkcija prenosa se može napisati u obliku:

$$H(s) = \frac{ks}{(s+4)(s+6)}. \tag{3.12.1}$$

Polovi ove funkcije su prosti i nalaze se na negativnom delu realne ose, pa se funkcija prenosa može realizovati preko lestvičaste RC mreže [3]. Ako se takva mreža predstavi kao četvoropol opisan z-parametrima, funkcija prenosa je:

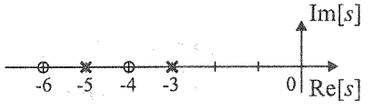
$$H(s) = \frac{z_{21}}{z_{11}}. \tag{3.12.2}$$

Da bi na osnovu jednačine (3.12.1) bili određeni parametri z_{11} i z_{21}, neophodno je brojilac i imenilac podeliti polinomom $X(s)$ koji se bira tako da racionalna funkcija koja će se dobiti u imeniocu zadovoljava osobine ulazne impedanse lestvičaste RC mreže, [7]:

$$H(s) = \frac{\frac{ks}{X(s)}}{\frac{(s+4)(s+6)}{X(s)}} = \frac{z_{21}}{z_{11}}. \tag{3.12.3}$$

Polovi i nule racionalne funkcije u imeniocu moraju da budu naizmenično raspoređeni na negativnom delu realne ose, pri čemu najbliži koordinatnom početku treba da bude jedan od polova [7]. Red polinoma u brojiocu ulazne impedanse lestvičaste RC mreže ne može da bude veći od reda polinoma u imeniocu, odnosno, u konkretnom primeru polinom $X(s)$ treba da bude drugog reda i da obezbedi sledeći raspored polova i nula ulazne impedanse: $0 < |p_1| < |z_1| < |p_2| < |z_2|$.

Imajući u vidu sve ove zahteve, nule ulazne impedanse se mogu postaviti kao što je prikazano na slici 3.12.2, pa će ulazna impedansa biti:



Slika 3.12.2.

$$z_{11} = \frac{(s+4)(s+6)}{X(s)} = \frac{(s+4)(s+6)}{(s+3)(s+5)}. \qquad (3.12.4)$$

Način na koji treba razvijati ulaznu impedansu zavisi od tipa zadate funkcije prenosa. U ovom slučaju je funkcija prenosa drugog reda i ima jednu nulu u koordinatnom početku, što znači da ulaznu impedansu z_{11} treba razviti jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu. Kod lestvičastih RC mreža se za razvoj u Kauerovu I formu uvek ispituje vrednost ulazne admitanse za $s \to \infty$:

$$Y_1(s)\big|_{s\to\infty} = \frac{1}{z_{11}}\bigg|_{s\to\infty} = \frac{(s+3)(s+5)}{(s+4)(s+6)}\bigg|_{s\to\infty} = 1 = \text{const.} \qquad (3.12.5)$$

Pošto je u prethodnom izrazu dobijena konačna vrednost, zaključak je da se ta funkcija ne može razvijati u Kauerovu I formu, već njena recipročna vrednost, odnosno ulazna impedansa z_{11}:

$$z_{11} = \frac{s^2+10s+24}{s^2+8s+15} = 1 + \frac{1}{\dfrac{s^2+8s+15}{2s+9}}, \qquad (3.12.6)$$

$$z_{11} = 1 + \frac{1}{\dfrac{\frac{7}{2}s+15}{2s+9}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{Z_2}}. \qquad (3.12.7)$$

Prvi član u ovom izrazu predstavlja otpornik vrednosti 1Ω, a drugi kondenzator vrednosti 1/2F. Tek kada su izdvojena ova dva elementa može se smatrati da je završen jedan razvoj ulazne impedanse u Kauerovu I formu. Kod lestvičastih RC mreža red funkcije prenosa određuje broj kondenzatora, pa se razvoj odgovarajućih ulaznih funkcija u Kauerove forme uvek odvija u dva koraka. U jednom koraku se izdvaja otpornik, a u drugom kondenzator. Broj otpornika u kompletnom razvoju ne mora da odgovara redu funkcije prenosa (može za 1 da bude veći ili manji).

Za razvoj u Kauerovu II formu, kod lestvičastih RC mreža se uvek ispituje vrednost odgovarajuće impedanse za s=0, [7]:

$$Z_2(0) = \frac{2s+9}{\frac{7}{2}s+15}\bigg|_{s=0} = \frac{9}{15} = \text{const.} \qquad (3.12.8)$$

I u ovom izrazu je dobijena konačna vrednost, pa se zaključuje da u Kauerovu II formu treba razvijati recipročnu vrednost prethodne funkcije. Uvođenjem smene $s \to \frac{1}{p}$ dobija se nova funkcija koju treba razviti u Kauerovu I formu:

$$Y_2 = \frac{\frac{7}{2}s+15}{2s+9} = \frac{15p+\frac{7}{2}}{9p+2}, \qquad (3.12.9)$$

$$Y_2(p) = \frac{15}{9} + \frac{\frac{1}{6}}{9p+2} = \frac{15}{9} + \frac{1}{54p+12} = \frac{15}{9} + \frac{1}{54p+\frac{1}{\frac{1}{12}}}, \qquad (3.12.10)$$

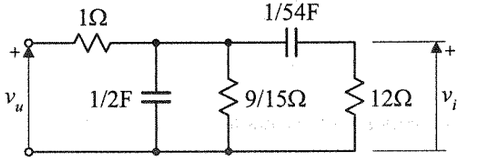
odnosno, vraćanjem iste smene:

$$Y_2(s) = \frac{15}{9} + \frac{1}{\frac{54}{s}+\frac{1}{\frac{1}{12}}}. \qquad (3.12.11)$$

Prema izrazima (3.12.7) i (3.12.11), ulazna impedanse lestvičaste RC mreže je:

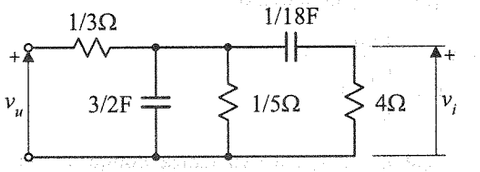
$$z_{11} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{15}{9} + \frac{1}{\frac{54}{s}+\frac{1}{\frac{1}{12}}}}. \qquad (3.12.12)$$

Prvi element RC mreže je otpornik vrednosti 1Ω, koji je na red vezan sa ostatkom kola. Drugi element je kondenzator vrednosti 1/2F koji je paralelno vezan sa provodnošću 15/9S i sa impedansom koju čini redna veza kondenzatora 1/54F i otpornika 12Ω (slika 3.12.3.). Treba uočiti da u dobijenom kolu postoje dva kondenzatora, od kojih je jedan u paralelnoj, a drugi u rednoj grani kola, što odgovara redu i tipu zadate funkcije prenosa (jedna nula u koordinatnom početku i jedna u beskonačnosti). Broj otpornika je veći od reda funkcije prenosa.



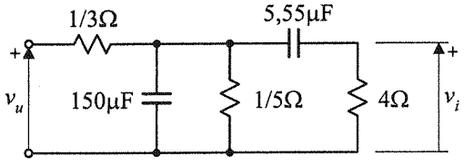
Slika 3.12.3.

U tekstu zadatka je postavljan uslov da lestvičasta RC mreža treba da bude zatvorena otpornikom od 4Ω, tako da se u prethodno dobijenom kolu moraju skalirati impedanse na taj nivo (slika 3.12.4.).

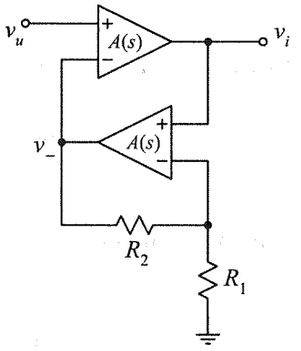


Slika 3.12.4.

b) Transformacijom elemenata u pasivnom kolu sa slike 3.12.4. izvršena je denormalizacija učestanosti za ω_0=10krad/s i dobijeno je kolo prikazano na slici 3.12.5.



Slika 3.12.5.



Slika 3.12.6.

c) Prema oznakama na slici 3.12.6. može se napisati sledeći sistem jednačina:

$$v_i = A(s)(v_u - v_-), \tag{3.12.13}$$

$$v_- = A(s)\left(v_i - \frac{R_1}{R_1+R_2}v_-\right), \tag{3.12.14}$$

odakle se određuje funkcija prenosa:

$$H(s) = \frac{v_i}{v_u} = \frac{A(s)}{1+\dfrac{A^2(s)}{1+A(s)\dfrac{R_1}{R_1+R_2}}}. \tag{3.12.15}$$

Zamenom $A(s)=\dfrac{B}{s}$ i sređivanjem prethodnog izraza dobija se:

$$H(s) = \frac{Bs + B^2\dfrac{R_1}{R_1+R_2}}{s^2 + sB\dfrac{R_1}{R_1+R_2} + B^2}. \tag{3.12.16}$$

Ako se ova funkcija napiše u opštem obliku:

$$H(s) = k\frac{s+a}{s^2 + \dfrac{\omega_p}{Q}s + \omega_p^2}, \tag{3.12.17}$$

poređenjem koeficijenata u prethodna dva izraza dobija se učestanost $\omega_p = B = 10^6$ i Q faktor polova $Q = \dfrac{R_1+R_2}{R_1}$.

3.13. a) Data je funkcija prenosa pojačanja u otvorenoj petlji za operacioni pojačavač:

$$A(s) = \frac{ks}{(s+3)(s+5)(s+7)}.$$

Nacrtati geometrijsko mesto korenova jediničnog neinverujućeg pojačavača u kome je upotrebljen operacioni pojačavač sa ovom funkcijom prenosa, ako se k menja od 0 do ∞.

b) Realizovati pasivno kolo koje ima funkciju prenosa $A(s)$ zadatu u tački a) u vidu odgovarajuće lestvičaste mreže.

Rešenje:

a) Jedinični neinvertujući pojačavač će imati funkciju prenosa:

$$H(s) = \frac{A(s)}{1+A(s)} = \frac{ks}{(s+3)(s+5)(s+7)+ks}. \tag{3.13.1}$$

Za $k=0$ polovi funkcije $H(s)$ se poklapaju sa polovima funkcije prenosa operacionog pojačavača $p_1=-3$, $p_2=-5$ i $p_3=-7$, pa će to biti polazne tačke grana geometrijskog mesta korenova (GMK) [8]. Pošto $A(s)$ ima jednu konačnu nulu $z_1=0$, jedna grana GMK će se završiti u toj nuli. Preostale dve grane GMK će se kretati jedna u susret drugoj, po negativnom delu realne ose, do tačke σ_0 koja se može odrediti iz jednačine:

$$\frac{1}{\sigma_0+3} + \frac{1}{\sigma_0+5} + \frac{1}{\sigma_0+7} - \frac{1}{\sigma_0} = 0, \tag{3.13.2}$$

odnosno:

$$2\sigma_0^3 + 15\sigma_0^2 - 105 = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_0 \approx -6. \tag{3.13.3}$$

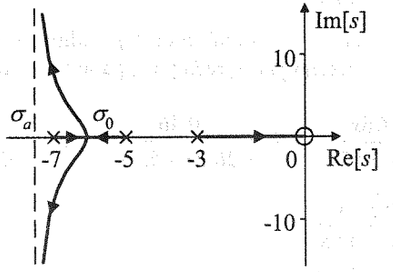
Posle toga, grane se odvajaju od realne ose pod uglovima:

$$\phi_i = \frac{2i+1}{3-1}\pi,\; i=1,2 \;\Rightarrow\; \phi_1 = \frac{\pi}{2},\quad \phi_2 = \frac{3\pi}{2}, \tag{3.13.4}$$

i kreću prema asimptoti čiji je realni deo:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{3} p_i - z_1}{3-1} = -\frac{15}{2}. \tag{3.13.5}$$

Geometrijsko mesto korenova jediničnog neinvertujućeg pojačavača je prikazano na slici 3.13.1.



Slika 3.13.1.

b) Zadata funkcija prenosa ima proste, realne i negativne polove, pa se mora realizovati preko lestvičaste RC mreže [3]. Brojilac i imenilac te funkcije se moraju podeliti polinomom $X(s)$ da bi se odredila ulazna impedansa lestvičaste RC mreže:

$$A(s)=\frac{\frac{ks}{X(s)}}{\frac{(s+3)(s+5)(s+7)}{X(s)}}=\frac{z_{21}}{z_{11}}. \tag{3.13.6}$$

Polinom $X(s)$, odnosno polovi z_{11} se mogu izabrati na sledeći način:

$$z_{11}=\frac{(s+3)(s+5)(s+7)}{(s+1)(s+4)(s+6)}. \tag{3.13.7}$$

Polovi i nule ulazne impedanse su naizmenično poređani po negativnom delu realne ose, a najbliži koordinatnom početku je pol u tački -1, što je u skladu sa zahtevima za ulaznu impedansu lestvičaste RC mreže [7]. U tom slučaju, parametar z_{21} iste mreže treba da bude:

$$z_{21}=\frac{s}{(s+1)(s+4)(s+6)}. \tag{3.13.8}$$

Pošto z_{21} ima jednu konačnu nulu i tri pola, ulazna impedansa se mora razvijati dva puta u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu. Svaki od tih razvoja se izvodi u dva koraka, odnosno daje po jedan otpornik i jedan kondenzator u pasivnom kolu. Redosled razvoja nije bitan, mada je zbog jednostavnijeg računa praktičnije prvo završiti sa razvojima u Kauerovu I formu:

$$z_{11}=\frac{s^3+15s^2+71s+105}{s^3+11s^2+34s+24}, \tag{3.13.9}$$

$$z_{11}=1+\frac{4s^2+37s+81}{s^3+11s^2+34s+24}=1+\frac{1}{Y_1}, \tag{3.13.10}$$

$$Y_1=0{,}25s+\frac{1{,}75s^2+13{,}75s+24}{4s^2+37s+81}=0{,}25s+\frac{1}{Z_2}, \tag{3.13.11}$$

$$Z_2=2{,}28+\frac{5{,}65s+26{,}28}{1{,}75s^2+13{,}75s+24}=2{,}28+\frac{1}{Y_2}, \tag{3.13.12}$$

$$Y_2=0{,}31s+\frac{5{,}6s+24}{5{,}65s+26{,}28}=0{,}31s+Y_3. \tag{3.13.13}$$

Posle dva razvoja u Kauerovu I formu, preostaje admitansa Y_3 koju treba razviti u Kauerovu II formu. To je funkcija prvog reda po s, pa je i njen razvoj u Kauerovu II formu jednostavniji:

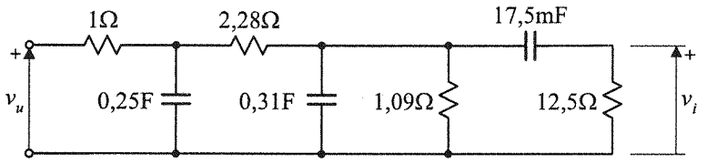
$$Y_3=\frac{24+5{,}6s}{26{,}28+5{,}65s}=0{,}91+\frac{0{,}46s}{26{,}28+5{,}65s}=0{,}91+\frac{1}{Z_3}, \tag{3.13.14}$$

$$Z_3=57{,}13\frac{1}{s}+\frac{1}{0{,}08}. \tag{3.13.15}$$

Na osnovu prethodnih jednačina može se napisati izraz za ulaznu impedansu:

$$z_{11}=1+\cfrac{1}{0{,}25s+\cfrac{1}{2{,}28+\cfrac{1}{0{,}31s+0{,}91+\cfrac{1}{\cfrac{57{,}13}{s}+\cfrac{1}{0{,}08}}}}}}, \tag{3.13.16}$$

i nacrtati lestvičasta RC mreža kojom se realizuje zadata funkcija prenosa (slika 3.13.2.). Treba obratiti pažnju da prelazak sa Kauerove I na Kauerovu II formu remeti pravilnost lestvičaste mreže, odnosno mogu se pojaviti dva paralelno vezana elementa (slika 3.13.2.) ili dva elementa vezana na red. Takođe, treba obratiti pažnju na tip elemenata koji se dobijaju tokom razvoja u Kauerovu II formu, jer recipročne vrednosti koeficijenata u razvoju određuju R ili C elemente u lestvičastoj mreži. Na primer, koeficijent 0,91 u izrazu (3.13.16) predstavlja deo razvoja admitanse, odnosno provodnost, tako da se u lestvičastoj mreži na odgovarajućem mestu crta otpornik recipročne vrednosti (1,09Ω).



Slika 3.13.2.

3.14. Date su funkcije prenosa:

$$H_1(s)=\frac{s^2}{s^2+6s+9},\ H_2(s)=\frac{s^2-6s+9}{s^2+6s+9},\ H_3(s)=\frac{s}{s^2+8s+15}.$$

a) Preko lestvičastih RC mreža realizovati zadate funkcije prenosa.

b) Preko Darlingtonovih kola zatvorenih otpornikom na izlazu R_p=1Ω realizovati zadate funkcije prenosa.

c) Pasivna kola iz tačke b) realizovati korišćenjem GIC konvertora.

Rešenje:

a) Funkcija prenosa $H_1(s)$ se može napisati u sledećem obliku:

$$H_1(s)=\frac{s^2}{(s+3)^2}, \tag{3.14.1}$$

što znači da ta funkcija ima dvostruki pol na negativnom delu realne ose, pa to ne može biti funkcija prenosa lestvičaste RC mreže [3]. Isto važi i za funkciju prenosa $H_2(s)$. Jedino funkcija $H_3(s)$ ima proste, realne, negativne polove:

$$H_3(s)=\frac{s}{(s+3)(s+5)}, \tag{3.14.2}$$

i može biti funkcija prenosa lestvičaste RC mreže.

Sinteza lestvičaste RC mreže koja ima funkciju prenosa $H_3(s)$ izvodi se na isti način kao u prethodnim zadacima:

$$H_3(s)=\frac{s}{(s+3)(s+5)}=\frac{\frac{s}{X(s)}}{\frac{(s+3)(s+5)}{X(s)}}=\frac{z_{21}}{z_{11}}, \tag{3.14.3}$$

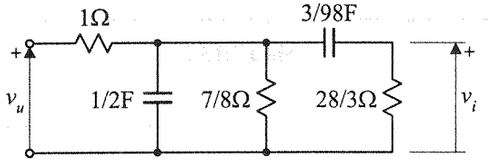
pri čemu jedan od mogućih oblika za ulaznu impedansu može biti:

$$z_{11}=\frac{(s+3)(s+5)}{(s+2)(s+4)}. \tag{3.14.4}$$

Razvoj ove impedanse se vrši jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu:

$$z_{11}=\frac{s^2+8s+15}{s^2+6s+8}=1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{8}{7}+\cfrac{1}{\frac{98}{3s}+\frac{1}{\frac{3}{28}}}}. \tag{3.14.5}$$

Lestvičasta RC mreža koja ima zadatu funkciju prenosa $H_3(s)$ je prikazana na slici 3.14.1.



Slika 3.14.1.

b) Funkcije prenosa koje se mogu realizovati preko Darlingtonovih kola zatvorenih otpornikom na jednom kraju moraju biti oblika:

$$H(s)=\frac{P_1(s)}{P_2(s)+N_2(s)} \quad \text{ili} \quad H(s)=\frac{N_1(s)}{P_2(s)+N_2(s)}, \tag{3.14.6}$$

gde su $P_{1,2}(s)$ parni, $N_{1,2}(s)$ su neparni polinomi, a $P_2(s)+N_2(s)$ mora biti Hurvicov polinom [3]. Od ponuđenih funkcija prenosa samo $H_1(s)$ i $H_3(s)$ zadovoljavaju ove uslove. Funkcija $H_2(s)$ može napisati u obliku:

$$H_2(s)=\frac{D(-s)}{D(s)}, \tag{3.14.7}$$

a jedino pasivno kolo koje ima takvu funkciju prenosa je ukršteni četvoropol [3].

Funkcija $H_1(s)$ ima paran polinom u brojiocu, pa se brojilac i imenilac dele neparnim delom polinoma iz imenioca:

$$H_1(s)=\frac{s^2}{s^2+6s+9}=\frac{\frac{s^2}{6s}}{1+\frac{s^2+9}{6s}}=\frac{-y_{21}}{1+y_{22}}. \tag{3.14.8}$$

Izlazna admitansa se razvija u Kauerovu II formu, jer funkcija prenosa koja je drugog reda, ima dvostruku nulu u koordinatnom početku:

$$y_{22}=\frac{s^2+9}{6s}=\frac{9}{6s}+\frac{1}{\frac{6}{s}}. \tag{3.14.9}$$

Darlingtonovo kolo sa otpornikom $R_p=1\Omega$ na izlazu koje ima funkciju prenosa $H_1(s)$ prikazano je na slici 3.14.2.

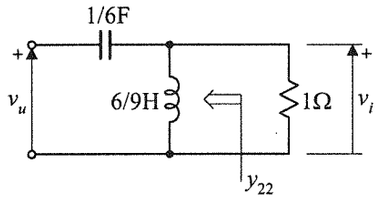
Funkcija $H_3(s)$ ima neparan polinom u brojiocu, pa se brojilac i imenilac dele parnim delom polinoma iz imenioca:

$$H_3(s)=\frac{s}{s^2+8s+15}=\frac{\frac{s}{s^2+15}}{1+\frac{8s}{s^2+15}}=\frac{-y_{21}}{1+y_{22}}. \tag{3.14.10}$$

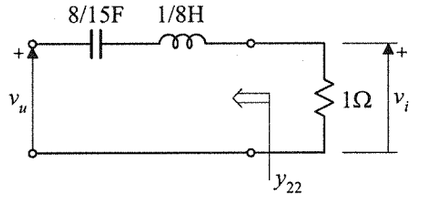
Izlazna admitansa ovog kola treba da se razvije jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu, jer je funkcija prenosa drugog reda i ima jednu konačnu nulu u koordinatnom početku:

$$y_{22}=\frac{8s}{s^2+15}=\frac{1}{\frac{s}{8}+\frac{15}{8s}}. \tag{3.14.11}$$

Darlingtonovo kolo sa otpornikom $R_p=1\Omega$ na izlazu koje ima funkciju prenosa $H_3(s)$ prikazano je na slici 3.14.3.

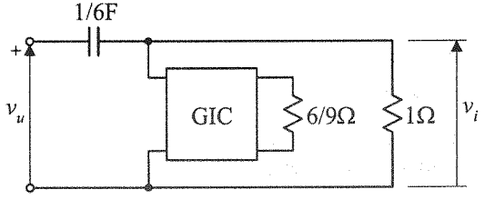


Slika 3.14.2.



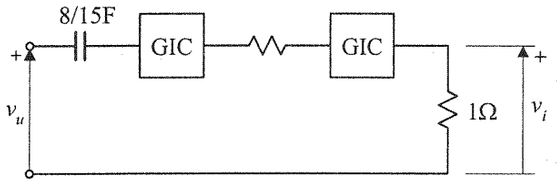
Slika 3.14.3.

c) U kolu prikazanom na slici 3.14.2. potrebno je simulirati jednu uzemljenu induktivnost od 6/9H, pa se mogu izabrati sledeći elementi GIC konvertora: $R_2=R_4=R_5=1\Omega$, $C_3=1\text{F}$ i $R_6=6/9\Omega$ (slika 3.14.4.). Predložene vrednosti elemenata GIC konvertora nisu prihvatljive za praktičnu realizaciju, što važi i za ostale elemente u kolu prikazanom na slici 3.14.4. To znači da bi sledeći korak u projektovanju ovog filtra morao da bude skaliranje impedansi, pa zbog toga nema smisla predlagati realne vrednosti elemenata samo u GIC konvertoru.



Slika 3.14.4.

U kolu prikazanom na slici 3.14.3. postoji jedna neuzemljena induktivnost, pa se ne može direktno koristiti GIC konvertor za simulaciju te induktivnosti. Skaliranje impedansi sa $1/s$ takođe nije moguće, jer bi se dobila neuzemljena FDNR komponenta zbog kondenzatora koji je na red vezan sa tom induktivnošću. Preostaje da se neuzemljena induktivnost simulira korišćenjem dva GIC konvertora i otpornika (slika 3.14.5.), [5].

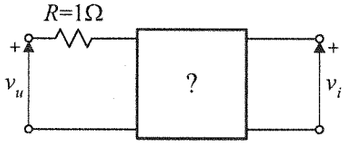


Slika 3.14.5.

3.15. a) Kolo prikazano na slici 3.15.1. predstavlja pasivan filtar sa funkcijom prenosa:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{ks}{s^2+8s+15}.$$

Realizovati ovaj filtar preko lestvičaste mreže i preko Darlingtonovog kola.



Slika 3.15.1.

b) Da li postoji više realizacija zadate funkcije prenosa preko pasivne lestvičaste mreže? Obrazložiti odgovor.

c) U realizaciji filtra iz tačke a) sa Darlingtonovim kolom izvršiti skaliranje elemenata, ako je normalizacija vršena za vrednosti $R_0=50\Omega$ i $\omega_0=10$krad/s.

d) Izračunati sve pasivne osetljivosti za filtar iz prethodne tačke.

Rešenje:

a) U zadatku 3.14. je za ovu funkciju prenosa izvedena jedna realizacija preko lestvičaste RC mreže. Ovde će biti sintetisana drugačija lestvičasta RC mreža sa istom funkcijom prenosa. Polazeći od izraza:

$$H(s)=\frac{ks}{s^2+8s+15}=\frac{ks}{(s+3)(s+5)}=\frac{z_{21}}{z_{11}}, \qquad (3.15.1)$$

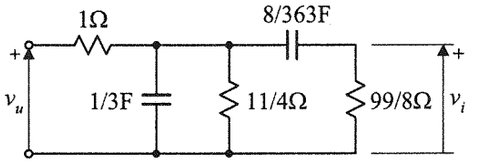
ulazna impedansa se može izabrati na sledeći način:

$$z_{11}=\frac{(s+3)(s+5)}{(s+1)(s+4)}, \qquad (3.15.2)$$

pri čemu su zadovoljeni svi uslovi za ulaznu impedansu lestvičastih RC mreža [7]. Posle razvoja u Kauerovu I i Kauerovu II formu, slično kao u prethodnom zadatku, dobija se izraz:

$$z_{11}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3}s+\cfrac{4}{11}+\cfrac{1}{\cfrac{363}{8s}+\cfrac{1}{\cfrac{8}{99}}}}, \qquad (3.15.3)$$

odnosno, pasivno kolo u vidu lestvičaste RC mreže prikazano na slici 3.15.2. Funkcije prenosa ovog kola i kola sa slike 3.14.1. imaju istu frekvencijsku zavisnost, ali se razlikuju u vrednosti konstante k. Vrednost ove konstante se može izračunati za svaku realizaciju i korigovati korišćenjem odgovarajućih kola za pojačanje ili slabljenje signala. Međutim, u sintezi pasivnih filtara osnovni zadatak predstavlja realizacija zadate frekvencijske zavisnosti, odnosno, realizacija funkcije prenosa sa tačnošću do konstante [3].



Slika 3.15.2.

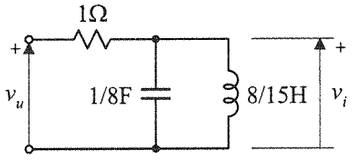
Realizacija zadate funkcije prenosa preko Darlingtonovog kola sa otpornikom na ulaznim krajevima vrši se na sledeći način:

$$H(s)=\frac{ks}{s^2+8s+15}=\frac{\cfrac{ks}{s^2+15}}{1+\cfrac{8s}{s^2+15}}=\frac{z_{12}}{1+z_{11}}, \qquad (3.15.4)$$

odakle se određuje:

$$z_{11}=\frac{8s}{s^2+15}=\frac{1}{\cfrac{s}{8}+\cfrac{15}{8s}}. \qquad (3.15.5)$$

Ulazna impedansa je razvijena jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu. Pasivno kolo koje odgovara ovom razvoju prikazano je na slici 3.15.3. Induktivnost u paralelnoj grani kola daje nulu funkcije prenosa u koordinatnom početku, a kondenzator u paralelnoj grani nulu u beskonačnosti.

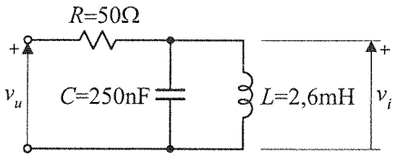


Slika 3.15.3.

b) U prethodnoj tački je pokazano da se izborom polova ulazne impedanse z_{11} može dobiti više različitih realizacija zadate funkcije prenosa preko lestvičaste RC mreže. Broj realizacija je praktično neograničen, jer polovi ulazne impedanse mogu da budu bilo gde u intervalima (0, –3) i (–3, –5) u konkretnom primeru.

Za istu ulaznu impedansu mogu se dobiti različita pasivna kola ako se promeni redosled razvoja ulazne impedanse u Kauerovu I i II formu.

c) Skaliranjem impedansi u kolu sa slike 3.15.3. na nivo $R_0=50\Omega$ i denormalizacijom učestanosti za $\omega_0=10$krad/s dobija se kolo prikazano na slici 3.15.4.



Slika 3.15.4.

d) Funkcija prenosa pasivnog kola sa slike 3.15.4. izračunata u opštem obliku je:

$$H(s)=\frac{\frac{sL}{s^2LC+1}}{R+\frac{sL}{s^2LC+1}}=\frac{\frac{L}{R}s}{s^2LC+\frac{L}{R}s+1}, \tag{3.15.6}$$

pa su učestanost i Q faktor polova, i pojačanje ove funkcije prenosa:

$$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}},\quad Q=R\sqrt{\frac{C}{L}},\quad k=\frac{L}{R}. \tag{3.15.7}$$

Osetljivost proizvoljnog parametara p na promene vrednosti pasivnog elementa X računa se na sledeći način [9]:

$$S_X^p=\frac{X}{p}\frac{\partial p}{\partial X}. \tag{3.15.8}$$

Ako je p stepena funkcija po promenljivoj X, odnosno $p=c\cdot X^m$, prethodna osetljivost je:

$$S_X^p=\frac{X}{c\cdot X^m}\frac{\partial}{\partial X}(c\cdot X^m)=\frac{1}{X^{m-1}}mX^{m-1}=m. \tag{3.15.9}$$

Na osnovu toga se mogu izračunati osetljivosti svih parametara zadate funkcije prenosa na promene pasivnih elemenata R, L i C:

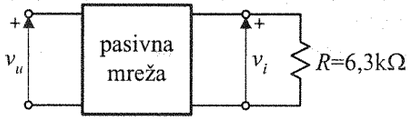
$$S_R^{\omega_p}=0,\ S_L^{\omega_p}=-\frac{1}{2},\ S_C^{\omega_p}=-\frac{1}{2}, \tag{3.15.10}$$

$$S_R^{Q}=1,\ S_L^{Q}=-\frac{1}{2},\ S_C^{Q}=\frac{1}{2}, \tag{3.15.11}$$

$$S_R^{k}=-1,\ S_L^{k}=1,\ S_C^{k}=0. \tag{3.15.12}$$

3.16. Kolo prikazano na slici 3.16.1. predstavlja pasivan filtar sa funkcijom prenosa:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{ks}{s^2+7s+10}.$$



Slika 3.16.1.

a) Realizovati filtar sa zadatom funkcijom prenosa preko lestvičaste mreže.

b) Realizovati filtar sa zadatom funkcijom prenosa preko Darlingtonovog kola.

c) U kolu realizovanom u tački b) skalirati impedanse, ako je normalizacija po učestanosti bila izvršena za vrednost $\omega_0=100$krad/s.

d) Izračunati sve pasivne osetljivosti za filtar iz prethodne tačke.

Rešenje:

a) Zadata funkcija prenosa se može napisati u sledećem obliku:

$$H(s)=\frac{ks}{(s+2)(s+5)}, \tag{3.16.1}$$

što znači da su polovi ove funkcije prosti, negativni i realni, odnosno da se funkcija prenosa može realizovati preko lestvičaste RC mreže. Na isti način kao u prethodnim zadacima može se odrediti ulazna impedansa lestvičaste mreže:

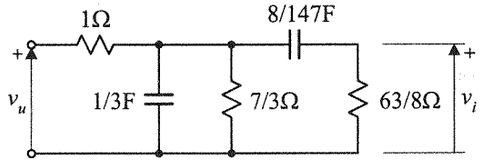
$$z_{11}=\frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)}, \tag{3.16.2}$$

kao i razvoj te impedanse u Kauerovu I i Kauerovu II formu:

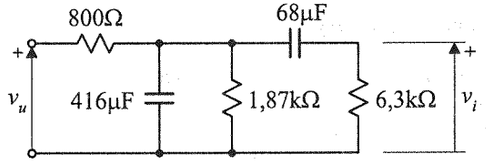
$$z_{11}=\frac{s^2+7s+10}{s^2+4s+3}=1+\frac{1}{\frac{s^2+4s+3}{3s+7}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}s+3}=1+\frac{1}{\frac{s}{3}+Y(s)}, \tag{3.16.3}$$

$$Y(s)=\frac{3+\frac{5}{3}s}{7+3s}=\frac{3}{7}+\frac{\frac{8}{21}s}{7+3s}=\frac{3}{7}+\frac{1}{\frac{147}{8s}+\frac{1}{\frac{8}{63}}}. \tag{3.16.4}$$

Sintetisana lestvičasta RC mreža je prikazana na slici 3.16.2. Prema uslovima zadatka, potrebno je da mreža bude zatvorena otpornikom od 6,3kΩ. Zbog toga se impedanse u kolu sa slike 3.16.2. moraju skalirati sa $R_0=800\Omega$, tako da se dobija kolo prikazano na slici 3.16.3.



Slika 3.16.2.



Slika 3.16.3.

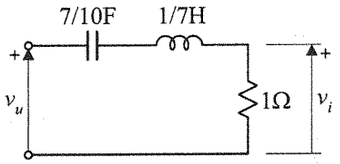
b) Zadata funkcija prenosa će prvo biti realizovana preko Darlingtonovog kola zatvorenog otpornikom $R_n=1\Omega$, a potom će impedanse u tom kolu biti skalirane na nivo $R=6,3$kΩ.

Prema postupku koji je opisan u prethodnim zadacima, na osnovu zadate funkcije prenosa može se odrediti izlazna admitansa lestvičaste LC mreže u Darlingtonovom kolu:

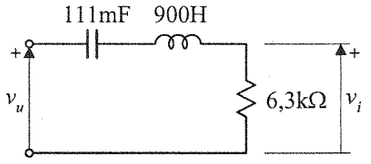
$$H(s)=\frac{ks}{s^2+7s+10}=\frac{\frac{ks}{s^2+10}}{1+\frac{7s}{s^2+10}}=\frac{-y_{21}}{1+y_{22}}, \tag{3.16.5}$$

$$y_{22}=\frac{7s}{s^2+10}=\frac{1}{\frac{s^2+10}{7s}}=\frac{1}{\frac{s}{7}+\frac{10}{7s}}. \tag{3.16.6}$$

Zbog tipa funkcije prenosa (jedna nula u beskonačnosti i jedna u koordinatnom početku), izlazna admitansa je razvijena jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu. Na osnovu tog razvoja sintetisano je Darlingtonovo kolo sa normalizovanim impedansama koje je prikazano slici 3.16.4, a na slici 3.16.5. je prikazano to kolo sa impedansama skaliranim na nivo $R=6{,}3\text{k}\Omega$.

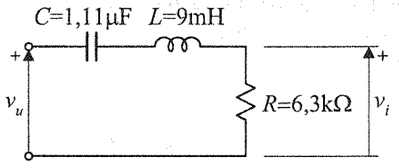


Slika 3.16.4.



Slika 3.16.5.

c) Posle denormalizacije učestanosti za $\omega_0=100\text{krad/s}$ elementi kola prikazanog na slici 3.16.5. imaju nove vrednosti kao na slici 3.16.6.



Slika 3.16.6.

d) Funkcija prenosa kola prikazanog na slici 3.16.6. u opštem obliku je:

$$H(s)=\frac{R}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{sRC}{s^2LC+sRC+1}, \tag{3.16.7}$$

pa je učestanost polova $\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, Q faktor polova $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ i pojačanje $k=RC$.

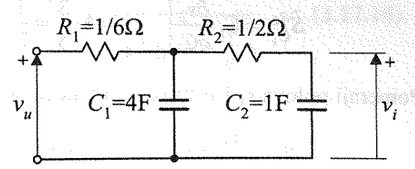
Osetljivosti ovih parametara na promene pasivnih elementata R, L i C su:

$$S_R^{\omega_p}=0,\ S_L^{\omega_p}=-\frac{1}{2},\ S_C^{\omega_p}=-\frac{1}{2}, \tag{3.16.8}$$

$$S_R^{Q}=-1,\ S_L^{Q}=\frac{1}{2},\ S_C^{Q}=-\frac{1}{2}, \tag{3.16.9}$$

$$S_R^{k}=1,\ S_L^{k}=0,\ S_C^{k}=1. \tag{3.16.10}$$

3.17. a) Definisati osetljivost pola funkcije prenosa. Izračunati pomeraje polova funkcije prenosa za kolo sa slike 3.17.1, koji nastaju zbog promene kapacitivnosti kondenzatora C_1 u iznosu od 10%.



Slika 3.17.1.

b) Nacrtati univerzalnu bikvadratnu sekciju realizovanu u tehnici promenljivih stanja i izračunati opšti izraz za funkciju prenosa drugog reda.

c) Koristeći tehniku promenljivih stanja realizovati funkciju prenosa:

$$H(s)=k\frac{s^2+2s+3}{s^2+3s+5}.$$

Rešenje:

a) Osetljivost pola s_i funkcije prenosa na promene parametra k čija je nominalna vrednost k_0, definiše se na sledeći način [10]:

$$\hat{S}_k^{s_i}=k_0\left.\frac{\partial s_i}{\partial k}\right|_{k=k_0}. \tag{3.17.1}$$

Funkcija prenosa kola prikazanog na slici 3.17.1. je:

$$H(s)=\frac{G_1G_2}{C_1C_2s^2+(C_1G_2+C_2G_1+C_2G_2)s+G_1G_2}, \tag{3.17.2}$$

gde su $G_1=1/R_1$ i $G_2=1/R_2$. Polovi ove funkcije prenosa su:

$$s_{1,2}=\frac{-(C_1G_2+C_2G_1+C_2G_2)\pm\sqrt{(C_1G_2+C_2G_1+C_2G_2)^2-4C_1C_2G_1G_2}}{2C_1C_2}. \tag{3.17.3}$$

Smatrajući da svi elementi u kolu prikazanom na slici 3.17.1. zadržavaju nominalne vrednosti osim kondenzatora C_1, zamenom odgovarajućih vrednosti u prethodni izraz dobija se:

$$s_{1,2}=\frac{-(2C_1+8)\pm\sqrt{(2C_1+8)^2-48C_1}}{2C_1}=-1-\frac{4}{C_1}\pm\sqrt{\left(1+\frac{4}{C_1}\right)^2-\frac{12}{C_1}}. \tag{3.17.4}$$

Prema jednačini (3.17.1) osetljivosti polova s_1 i s_2 funkcije prenosa na promene C_1 dobijaju se iz sledećih jednačina:

$$\left.\frac{\partial s_i}{\partial C_1}\right|_{C_1=4}=\frac{4}{C_1^2}\pm\frac{1}{2}\left.\frac{2\left(1+\frac{4}{C_1}\right)\left(-\frac{4}{C_1^2}\right)+\frac{12}{C_1^2}}{\sqrt{(1+\frac{4}{C_1})^2-\frac{12}{C_1}}}\right|_{C_1=4}=\frac{1}{4}\mp\frac{1}{8}, \tag{3.17.5}$$

$$\hat{S}_{C_1}^{s_1}=C_1\left.\frac{\partial s_1}{\partial C_1}\right|_{C_1=4}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}, \tag{3.17.6}$$

$$\hat{S}_{C_1}^{s_2} = C_1 \frac{\partial s_2}{\partial C_1}\bigg|_{C_1=4} = 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2}. \tag{3.17.7}$$

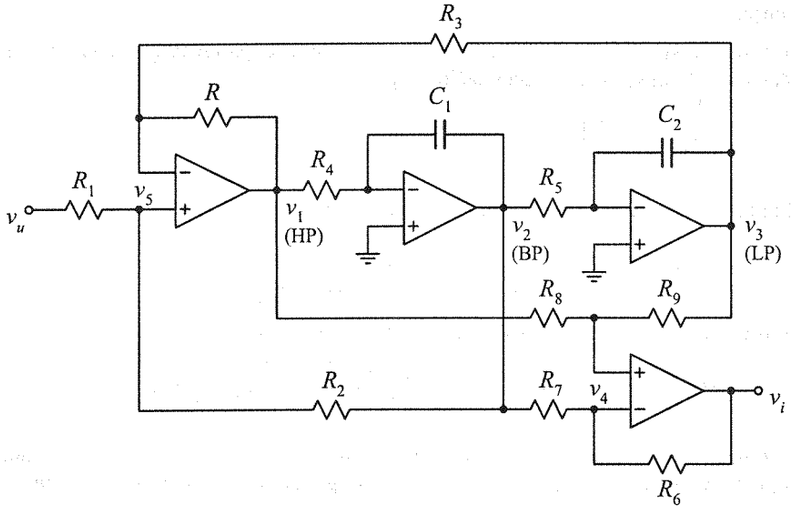
Pomeraji polova s_1 i s_2 funkcije prenosa pri promeni kapacitivnosti C_1 za 10% će biti:

$$\partial s_1 = \hat{S}_{C_1}^{s_1} \frac{\partial C_1}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{0{,}1C_1}{C_1} = 0{,}05\,, \tag{3.17.8}$$

$$\partial s_2 = \hat{S}_{C_1}^{s_2} \frac{\partial C_1}{C_1} = \frac{3}{2} \frac{0{,}1C_1}{C_1} = 0{,}15\,, \tag{3.17.9}$$

u odnosu na nominalne vrednosti $s_1 = -1$ i $s_2 = -3$.

b) Univerzalna bikvadratna sekcija realizovana u tehnici promenljivih stanja je prikazana na slici 3.17.2.



Slika 3.17.2.

Smatrajući da su operacioni pojačavači idealni, može se napisati sistem jednačina:

$$\frac{v_1 - v_5}{R} = \frac{v_5 - v_3}{R_3}\,, \tag{3.17.10}$$

$$v_1 = -R_4 s C_1 v_2\,, \tag{3.17.11}$$

$$v_2 = -R_5 s C_2 v_3\,, \tag{3.17.12}$$

$$\frac{v_u - v_5}{R_1} = \frac{v_5 - v_2}{R_2}\,, \tag{3.17.13}$$

odakle se dobija funkcija prenosa filtra propusnika niskih učestanosti:

$$H_3(s) = \frac{v_3}{v_u} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \cdot \frac{1}{R_4R_5C_1C_2s^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_5C_2s + \frac{R}{R_3}}. \tag{3.17.14}$$

Na osnovu ovog izraza i jednačine (3.17.12) dobija se:

$$H_2(s) = \frac{v_2}{v_u} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \cdot \frac{-R_5C_2s}{R_4R_5C_1C_2s^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_5C_2s + \frac{R}{R_3}}, \tag{3.17.15}$$

odnosno, iz jednačine (3.17.11):

$$H_1(s) = \frac{v_1}{v_u} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \cdot \frac{R_4R_5C_1C_2s^2}{R_4R_5C_1C_2s^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_5C_2s + \frac{R}{R_3}}. \tag{3.17.16}$$

Izraz za izlazni napon se dobija odgovarajućim sumiranjem napona v_1, v_2 i v_3 (slika 3.17.2.). Iz jednačina:

$$\frac{v_2 - v_4}{R_7} = \frac{v_4 - v_i}{R_6}\,, \tag{3.17.17}$$

$$\frac{v_1 - v_4}{R_8} = \frac{v_4 - v_3}{R_9}\,, \tag{3.17.18}$$

dobija se:

$$v_i = \frac{R_9(R_6+R_7)}{R_7(R_8+R_9)}v_1 - \frac{R_6}{R_7}v_2 + \frac{R_8(R_6+R_7)}{R_7(R_8+R_9)}v_3\,. \tag{3.17.19}$$

Funkcija prenosa ove univerzalne bikvadratne sekcije je:

$$H(s) = \frac{v_i}{v_u} = \frac{R_9(R_6+R_7)}{R_7(R_8+R_9)}H_1(s) - \frac{R_6}{R_7}H_2(s) + \frac{R_8(R_6+R_7)}{R_7(R_8+R_9)}H_3(s)\,, \tag{3.17.20}$$

odnosno, nakon sređivanja prethodnog izraza:

$$H(s) = \frac{v_i}{v_u} = k\frac{s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0}\,, \tag{3.17.21}$$

gde su:

$$k = \frac{R_2R_9(R+R_3)(R_6+R_7)}{R_3R_7(R_1+R_2)(R_8+R_9)}\,, \tag{3.17.22}$$

$$a_1 = \frac{R_6(R_8+R_9)}{R_9(R_6+R_7)R_4C_1}\,, \quad a_0 = \frac{R_8}{R_4R_5R_9C_1C_2}\,, \tag{3.17.23}$$

$$b_1 = \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)R_4C_1}\,, \quad b_0 = \frac{R}{R_3R_4R_5C_1C_2}\,. \tag{3.17.24}$$

c) Zadata funkcija prenosa je istog oblika kao funkcija prenosa univerzalne bikvadratne sekcije realizovane u tehnici promenljivih stanja (jednačina (3.17.21)). Poređenjem koeficijenata te dve funkcije dobija se:

$$a_1 = \frac{R_6(R_8+R_9)}{R_9(R_6+R_7)R_4C_1} = 2, \tag{3.17.25}$$

$$a_0 = \frac{R_8}{R_4R_5R_9C_1C_2} = 3, \tag{3.17.26}$$

$$b_1 = \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)R_4C_1} = 3, \tag{3.17.27}$$

$$b_0 = \frac{R}{R_3R_4R_5C_1C_2} = 5. \tag{3.17.28}$$

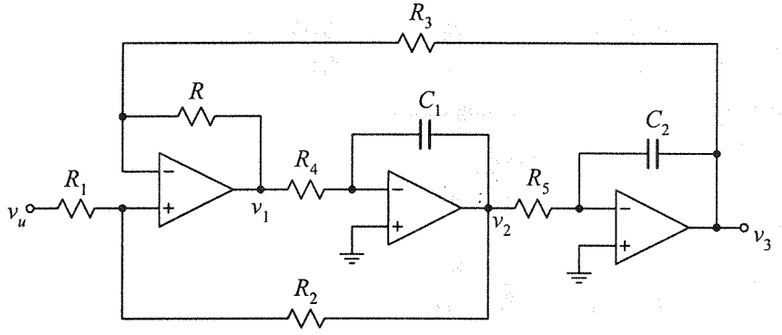
Usvajanjem $C_1 = C_2 = 1\text{mF}$ i $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_9 = 1\text{k}\Omega$, iz prethodnih jednačina se izračunava $R_8 = 3\text{k}\Omega$ i $R = 5\text{k}\Omega$.

3.18. a) Za kolo filtra prikazano na slici 3.18.1. izračunati v_1/v_u, v_2/v_u i v_3/v_u, a zatim odrediti koji tipovi funkcija prenosa se mogu realizovati korišćenjem tog kola.

b) Izračunati pasivne osetljivosti učestanosti i Q faktora polova za funkciju prenosa VF filtra određenu u tački a).

c) Korišćenjem kola prikazanog na slici 3.18.1, operacionog pojačavača i potrebnog broja otpornika realizovati funkciju prenosa: $H(s) = k\dfrac{5s^2-2s+1}{5s^2+2s+1}$.

d) Realizovati pasivno kolo sa funkcijom prenosa definisanom u tački c).



Slika 3.18.1.

Rešenje:

a) Bikvadratna sekcija prikazana na slici 3.18.1. poznata je pod nazivom KHN sekcija. Funkcije prenosa $H_1(s) = \dfrac{v_1}{v_u}$, $H_2(s) = \dfrac{v_2}{v_u}$ i $H_3(s) = \dfrac{v_3}{v_u}$ su izračunate u zadatku 3.17. Na izlazu v_1 se dobija filtar propusnik visokih učestanosti, na izlazu v_2 filtar propusnik opsega učestanosti i na izlazu v_3 filtar propusnik niskih učestanosti:

$$H_1(s) = \frac{v_1}{v_u} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \cdot \frac{R_4R_5C_1C_2s^2}{R_4R_5C_1C_2s^2 + \dfrac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_5C_2s + \dfrac{R}{R_3}}, \tag{3.18.1}$$

$$H_2(s) = \frac{v_2}{v_u} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \cdot \frac{-R_5C_2s}{R_4R_5C_1C_2s^2 + \dfrac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_5C_2s + \dfrac{R}{R_3}}, \tag{3.18.2}$$

$$H_3(s) = \frac{v_3}{v_u} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \cdot \frac{1}{R_4R_5C_1C_2s^2 + \dfrac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_5C_2s + \dfrac{R}{R_3}}. \tag{3.18.3}$$

b) Funkcija prenosa filtra propusnika visokih učestanosti može se napisati u obliku:

$$H_1(s) = \frac{v_1}{v_u} = \frac{R_2(R+R_3)}{R(R_1+R_2)} \cdot \frac{R_4R_5C_1C_2s^2}{\dfrac{R_3R_4R_5C_1C_2}{R}s^2 + \dfrac{R_1R_5(R+R_3)C_2}{R(R_1+R_2)}s+1}. \tag{3.18.4}$$

Iz polinoma u imeniocu ove funkcije:

$$D(s) = s^2\frac{R_3R_4R_5C_1C_2}{R} + s\frac{R_1R_5(R+R_3)C_2}{R(R_1+R_2)} + 1 = \frac{s^2}{\omega_p^2} + s\frac{1}{\omega_pQ} + 1, \tag{3.18.5}$$

mogu se odrediti učestanost i Q faktor polova:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{R}{R_3R_4R_5C_1C_2}}, \tag{3.18.6}$$

$$Q = \frac{R_1+R_2}{R_1(R+R_3)}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}\frac{RR_3R_4}{R_5}}. \tag{3.18.7}$$

Osetljivosti ovih parametara na promene pasivnih elemenata su:

$$S_R^{\omega_p} = -S_{C_{1,2}}^{\omega_p} = -S_{R_{3,4,5}}^{\omega_p} = \frac{1}{2},\ S_{R_{1,2}}^{\omega_p} = 0, \tag{3.18.8}$$

$$S_{C_1}^{Q} = -S_{C_2}^{Q} = S_{R_4}^{Q} = -S_{R_5}^{Q} = \frac{1}{2}, \tag{3.18.9}$$

$$S_{R_1}^{Q} = \frac{R_1}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial R_1} = \frac{R_1}{\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\cdot\dfrac{\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}\dfrac{RR_3R_4}{R_5}}}{R+R_3}} \cdot \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}\dfrac{RR_3R_4}{R_5}}}{R+R_3}\right)$$

$$= \frac{R_1}{\dfrac{R_1+R_2}{R_1}}\cdot\frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right) = \frac{-R_2}{R_1+R_2}, \tag{3.18.10}$$

$$S_{R_2}^{Q}=\frac{R_2}{Q}\frac{\partial Q}{\partial R_2}=\frac{R_2}{K(R_1+R_2)}\frac{\partial}{\partial R_2}[K(R_1+R_2)]=\frac{R_2}{R_1+R_2}, \tag{3.18.11}$$

$$S_{R_3}^{Q}=\frac{R_3}{\frac{\sqrt{R_3}}{R+R_3}}\frac{\partial}{\partial R_3}\left(\frac{\sqrt{R_3}}{R+R_3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{R_3}{R+R_3}, \tag{3.18.12}$$

$$S_{R}^{Q}=\frac{R}{\frac{\sqrt{R}}{R+R_3}}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\sqrt{R}}{R+R_3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{R}{R+R_3}. \tag{3.18.13}$$

Pošto je Q faktor polova parametar koji nema fizičku dimenziju, zbir svih osetljivosti Q faktora na promene otpornika u kolu mora biti jednak nuli. Isto važi i za zbir svih osetljivosti Q faktora na promene kondenzatora u kolu. Ove osobine osetljivosti se mogu koristiti za proveru prethodnog računa ili za jednostavnije računanje poslednje osetljivosti na promene određenog tipa elemenata. Na primer:

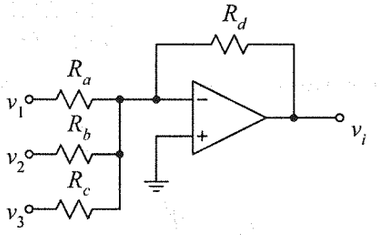
$$S_{R}^{Q}=0-\sum_{i=1}^{5}S_{R_i}^{Q}=0-\left(-\frac{R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_2}{R_1+R_2}+\frac{1}{2}-\frac{R_3}{R+R_3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{R_3+R-R}{R+R_3}=\frac{1}{2}-\frac{R}{R+R_3}. \tag{3.18.14}$$

c) U zadatoj funkciji prenosa:

$$H(s)=k\frac{5s^2-2s+1}{5s^2+2s+1}, \tag{3.18.15}$$

samo koeficijent uz linearni član u brojiocu je negativan. Na osnovu izraza (3.18.1), (3.18.2) i (3.18.3) može se zaključiti da je za realizaciju ove funkcije prenosa potrebno izlazne napone KHN sekcije sumirati korišćenjem kola prikazanog na slici 3.18.2.



Slika 3.18.2.

Izlazni napon takvog filtra će biti:

$$v_i=-\left(\frac{R_d}{R_a}v_1+\frac{R_d}{R_b}v_2+\frac{R_d}{R_c}v_3\right), \tag{3.18.16}$$

a funkcija prenosa:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=-\left(\frac{R_d}{R_a}H_1(s)+\frac{R_d}{R_b}H_2(s)+\frac{R_d}{R_c}H_3(s)\right). \tag{3.18.17}$$

Sabiranjem izraza (3.18.1), (3.18.2) i (3.18.3) dobija se:

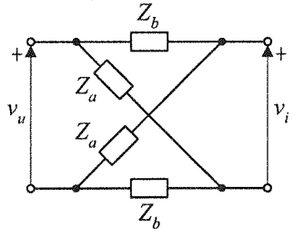
$$H(s)=\frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}\cdot\frac{R_4R_5C_1C_2s^2-R_5C_2s+1}{R_4R_5C_1C_2s^2+\frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_5C_2s+\frac{R}{R_3}}. \tag{3.18.18}$$

Izborom $R=R_3$ i $R_1=R_2$ prethodna funkcija postaje:

$$H(s)=\frac{R_4R_5C_1C_2s^2-R_5C_2s+1}{R_4R_5C_1C_2s^2+R_5C_2s+1}, \tag{3.18.19}$$

tako da za realizaciju funkcije prenosa (3.18.15) svi otpornici u sumatoru treba da budu istih vrednosti, a $R_5C_2=2$ i $R_4C_1=5/2$. Na primer, mogu se izabrati sledeće vrednosti elemenata: $C_1=2{,}5\text{mF}$, $C_2=2\text{mF}$, $R=R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_a=R_b=R_c=R_d=1\text{k}\Omega$.

d) Ako je $D(s)$ polinom u imeniocu funkcije prenosa (3.18.15), u brojiocu te funkcije je polinom $D(-s)$, to znači da se radi o filtru svepropusniku učestanosti ("*all pass filter*"). Takav filtar ima ravnu amplitudsku karakteristiku i koristi se za korekciju faze ulaznog signala. Pasivna realizacija filtra svepropusnika učestanosti jedino je moguća preko ukrštenog četvoropola (slika 3.18.3), [3]. Funkcija prenosa ukrštenog četvoropola je:



Slika 3.18.3.

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{Z_a-Z_b}{Z_a+Z_b}. \tag{3.18.20}$$

Zadata funkcija prenosa (3.18.15) se može svesti na prethodni oblik deljenjem polinoma u brojiocu i imeniocu parnim ili neparnim delom polinoma iz imenioca. Na primer:

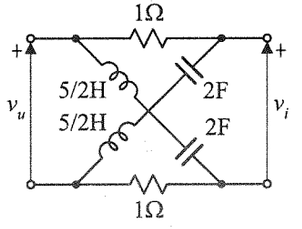
$$H(s)=k\frac{5s^2-2s+1}{5s^2+2s+1}=k\frac{\frac{5s^2+1}{2s}-1}{\frac{5s^2+1}{2s}+1}. \tag{3.18.21}$$

Poređenjem prethodna dva izraza dolazi se do zaključka da je $Z_b=R=1\Omega$, a Z_a je impedansa lestvičaste LC mreže (količnik parnog i neparnog dela Hurvicovog polinoma). Razvoj impedanse Z_a vrši se bilo u Kauerovu I, bilo u Kauerovu II formu, na primer:

$$Z_a=\frac{5s^2+1}{2s}=\frac{5}{2}s+\frac{1}{2s}. \tag{3.18.22}$$

Šema ukrštenog četvoropola koja odgovara ovom razvoju prikazana je na slici 3.18.4.

U slučaju da su brojilac i imenilac funkcije (3.18.15) podeljeni parnim delom polinoma iz imenioca, impedansa Z_a bi bila otpornik vrednosti 1Ω, a Z_b impedansa lestvičaste LC mreže koju bi trebalo razvijati.



Slika 3.18.4.

3.19. a) Odrediti funkciju prenosa i tip filtra prikazanog na slici 3.19.1.

b) Odrediti pasivne osetljivosti učestanosti i Q faktora polova funkcije prenosa filtra sa slike 3.19.1. Da li je taj filtar ortogonalan?

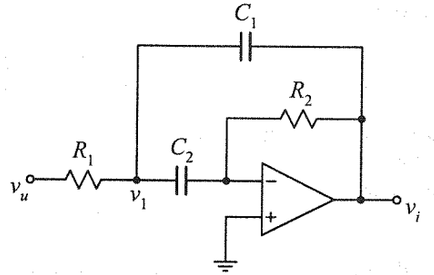
c) Ako je $C_1 = C_2 = C$ i $R_1 = R_2 = R$, izračunati funkciju prenosa kola iz tačke a). Odrediti da li se može realizovati pasivan filtar sa istom funkcijom prenosa preko:

c1) lestvičaste LC mreže;

c2) lestvičaste RC mreže;

c3) Darlingtonovog kola.

d) Realizovati pasivna kola iz prethodne tačke.



Slika 3.19.1.

Rešenje:

a) Iz sistema jednačina:

$$sC_2v_1 = -\frac{v_i}{R_2}, \tag{3.19.1}$$

$$\frac{v_u - v_1}{R_1} = sC_2v_1 + sC_1(v_1 - v_i), \tag{3.19.2}$$

može se odrediti funkcija prenosa kola sa slike 3.19.1:

$$H(s) = \frac{v_i}{v_u} = \frac{-sC_2R_2}{s^2C_1C_2R_1R_2 + sR_1(C_1 + C_2) + 1}. \tag{3.19.3}$$

Na osnovu prethodnog izraza može se zaključiti da je u pitanju filtar propusnik opsega učestanosti.

b) Učestanost i Q faktor polova funkcije prenosa (3.19.3) su:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}, \tag{3.19.4}$$

$$Q = \frac{\sqrt{C_1C_2}}{C_1 + C_2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \tag{3.19.5}$$

Osetljivosti ovih parametara na promene pasivnih elemenata u kolu prikazanom na slici 3.19.1. su:

$$S_{R_i,C_i}^{\omega_p} = -\frac{1}{2}, \quad i = 1,2, \tag{3.19.6}$$

$$S_{R_1}^{Q} = -\frac{1}{2}, \quad S_{R_2}^{Q} = \frac{1}{2}, \tag{3.19.7}$$

$$S_{C_1}^{Q} = \frac{C_1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial C_1} = \frac{C_1(C_1 + C_2)}{\sqrt{C_1C_2}}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\sqrt{\frac{C_2R_2}{R_1}}\frac{\frac{1}{2}\frac{C_1 + C_2}{\sqrt{C_1}} - \sqrt{C_1}}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2}\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} \tag{3.19.8}$$

$$S_{C_2}^{Q} = 0 - S_{C_1}^{Q} = \frac{1}{2}\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}. \tag{3.19.9}$$

Filtar nije ortogonalan, jer se promenom vrednosti bilo kog pasivnog elementa u kolu menjaju vrednosti i učestanosti i Q faktora polova funkcije prenosa.

c) Ako je $C_1 = C_2 = C$ i $R_1 = R_2 = R$ funkcija prenosa (3.19.3) postaje:

$$H(s) = \frac{-sCR}{s^2C^2R^2 + 2sCR + 1} = \frac{-sCR}{(sCR + 1)^2}. \tag{3.19.10}$$

Ova funkcija prenosa ima dvostruki pol, što znači da se ne može realizovati preko lestvičaste LC ili lestvičaste RC mreže [3]. U imeniocu je Hurvicov polinom drugog reda, a u brojiocu neparan polinom, pa se ova funkcija prenosa može realizovati preko Darlingtonovog kola.

d) Funkcija prenosa (3.19.10) se može realizovati preko Darlingtonovog kola sa otpornikom na ulaznim ili sa otpornikom na izlaznim krajevima. Pošto u tekstu zadatka nije naglašeno koji tip Darlingtonovog kola treba koristiti, biće prikazano rešenje za Darlingtonovo kolo sa otpornikom na ulaznim krajevima.

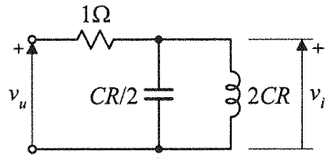
Transformacijom zadate funkcije prenosa:

$$H(s) = \frac{-sCR}{s^2C^2R^2 + 2sCR + 1} = \frac{-\frac{sCR}{s^2C^2R^2 + 1}}{1 + \frac{2sCR}{s^2C^2R^2 + 1}} = \frac{z_{12}}{1 + z_{11}}, \tag{3.19.11}$$

može se odrediti ulazna impedansa lestvičaste LC mreže koju treba razviti jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu:

$$z_{11} = \frac{2sCR}{s^2C^2R^2 + 1} = \frac{1}{\frac{sCR}{2} + \frac{1}{2sCR}}. \tag{3.19.12}$$

Darlingtonovo kolo sa funkcijom prenosa (3.19.10) prikazano je na slici 3.19.2.



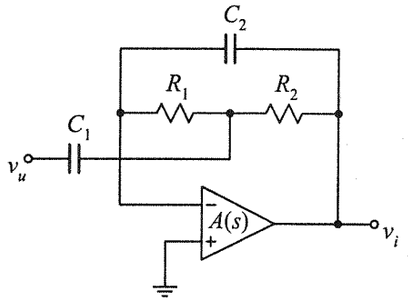
Slika 3.19.2.

3.20. a) Za kolo aktivnog filtra prikazano na slici 3.20.1. odrediti funkciju prenosa i tip filtra.

b) Definisati aktivne osetljivosti za filtar iz prethodne tačke.

c) Ako je operacioni pojačavač idealan, odrediti pasivne osetljivosti ω_p i Q faktora polova funkcije prenosa filtra sa slike 3.20.1. Da li je filtar sa slike ortogonalan?

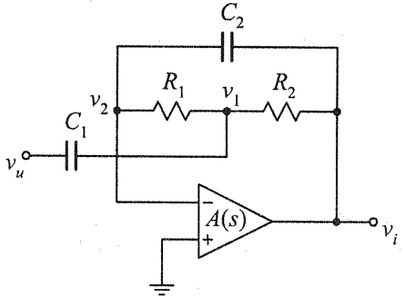
d) Ako je $C_1=C_2=C$, $R_1=R_2=R$ i operacioni pojačavač idealan, izračunati funkciju prenosa kola iz tačke a), a zatim realizovati jedan pasivan filtar sa istom funkcijom prenosa.



Slika 3.20.1.

Rešenje:

a) Pošto se u tački b) traže aktivne osetljivosti zadatog filtra, funkcija prenosa će prvo biti izračunata pod pretpostavkom da operacioni pojačavač nije idealan, odnosno da ima pojačanje $A(s)$ u otvorenoj sprezi. Taj rezultat će biti korišćen u tački b), dok se u ostalim tačkama uvođenjem aproksimacije $A(s)=A_0\to\infty$ izračunata funkcija prenosa može uprostiti.



Slika 3.20.2.

Prema oznakama na slici 3.20.2. može se napisati sistem jednačina:

$$-A(s)v_2=v_i, \tag{3.20.1}$$

$$(v_u-v_1)sC_1=\frac{v_1-v_2}{R_1}+\frac{v_1-v_i}{R_2}, \tag{3.20.2}$$

$$(v_i-v_2)sC_2=\frac{v_2-v_1}{R_1}, \tag{3.20.3}$$

iz koga se određuje funkcija prenosa:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{-sC_1R_2}{\left(1+\frac{1}{A(s)}\right)\left[s^2R_1R_2C_1C_2+s(R_1+R_2)C_2+1+\frac{sR_2C_1}{1+A(s)}\right]}. \tag{3.20.4}$$

Uz pretpostavku da je operacioni pojačavač idealan ($A(s)=A_0\to\infty$), funkcija prenosa se uprošćava:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{-sC_1R_2}{s^2R_1R_2C_1C_2+s(R_1+R_2)C_2+1}, \tag{3.20.5}$$

što znači da je ovo filtar propusnik opsega učestanosti.

b) Funkcija prenosa (3.20.4) se može napisati u sledećem obliku:

$$H(s)=\frac{-\frac{s}{R_1C_2}}{\left(1+\frac{1}{A(s)}\right)\left[s^2+\frac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2+\frac{s}{R_1C_2(A(s)+1)}\right]}. \tag{3.20.6}$$

Ako je operacioni pojačavač idealan, učestanost i Q faktor polova funkcije prenosa imaće vrednosti ω_p i Q. Zbog neidealnosti operacionog pojačavača vrednosti ovih parametara u realnom kolu će se promeniti i biće ω_{pa} i Q_{pa}. Smatrajući da je pojačanje operacionog pojačavača $A(s)=\frac{B}{s}$ i da je $B>>|s|$, prethodna jednačina postaje:

$$H(s)=\frac{1}{\left(1+\frac{s}{B}\right)}\cdot\frac{-\frac{s}{R_1C_2}}{s^2+\frac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2+\frac{s^2}{R_1C_2B}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{s}{B}\right)}}\approx\frac{-\frac{s}{R_1C_2}\left(1-\frac{s}{B}\right)}{s^2+\frac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2+\frac{s^2}{R_1C_2B}\left(1-\frac{s}{B}\right)}, \tag{3.20.7}$$

odnosno:

$$D(s)=s^2+\frac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2+\frac{s^2}{R_1C_2B}\left(1-\frac{s}{B}\right)\approx s^2\left(1+\frac{1}{R_1C_2B}\right)+\frac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2. \tag{3.20.8}$$

Iz ovog izraza se mogu odrediti ω_{pa} i Q_{pa}:

$$\omega_{pa}=\frac{\omega_p}{\sqrt{1+\frac{1}{R_1C_2B}}}, \tag{3.20.9}$$

$$Q_{pa}=Q\sqrt{1+\frac{1}{R_1C_2B}}. \tag{3.20.10}$$

Aktivne osetljivosti filtra su osetljivosti ω_{pa} i Q_{pa} na promene parametara koji određuju karakteristike operacionog pojačavača, odnosno, na promene B:

$$S_B^{\omega_{pa}}=\frac{B}{\omega_{pa}}\frac{\partial\omega_{pa}}{\partial B}, \tag{3.20.11}$$

$$S_B^{Q_{pa}}=\frac{B}{\omega_{pa}}\frac{\partial Q_{pa}}{\partial B}. \tag{3.20.12}$$

c) Iz izraza (3.20.5) za funkciju prenosa filtra sa idealnim operacionim pojačavačem mogu se odrediti učestanost i Q faktor polova:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}, \tag{3.20.13}$$

$$Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2}. \tag{3.20.14}$$

Osetlivosti ovih parametara na promene pasivnih elemenata u kolu filtra su:

$$S_{R_1}^{\omega_p} = S_{R_2}^{\omega_p} = S_{C_1}^{\omega_p} = S_{C_2}^{\omega_p} = -\frac{1}{2}, \tag{3.20.15}$$

$$S_{R_1}^{Q} = -S_{R_2}^{Q} = \frac{1}{2}\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}, \tag{3.20.16}$$

$$S_{C_1}^{Q} = -S_{C_2}^{Q} = \frac{1}{2}. \tag{3.20.17}$$

Filtar nije ortogonalan, jer se promenom vrednosti bilo kog pasivnog elementa u kolu menjaju vrednosti i učestanosti i Q faktora polova funkcije prenosa.

d) Ako je $C_1 = C_2 = C$ i $R_1 = R_2 = R$ funkcija prenosa (3.20.5) postaje:

$$H(s) = \frac{-sCR}{s^2C^2R^2 + 2sCR + 1} = \frac{-sCR}{(sCR+1)^2}. \tag{3.20.18}$$

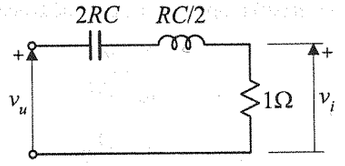
U prethodnom zadatku je objašnjeno da se zbog dvostrukog pola ova funkcija prenosa može realizovati samo preko Darlingtonovih kola i pokazana je realizacija Darlingtonovog kola sa otpornikom na ulazu. Ista funkcija se može realizovati preko Darlingtonovog kola sa otpornikom na izlaznim krajevima na sledeći način:

$$H(s) = \frac{-sCR}{s^2C^2R^2 + 2sCR + 1} = \frac{-\dfrac{sCR}{s^2C^2R^2+1}}{1 + \dfrac{2sCR}{s^2C^2R^2+1}} = \frac{-y_{21}}{1+y_{22}}. \tag{3.20.19}$$

Iz prethodnog izraza se određuje izlazna admitansa lestvičaste LC mreže koju treba razviti jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu:

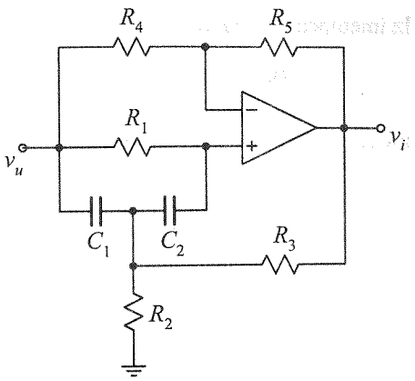
$$y_{22} = \frac{1}{\dfrac{sRC}{2} + \dfrac{1}{s \cdot 2RC}}. \tag{3.20.20}$$

Darlingtonovo kolo sa otpornikom na izlaznim krajevima i funkcijom prenosa (3.20.18) prikazano je na slici 3.20.3.



Slika 3.20.3.

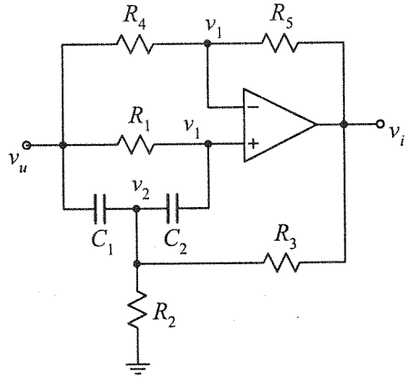
3.21. a) Za kolo prikazano na slici 3.21.1. odrediti funkciju prenosa i pasivne osetljivosti učestanosti ω_p i Q faktora polova funkcije prenosa na promene vrednosti kondenzatora C_1 i C_2.
b) Odrediti da li je filtar sa slike ortogonalan.
c) Ako je $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = 2R_2 = 2R_3 = R$ i $R_4 = R_5$, izračunati funkciju prenosa i tip filtra iz tačke a). Realizovati jedan pasivan filtar sa istom funkcijom prenosa.



Slika 3.21.1.

Rešenje:

a) Prema oznakama na slici 3.21.2. može se napisati sistem jednačina:



Slika 3.21.2.

$$\frac{v_u - v_1}{R_4} = \frac{v_1 - v_i}{R_5}, \tag{3.21.1}$$

$$\frac{v_u - v_1}{R_1} = (v_1 - v_2)sC_2, \tag{3.21.2}$$

$$(v_u - v_2)sC_1 + (v_1 - v_2)sC_2 + \frac{v_i - v_2}{R_3} = \frac{v_2}{R_2}, \tag{3.21.3}$$

iz koga se određuje funkcija prenosa filtra:

$$H(s) = \frac{v_i}{v_u} = \frac{s^2 + s\left[\dfrac{C_1 + C_2}{R_1C_1C_2} - \dfrac{R_5(R_2+R_3)}{R_2R_3R_4C_1}\right] + \dfrac{R_2+R_3}{R_1R_2R_3C_1C_2}}{s^2 + s\left[\dfrac{C_1+C_2}{R_1C_1C_2} + \dfrac{1}{C_1R_2} - \dfrac{R_5}{C_1R_3R_4}\right] + \dfrac{R_2+R_3}{R_1R_2R_3C_1C_2}}. \tag{3.21.4}$$

Iz imenioca ove funkcije prenosa:

$$D(s)=s^2+\frac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2, \tag{3.21.5}$$

mogu se odrediti sledeći parametri:

$$\omega_p=\sqrt{\frac{1}{C_1C_2R_1}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}, \tag{3.21.6}$$

$$\frac{\omega_p}{Q}=\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)+\frac{1}{C_1R_2}-\frac{R_5}{C_1R_3R_4}. \tag{3.21.7}$$

Osetljivosti učestanosti polova funkcije prenosa na promene C_1 i C_2 su:

$$S_{C_i}^{\omega_p}=-\frac{1}{2}. \tag{3.21.8}$$

Osetljivosti Q faktora polova funkcije prenosa mogu se odrediti korišćenjem izraza (3.21.7) i sledeće osobine osetljivosti:

$$S_x^{\omega_p/Q}=S_x^{\omega_p}-S_x^Q \Rightarrow S_x^Q=S_x^{\omega_p}-S_x^{\omega_p/Q}, \tag{3.21.9}$$

odnosno:

$$S_{C_1}^Q=-\frac{1}{2}-\frac{C_1}{\frac{\omega_p}{Q}}\left(-\frac{1}{R_1C_1^2}-\frac{1}{R_2C_1^2}+\frac{R_5}{C_1^2R_3R_4}\right), \tag{3.21.10}$$

$$S_{C_2}^Q=-\frac{1}{2}-\frac{C_2}{\frac{\omega_p}{Q}}\left(-\frac{1}{R_1C_2^2}\right). \tag{3.21.11}$$

Na kraju se račun može proveriti traženjem zbira svih osetljivosti Q faktora polova na promene vrednosti kondenzatora koji treba da bude jednak nuli:

$$S_{C_1}^Q+S_{C_2}^Q=-1+\frac{Q}{\omega_p}\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}-\frac{R_5}{C_1R_3R_4}+\frac{1}{R_1C_2}\right)=-1+1=0. \tag{3.21.12}$$

b) Na osnovu izraza (3.21.6) i (3.21.7) se može zaključiti da je filtar ortogonalan, jer se menjenjem vrednosti otpornika R_4 ili R_5 vrednost Q faktora polova nezavisno može podešavati u odnosu na učestanost polova.

c) Za $C_1=C_2=C$, $R_1=2R_2=2R_3=R$ i $R_4=R_5$, funkcija prenosa filtra sa slike 3.21.1. je:

$$H(s)=\frac{s^2-\frac{2}{RC}s+\frac{4}{R^2C^2}}{s^2+\frac{2}{RC}s+\frac{4}{R^2C^2}}, \tag{3.21.13}$$

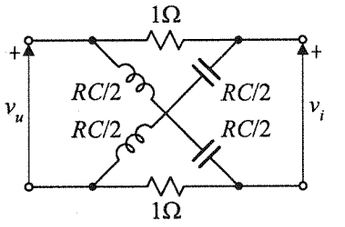
što znači da se radi o filtru svepropusniku učestanosti. Pasivna realizacija ove funkcije prenosa može se izvesti preko ukrštenog četvoropola:

$$H(s)=\frac{Z_a-Z_b}{Z_a+Z_b}=\frac{\frac{s^2+\frac{4}{R^2C^2}}{\frac{2}{RC}s}-1}{\frac{s^2+\frac{4}{R^2C^2}}{\frac{2}{RC}s}+1}, \tag{3.21.14}$$

odakle je:

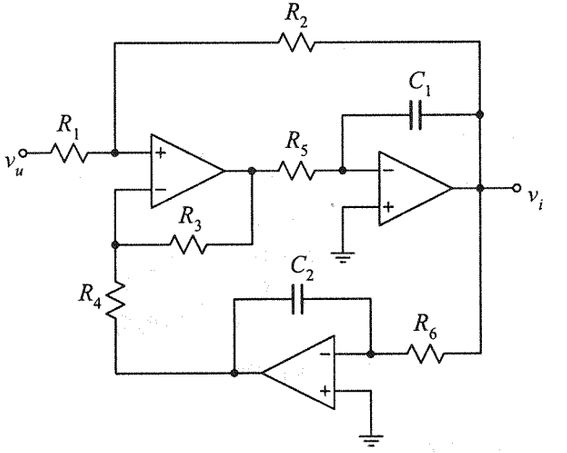
$$Z_a=\frac{s^2+\frac{4}{R^2C^2}}{\frac{2}{RC}s}=\frac{RC}{2}s+\frac{1}{\frac{RC}{2}s}, \tag{3.21.15}$$

a Z_b je otpornik vrednosti 1Ω. Ukršteni četvoropol čija je funkcija prenosa zadata izrazom (3.21.13) prikazan je na slici 3.21.3.



Slika 3.21.3.

3.22. a) Za kolo sa slike 3.22.1. izračunati funkciju prenosa, tip filtra, učestanost ω_p i Q faktor polova funkcije prenosa.



Slika 3.22.1.

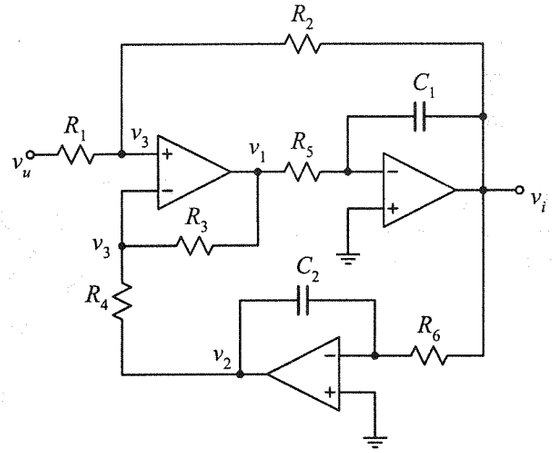
b) Objasniti postupak ortogonalnog podešavanja učestanosti ω_p i Q faktora polova funkcije prenosa. Da li je filtar sa slike 3.22.1. ortogonalan?

c) Izračunati osetljivosti učestanosti ω_p i Q faktora polova funkcije prenosa na promene vrednosti otpornika R_1 i R_3.

d) Ako je $C_1=C_2=C$, $R_3=R_4$ i $R_5=R_6=R$, odrediti odnos otpornika R_1 i R_2, tako da pojačanje na učestanosti ω_p bude -1 i nacrtati raspored polova u kompleksnoj ravni.

Rešenje:

a) Prema oznakama na slici 3.22.2. može se napisati sistem jednačina:



Slika 3.22.2.

$$v_1 = -sC_1R_5v_i\,, \tag{3.22.1}$$

$$v_i = -sC_2R_6v_2\,, \tag{3.22.2}$$

$$v_3 = \frac{R_2}{R_1+R_2}v_u + \frac{R_1}{R_1+R_2}v_i\,, \tag{3.22.3}$$

$$v_3 = \frac{R_3}{R_3+R_4}v_2 + \frac{R_4}{R_3+R_4}v_1\,, \tag{3.22.4}$$

iz koga se određuje funkcija prenosa filtra propusnika opsega učestanosti:

$$H(s) = \frac{v_i}{v_u} = \frac{-s\dfrac{R_2(R_3+R_4)}{R_4R_5(R_1+R_2)C_1}}{s^2 + s\dfrac{R_1(R_3+R_4)}{R_4R_5(R_1+R_2)C_1} + \dfrac{R_3}{R_4R_5R_6C_1C_2}}\,. \tag{3.22.5}$$

Učestanost i Q faktor polova ove funkcije prenosa su:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{R_3}{R_4R_5R_6C_1C_2}}\,, \tag{3.22.6}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_3R_4R_5}{R_6}\frac{C_1}{C_2}}\,\frac{R_1+R_2}{R_1(R_3+R_4)}\,. \tag{3.22.7}$$

b) Ortogonalno podešavanje učestanosti i Q faktora polova funkcije prenosa je nezavisno podešavanje ovih parametara promenom vrednosti jednog ili više elemenata u kolu filtra. Na primer, ako je podešena učestanost polova ω_p u filtru iz prethodne tačke, Q faktor polova se nezavisno može podešavati preko otpornika R_1 i R_2.

c) Na osnovu izraza (3.22.6) i (3.22.7) mogu se izračunati tražene osetljivosti:

$$S_{R_1}^{\omega_p} = 0\,,\quad S_{R_3}^{\omega_p} = \frac{1}{2}\,, \tag{3.22.8}$$

$$S_{R_1}^{Q} = \frac{R_1}{Q}\sqrt{\frac{R_3R_4R_5}{R_6}\frac{C_1}{C_2}}\,\frac{1}{R_3+R_4}\,\frac{\partial}{\partial R_1}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) = -\frac{R_2}{R_1+R_2}\,, \tag{3.22.9}$$

$$S_{R_3}^{Q} = \frac{R_3}{Q}\sqrt{\frac{R_4R_5}{R_6}\frac{C_1}{C_2}}\,\frac{R_1+R_2}{R_1}\,\frac{\partial}{\partial R_3}\left(\frac{\sqrt{R_3}}{R_3+R_4}\right) = \frac{R_4-R_3}{R_3+R_4}\,. \tag{3.22.10}$$

d) Ako je $C_1=C_2=C$, $R_3=R_4$ i $R_5=R_6=R$, učestanost i Q faktor polova funkcije prenosa (3.22.5) su $\omega_p = \dfrac{1}{RC}$ i $Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{R_1+R_2}{R_1}$. Na učestanosti ω_p funkcija prenosa je:

$$H(j\omega_p) = \frac{-j\omega_p\dfrac{2R_2}{RC(R_1+R_2)}}{-\omega_p^2 + j\omega_p\dfrac{2R_1}{RC(R_1+R_2)} + \dfrac{1}{R^2C^2}} = -\frac{R_2}{R_1}\,, \tag{3.22.11}$$

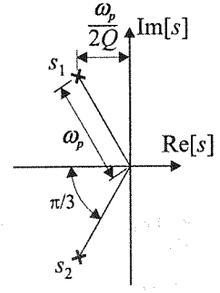
što znači da otpornici R_1 i R_2 treba da budu jednaki da bi pojačanje na ovoj učestanosti bilo -1 kao što se traži u zadatku. Pod ovim uslovom je $Q=1$, pa se položaj polova funkcije prenosa može izračunati iz jednačine:

$$s^2 + \frac{\omega_p}{Q}s + \omega_p^2 = s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{R^2C^2} = 0\,, \tag{3.22.12}$$

odnosno:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2}\frac{\omega_p}{Q} \pm j\omega_p\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{2RC} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2RC}\,. \tag{3.22.13}$$

Položaj polova zadate funkcije prenosa u kompleksnoj ravni prikazan je na slici 3.22.3. Učestanost kompleksnog pola je određena modulom kompleksnog broja, odnosno rastojanjem od koordinatnog početka u kompleksnoj ravni do tog pola. Udaljenost kompleksnog pola od imaginarne ose je obrnuto srazmerna Q faktoru tog pola (slika 3.22.3.).



Slika 3.22.3.

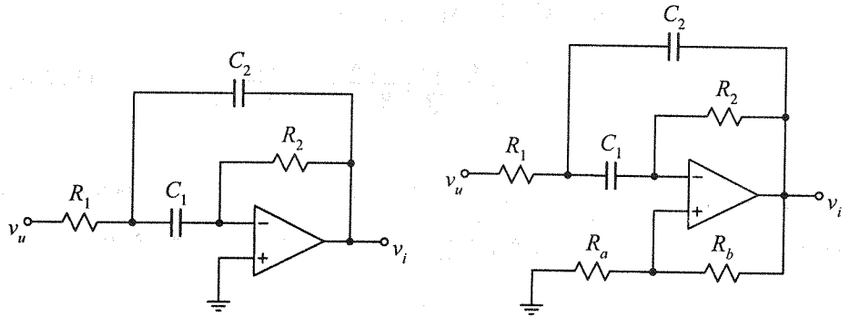
3.23. Kolo filtra sa jednim operacionim pojačavačem (slika 3.23.1a) projektovano je tako da normalizovane vrednosti učestanosti i Q faktora polova funkcije prenosa imaju vrednosti: $f_p=10$ i $Q=2$. Poznato je da je $C_1=C_2=C$.

a) Ako se u kolo doda grana povratne sprege R_a, R_b kao na slici 3.23.1b, izračunati i nacrtati geometrijsko mesto polova funkcije prenosa filtra u zavisnosti od parametra $K=1+R_b/R_a$.

b) Odrediti granične vrednosti parametra K za koje je kolo stabilno.

c) Ako se dobijena funkcija prenosa realizuje u vidu pasivne mreže bez gubitaka pobuđene naponskim generatorom unutrašnje otpornosti $R_g=1\Omega$, odrediti granične vrednosti parametra K za koje se ovo kolo može realizovati.

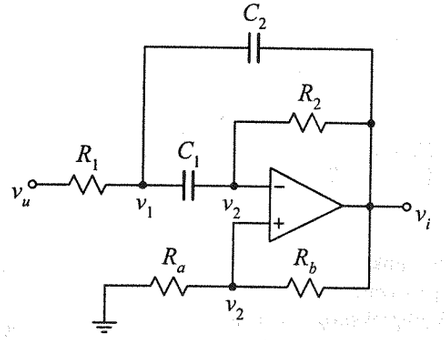
d) Realizovati pasivno kolo iz tačke c) za $K\to\infty$.



Slika 3.23.1.

Rešenje:

a) Prema oznakama na slici 3.23.2. može se napisati sistem jednačina:



Slika 3.23.2.

$$\frac{1}{R_1}(v_u-v_i)=sC_2(v_1-v_i)+sC_1(v_1-v_2), \tag{3.23.1}$$

$$sC_1(v_1-v_2)=\frac{1}{R_2}(v_2-v_i), \tag{3.23.2}$$

$$v_2=\frac{R_a}{R_a+R_b}v_i=\frac{1}{1+\frac{R_b}{R_a}}v_i=\frac{v_i}{K}, \tag{3.23.3}$$

iz koga se određuje funkcija prenosa filtra:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{-s\frac{1}{R_1C_2}\frac{K}{K-1}}{s^2+s\left[\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}-\frac{1}{R_1C_2(K-1)}\right]+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}. \tag{3.23.4}$$

Prema tekstu zadatka je $C_1=C_2=C$, pa je:

$$H(s)=\frac{-s\frac{1}{R_1C}\frac{K}{K-1}}{s^2+s\left[\frac{2}{R_2C}-\frac{1}{R_1C(K-1)}\right]+\frac{1}{R_1R_2C^2}}. \tag{3.23.5}$$

Za $K\to\infty$ se ukida povratna sprega preko grane R_a, R_b u kolu prikazanom na slici 3.23.1b, pa se pod ovim uslovom iz izraza (3.23.5) dobija funkcija prenosa kola sa slike 3.23.1a:

$$H_a(s)=\frac{-s\frac{1}{R_1C}}{s^2+s\frac{2}{R_2C}+\frac{1}{R_1R_2C^2}}=\frac{-s\frac{1}{R_1C}}{s^2+s\frac{\omega_p}{Q}+\omega_p^2}. \tag{3.23.6}$$

Prema tekstu zadatka je $f_p=10$ i $Q=2$, pa iz prethodne jednačine sledi:

$$\frac{\omega_p}{Q}=\frac{2}{R_2C}\to R_2C=\frac{2Q}{\omega_p}=\frac{1}{5\pi}, \tag{3.23.7}$$

$$\omega_p^2=\frac{1}{R_1R_2C^2}\to R_1C=\frac{1}{\omega_p^2R_2C}=\frac{1}{2Q\omega_p}=\frac{1}{80\pi}. \tag{3.23.8}$$

Zamenom ovih vrednosti u izraz (3.23.5) dobija se karakteristična jednačina kola sa slike 3.23.1b u sledećem obliku:

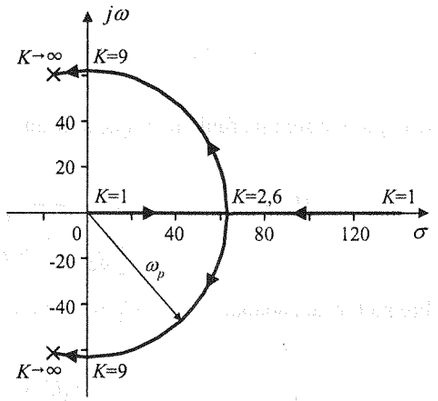
$$D(s)=s^2+s\left(\frac{\omega_p}{Q}-\frac{2Q\omega_p}{K-1}\right)+\omega_p^2=s^2+s\frac{\omega_p(K-9)}{2(K-1)}+\omega_p^2, \tag{3.23.9}$$

odnosno, polovi te funkcije prenosa:

$$s_{1,2}=-\frac{\omega_p}{4}\frac{K-9}{K-1}\pm j\frac{\omega_p}{4}\frac{\sqrt{15K^2-14K-65}}{K-1}. \tag{3.23.10}$$

Prema uslovu zadatka je $K=1+R_b/R_a$, pa se za $K=1$ može izračunati da jedna grana geometrijskog mesta polova kreće iz koordinatnog početka, a druga iz $s\to\infty$. Iz izraza (3.23.10) se može izračunati da će za $1<K<2{,}6$ polovi biti realni, a za $K>2{,}6$ konjugovano kompleksni. Grane geometrijskog mesta polova za $K>2{,}6$ pripadaju kružnici poluprečnika ω_p sa centrom u koordinatnom početku, što sledi iz izraza (3.23.9). Za $K\to\infty$ se dobija $s_{1,2}=-\frac{\omega_p}{4}\pm j\frac{\omega_p}{4}\sqrt{15}=-15{,}7\pm j60{,}8$.

Geometrijsko mesto polova funkcije prenosa kola sa slike 3.23.1b prikazano je na slici 3.23.3.



Slika 3.23.3.

b) Potreban i dovoljan uslov za stabilnost kola drugog reda je da svi koeficijenti u karakterističnoj jednačini sistema budu istog znaka [2]. Na osnovu jednačine (3.23.9) sledi da će kolo prikazano na slici 3.23.1b biti stabilno za $K > 9$. Do istog zaključka se dolazi posmatranjem geometrijskog mesta polova tog sistema (slika 3.23.3.), jer se za $K > 9$ polovi nalaze u levoj poluravni kompleksne učestanosti.

c) Za realizaciju funkcije prenosa $H(s)$ u vidu pasivne mreže bez gubitaka pobuđene naponskim generatorom unutrašnje otpornosti R_g=1Ω, odnosno preko Darlingtonovog kola, imenilac funkcije prenosa mora da bude Hurvicov polinom. To znači da je potrebno da svi koeficijenti u tom polinomu budu istog znaka, tj. uslov je isti kao u tački b), potrebno je da bude $K > 9$.

Na osnovu izraza (3.23.5) sledi da je brojilac funkcije prenosa neparan polinom, što znači da je ispunjen i drugi uslov potreban za realizaciju preko Darlingtonovog kola.

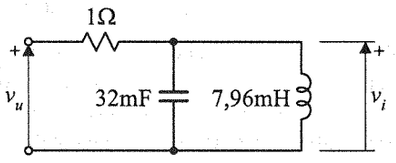
d) Za $K \to \infty$, na osnovu izraza (3.23.6) i (3.23.8) funkcija prenosa koju je potrebno realizovati je:

$$H_a(s) = \frac{-s2Q\omega_p}{s^2 + s\frac{\omega_p}{Q} + \omega_p^2} = \frac{-s80\pi}{s^2 + s10\pi + 400\pi^2} = \frac{\frac{-s80\pi}{s^2+400\pi^2}}{\frac{s10\pi}{s^2+400\pi^2}+1} = \frac{z_{12}}{z_{11}+1}. \quad (3.23.11)$$

Funkcija prenosa drugog reda ima jednu nulu u koordinatnom početku, što znači da ulaznu impedansu z_{11} lestvičaste LC mreže treba razvijati jednom u Kauerovu I i jednom u Kauerovu II formu:

$$z_{11} = \frac{s \cdot 10\pi}{s^2 + 400\pi^2} = \frac{1}{s\frac{1}{10\pi} + \frac{1}{s}40\pi}. \quad (3.23.12)$$

Darlingtonovo kolo sa zadatom funkcijom prenosa sintetisano na osnovu ovog razvoja prikazano je na slici 3.23.4.



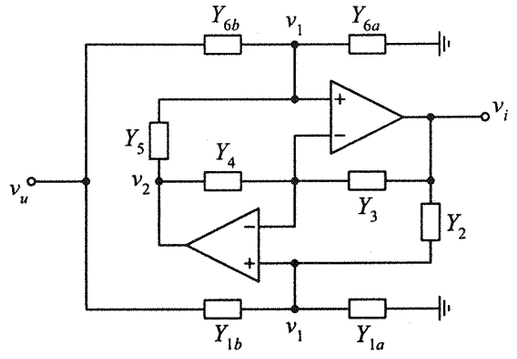
Slika 3.23.4.

3.24. Na slici 3.24.1. je prikazana *Fliege*-ova bikvadratna sekcija sa dva operaciona pojačavača koja se često koristi u praksi za realizaciju raznih tipova funkcija prenosa.

a) Izračunati funkciju prenosa ove sekcije.

b) Pokazati kako se može realizovati NF filtar korišćenjem *Fliege*-ove bikvadratne sekcije.

c) Izračunati pasivne osetljivosti učestanosti i Q faktora polova funkcije prenosa NF filtra iz prethodne tačke.



Slika 3.24.1.

Rešenje:

a) *Fliege*-ova bikvadratna sekcija je dobijena modifikacijom šeme GIC konvertora [5]. Prema oznakama na slici 3.24.1. može se napisati sistem jednačina:

$$Y_{1b}(v_u - v_1) = Y_{1a}v_1 + Y_2(v_1 - v_i), \quad (3.24.1)$$

$$Y_3(v_i - v_1) = Y_4(v_1 - v_2), \quad (3.24.2)$$

$$Y_{6b}(v_u - v_1) = Y_{6a}v_1 + Y_5(v_1 - v_2), \quad (3.24.3)$$

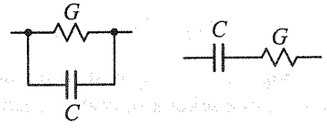
iz koga se određuje funkcija prenosa:

$$H(s) = \frac{v_i}{v_u} = \frac{Y_{6b}(Y_2Y_4 + Y_{1a}Y_4) + Y_{1b}(Y_3Y_5 - Y_{6a}Y_4)}{Y_1Y_3Y_5 + Y_2Y_4Y_6}, \quad (3.24.4)$$

gde su $Y_1 = Y_{1a} + Y_{1b}$ i $Y_6 = Y_{6a} + Y_{6b}$.

Za realizaciju bikvadratne funkcije potrebno je da polinom u imeniocu izraza (3.24.4) bude drugog reda sa svim koeficijentima različitim od nule. To znači da bar jedna admitansa u kolu prikazanom na slici 3.24.1. mora da bude realizovana kao paralelna ili redna veza otpornika i kondenzatora (slika 3.24.2.), tako da se dobiju faktori prvog reda $G + sC$, odnosno $sCG/(G + sC)$, bar u jednom proizvodu u imeniocu funkcije prenosa.

Na osnovu brojioca u izrazu (3.24.4) može se zaključiti da se korišćenjem *Fliege*-ove bikvadratne sekcije mogu realizovati različiti tipovi funkcija prenosa drugog reda. Uz male izmene u tom kolu može se realizovati i funkcija svepropusnika učestanosti [5].



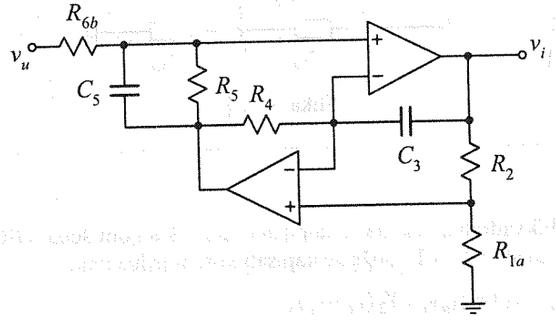
Slika 3.24.2.

b) Funkcija prenosa NF filtra drugog reda treba da ima konstantu u brojiocu i polinom drugog reda u imeniocu. Prema izrazu (3.24.4), ako se usvoji $Y_{1b}=Y_{6a}=0$ i $Y_5=G_5+sC_5$, sledi da admitansa Y_3 mora biti kapacitivna $Y_3=sC_3$, jer admitansa Y_{1a} figuriše i u brojiocu i u imeniocu funkcije prenosa. Sve ostale admitanse treba da budu provodnosti. Ovakvim izborom elemenata dobija se funkcija prenosa:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{G_{6b}(G_2G_4+G_{1a}G_4)}{s^2G_{1a}C_3C_5+sG_{1a}G_5C_3+G_2G_4G_{6b}}, \tag{3.24.5}$$

odnosno, dobija se kolo NF filtra prikazano na slici 3.24.3. Funkcija prenosa tog kola se može napisati u obliku:

$$H(s)=\frac{v_i}{v_u}=\frac{1+R_{1a}/R_2}{R_4R_{6b}C_3C_5}\cdot\frac{1}{s^2+s\dfrac{1}{R_5C_5}+\dfrac{R_{1a}/R_2}{R_4R_{6b}C_3C_5}}. \tag{3.24.6}$$



Slika 3.24.3.

c) Na osnovu izraza (3.24.6) mogu se odrediti učestanost i Q faktor polova funkcije prenosa ovog NF filtra:

$$\omega_p=\sqrt{\frac{R_{1a}/R_2}{R_4R_{6b}C_3C_5}}, \tag{3.24.7}$$

$$Q=R_5\sqrt{\frac{R_{1a}C_5}{R_2R_4R_{6b}C_3}}. \tag{3.24.8}$$

Pasivne osetljivosti učestanosti i Q faktora polova funkcije prenosa su:

$$S_{R_2}^{\omega_p}=S_{R_4}^{\omega_p}=S_{R_{6b}}^{\omega_p}=-S_{R_{1a}}^{\omega_p}=S_{C_3}^{\omega_p}=S_{C_5}^{\omega_p}=-\frac{1}{2}, \tag{3.24.9}$$

$$S_{R_2}^{Q}=S_{R_4}^{Q}=S_{R_{6b}}^{Q}=-S_{R_{1a}}^{Q}=S_{C_3}^{Q}=-S_{C_5}^{Q}=-\frac{1}{2},\quad S_{R_5}^{Q}=1. \tag{3.24.10}$$

Zbog malih osetljivosti i mogućnosti nezavisnog podešavanja Q faktora od učestanosti polova, ova sekcija se često koristi u praksi.