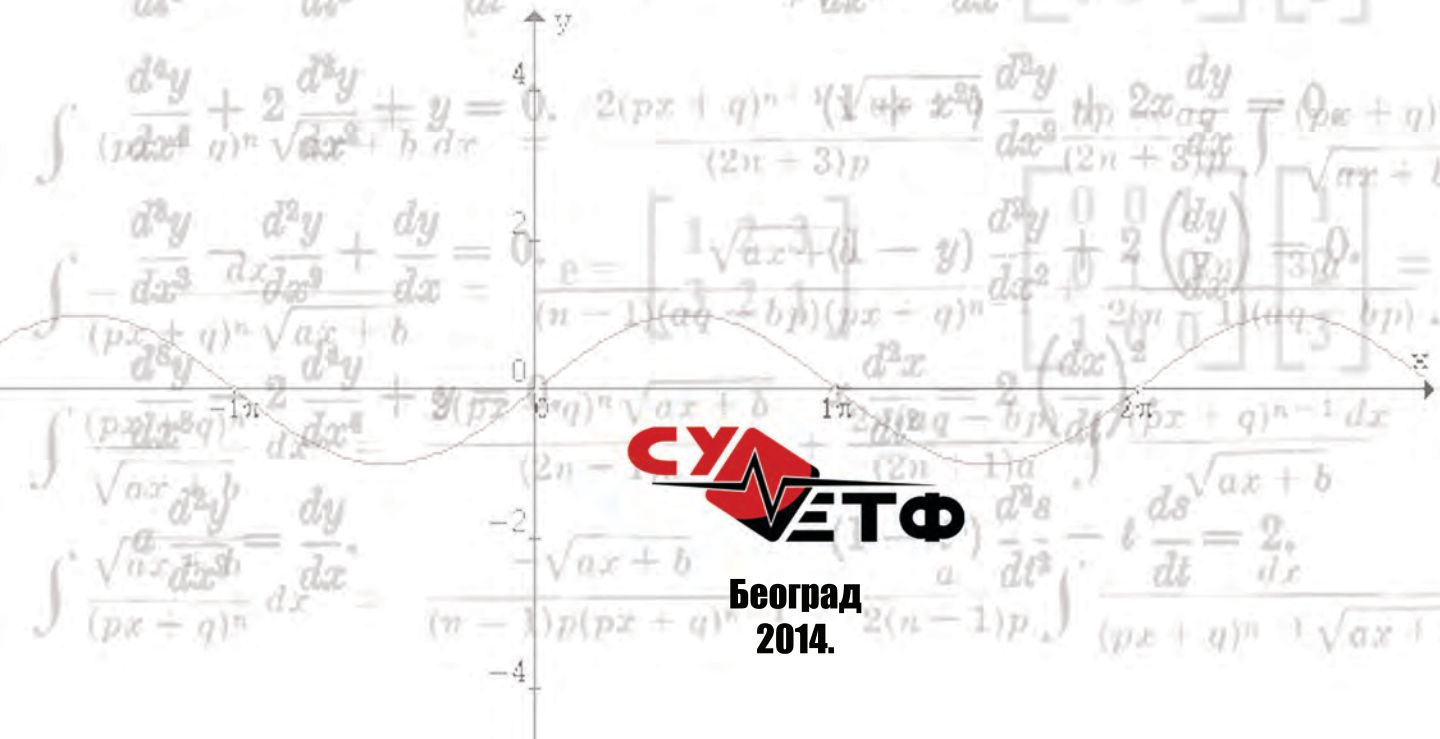
Стефан Ћировић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

[ЗА ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА 4]

• ТЕОРИЈА СА ПРЕДАВАЊА И ЗАДАЦИ СА ВЕЖБИ •



Београд
2014.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

I НЕДЕЉА
04.09.2013

(1) Системи диференцијалних једначина

Теорема 1: Теорема егзистенције решења

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad D: \frac{d}{dx} \rightarrow \text{оператор диференцирања (задовољава услове како би био линеарни оператор)}$$
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Под системом обичних диференцијалних једначина подразумевамо скуп диференцијалних једначина у којима се поред независне променљиве t налазе експлицитно или имплицитно задате непознате функције $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ и њихови изводи:

$$f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = 0$$
$$f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = 0$$

* обичне се односи да су обичне без парцијалних извода.

Теорема 2: Нормални систем од n обичних диференцијалних једначина првог реда (односи се на извод) је систем облика:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

СУНЕТФ

где функције f задовољавају одговарајуће особине

$$\boxed{\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad i = \overline{1,n}}$$

n - одређује ред система

Теорема 3: Под решењем (интегралом) система подразумевамо скуп функција:

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \dots,\ x_n = \varphi_n(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$

уколико је $\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ за $t \in [\alpha, \beta]$ и $i = \overline{1,n}$

Под решењем подразумевамо n-торку $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$;

$$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

Теорема 4: Решење система облика:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ x_2 &= \varphi_2(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \qquad (1) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned}$$

где су C_i, $i = \overline{1,n}$ међусобно независне константе (интеграционе константе) зове се општи решење (интеграл) система (1).

Теорема 5: Ако се у општем решењу нормалног система (1) на било који начин одреди бар једна интеграциона константа C_i $(i = \overline{1,n})$ тада се такво решење назива партикуларно решење тј. партикуларни интеграл система (1)

Теорема 6: Под Коширјевим почетним условима подразумевамо скуп једнакости

$$x_1(t_0) = x_{10}$$
$$x_2(t_0) = x_{20}$$
$$\vdots$$
$$x_n(t_0) = x_{n0}$$

где су t_0 и x_{i0} $(i = \overline{1,n})$ унапред дати реални бројеви, а решење система (1) које задовољава Коширјеве почетне услове зовемо Коширјево решење или Коширјев интеграл система (1)

• Систем (1) се често записује у симетричној форми:

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n)} = \frac{dt}{1}$$

Пример:

$$\frac{dx}{t^2+x+y-z} = \frac{dy}{x-y+z} = \frac{dz}{e^t+tx-z} = dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = t^2+x+y-z$$
$$\frac{dy}{dt} = x-y+z$$
$$\frac{dz}{dt} = e^t+tx-z$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \lambda$$
$$\frac{P_1\cdot a + P_2\cdot b + P_3\cdot c}{P_1\cdot A + P_2\cdot B + P_3\cdot C} = \lambda$$

Систем (1) можемо записати у матричном облику

$$\frac{dX}{dt} = F(t,X) \qquad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad F(t,X) = \begin{bmatrix} f_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ f_2(t,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{bmatrix}$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

СУ ВЕТФ

$x(t),\ y(t),\ z(t)$

$$X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \qquad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} t^2 + x + y + z \\ x - y + z \\ e^t + tx - z \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}$$

ПРВО ИСПИТНО ПИТАЊЕ:

Теорема 8: Теорема о егзистенцији јединственог решења нормалног система (1)

$x_i = \varphi_i(t)$ $i = \overline{1,n}$ – тражимо партикуларно решење

$x_i(t_0) = x_{i0}$ $i = \overline{1,n}$ које задовољава Кошијеве услове

$t \in [\alpha, \beta]$

Ако су ф-је $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i = \overline{1,n}$ непрекидне у некој околини тачке $M(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ – тачка у $n+1$ димензионом простору R^{n+1} и ако су парцијални изводи $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n})$ непрекидни у тој околини тада нормални систем (1) има јединствено решење у тој околини и $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ које задовољава почетне услове. ПРВО ИСПИТНО ПИТАЊЕ!

Теорема 9: Први интеграл нормалног система (1)

Нека је дати систем $\frac{dx}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ $(i = \overline{1,n})$

претпостављамо да је $x_i(t) = \varphi_i(t)$ $i = \overline{1,n}$; $t \in [\alpha, \beta]$ је неко решење система (1) и нека је $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ дата релација где је C произвољна константа која не зависи од t и x-ова.

Ако је $\Phi(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = C_0$ на $t \in [\alpha, \beta]$ где је C_0 фиксирана константа тада се релација ~~прва~~ ПРВИ ИНТЕГРАЛ нормалног система (1)

• Нека је позната n првих интеграла

$$\Phi_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1$$
$$\vdots$$
$$\Phi_n(t, x_1, \dots, x_n) = C_n$$

Може се показати да важи, да ако први интеграли Φ_1 до Φ_n буду међусобно независни потребно је и довољно да буде

$$W(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dots & & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

различита од **0**.

Из првих n интеграла се може добити (решити по x)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, C_1, \dots, C_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(t, C_1, \dots, C_n) \end{aligned}\right\} \text{ОПШТЕ РЕШЕЊЕ СИСТЕМА}$$

- **Пример:**

1) $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= t^2 + 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 4 - t^2 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow \frac{\partial (x+y)}{\partial t} = 5$$
$$x(t) + y(t) = 5t + C_1$$
$$\underbrace{x + y - 5t}_{\Phi(t,x,y)} = C_1$$

2) $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= y + x \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= x + z \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= y + z \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial (x+y+z)}{\partial t} = 2(x+y+z)$$

СМЕНА: $u = x + y + z$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u$$
$$x + y + z = C_1 \cdot e^{2t}$$
$$\underbrace{e^{-2t}(x + y + z)}_{\Phi_1(t,x,y,z)} = C_1$$

I НЕДЕЉА
05.04.2013.

ВЕЖБЕ

1. МЕТОД ЕЛИМИНАЦИЈЕ ЈЕДНЕ НЕПОЗНАТЕ ФУНКЦИЈЕ

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 3y \;/\; \frac{d^2}{dt^2} & (1) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -8x - 2y \end{cases}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -4\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{d^2y}{dt^2} \quad (1)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -4\frac{d^2x}{dt^2} - 3(-8x - 2y)$$

$$\boxed{\frac{d^4x}{dt^4} = -4\frac{d^2x}{dt^2} + 24x + 6y} \qquad +2\cdot(3y)$$

$$(2)\quad 3y = -4x - \frac{d^2x}{dt^2} \Leftarrow (1)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -4\frac{d^2x}{dt^2} + 24x + 2\cdot\left(-4x - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -4\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 24x - 8x - 2\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 6\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - 16\cdot x = 0$$

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 - 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-6 \pm 10}{2} \quad \begin{matrix} -8 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{\lambda_1^2 = -8 \quad \lambda_2^2 = 2}$$

$$\lambda^2 = -8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}\,j \rightarrow \cos(2\sqrt{2}t),\ \sin(2\sqrt{2}t)$$

$$\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2} \rightarrow e^{\sqrt{2}t},\ e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\boxed{x(t) = c_1\cdot\cos(2\sqrt{2}t) + c_2\cdot\sin(2\sqrt{2}t) + c_3\cdot e^{\sqrt{2}t} + c_4\cdot e^{-\sqrt{2}t}} \quad (3)$$

(3) → (1)

$$3y = -4\cdot\left(C_1\cos(2\sqrt{2}t) + C_2\sin(2\sqrt{2}t) + C_3e^{\sqrt{2}t} + C_4e^{-\sqrt{2}t}\right) - \left(-8C_1\cos(2\sqrt{2}t) - 8C_2\sin(2\sqrt{2}t) + 2C_3e^{\sqrt{2}t} + 2C_4e^{-\sqrt{2}t}\right)$$

$$3y = 4\cdot C_1\cos(2\sqrt{2}t) + 4C_2\sin(2\sqrt{2}t) - 6C_3e^{\sqrt{2}t} - 6C_4e^{-\sqrt{2}t} \;/:3$$

$$y = 4\left(\frac{C_1}{3}\right)\cos(2\sqrt{2}t) + 4\frac{C_2}{3}\sin(2\sqrt{2}t) - 2C_3e^{\sqrt{2}t} - 2C_4e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\frac{C_1}{3} = D_1\,,\quad \frac{C_2}{3} = D_2\;;\quad C_1 = 3D_1\,,\quad C_2 = 3D_2$$

$$x(t) = 3D_1\cos(2\sqrt{2}t) + 3D_2\sin(2\sqrt{2}t) + C_3e^{+\sqrt{2}t} + C_4e^{-\sqrt{2}t}$$

$$y(t) = 4D_1\cos(2\sqrt{2}t) + 4D_2\sin(2\sqrt{2}t) - 2C_3e^{\sqrt{2}t} - 2C_1e^{-\sqrt{2}t}$$

$D_1, D_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

(2.) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - 2y$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 2x - y \;/\frac{d^2}{dt^2}$

ДОМАТИ

$$x(t) = (C_1 + C_2t)\cdot e^t + (C_3 + C_4t)e^{-t}$$

$$y(t) = (C_1 - C_2 + C_2t)e^t + (C_3 + C_4 + C_4t)e^{-t}$$

РЕШЕНЕ!

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x \quad (1) \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases} \Big/ \frac{d}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2 \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2 \cdot \left(4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \right) - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \cdot 2y - 6x + 2 \cdot \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} - \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

$(1) \Rightarrow 2y = \frac{dx}{dt} + x \quad (4)$

$(4) \rightarrow (3)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \cdot \left(\frac{dx}{dt} + x \right) - 6x + 2 \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} + 4x - 6x + 2\frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} - \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2\frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}}$$

(H) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$

$e^t, \quad e^{2t}$

$x_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$

$x(t) = C_1(t) \cdot e^t + C_2(t) \cdot e^{2t} \quad (1')$

$C_1'(t) e^t + C_2'(t) e^{2t} = 0 \quad /: e^t$

$C_1'(t) (e^t)' + C_2'(t) (e^{2t})' = 2 \cdot \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$

ЛАГРАНЖОВ МЕТОД ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ!

$$C_1'(t) + C_2'(t)e^t = 0$$

$$C_1'(t)e^t + C_2'(t)\cdot 2\cdot e^{2t} = 2\,\frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \;/:e^t$$

$$C_1'(t) + C_2'(t)\,e^t = 0$$

$$C_1'(t) + 2\cdot C_2'(t)\,e^t = 2\cdot\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} \;\cdot(-1)$$

$$C_2'(t)e^t = 2\,\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}$$

$$C_2'(t) = 2\cdot\frac{e^t}{e^{2t}+1} \quad\Rightarrow\quad C_1'(t) = -C_2'(t)\cdot e^t$$

$$C_1'(t) = -2\cdot\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}$$

$$C_1(t) = -\int\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}\,dt \qquad \left\{\begin{array}{l} e^{2t}+1 = z \\ 2e^{2t}dt = dz \\ e^{2t}+1 > 0 \end{array}\right\}$$

$$C_1(t) = -\int\frac{dz}{z} = -\ln|z|$$

$$C_1(t) = -\ln|e^{2t}+1| = -\ln(e^{2t}+1) + C_1 \quad (5)$$

* константу интеграције не смемо да заборавимо

$$C_2(t) = \int\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\,dt \qquad \left\{\begin{array}{l} e^t = u \\ e^t dt = du \end{array}\right\}$$

$$C_2(t) = 2\int\frac{du}{u^2+1} = 2\cdot\operatorname{arctg} u = 2\cdot\operatorname{arctg} e^t + C_2 \quad (6)$$

(5), (6) $\rightarrow$ (1')

$$x(t) = (-\ln(e^{2t}+1) + C_1)e^t + (2\operatorname{arctg} e^t + C_2)\cdot e^{2t}$$

$$x(t) = \underbrace{C_1e^t + C_2e^{2t}}_{x_h(t)} \underbrace{- e^t\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}\operatorname{arctg}(e^t)}_{x_p(t)} \quad (7)$$

(7) $\rightarrow$ (4)

$$2y = C_1e^t + C_2\,2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) - e^t\cdot\frac{1}{e^{2t}+1}\cdot 2e^{2t}$$

$$+4e^{2t}\operatorname{arctg}(e^t) + 2e^{2t}\frac{1}{e^{2t}+1}e^t +$$

$$\underbrace{C_1e^t + C_2e^{2t} - e^t\cdot\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}\operatorname{arctg}e^t}_{x}$$

$$2y = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} - 2e^t \ln(e^{2t}+1) + 6\cdot e^{2t} \operatorname{arctg} e^t$$

$$\boxed{y = C_1 e^t + 3\left(\frac{C_2}{2}\right) e^{2t} - e^t \ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t}$$

$$\frac{C_2}{2} = \bar{C}_2 \quad \Rightarrow \boxed{C_2 = 2\bar{C}_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + 2\bar{C}_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t} \operatorname{arctg}(e^t) \\ y(t) &= C_1 e^t + 3\bar{C}_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg}(e^t) \end{aligned}}$$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ — ЛАГРАНЖОВ МЕТОД ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$

$C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$

$C_1'(x) (y_1(x))' + C_2'(x) y_2'(x) = f(x)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

4. $\frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}$

$\frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}$

$x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \cdot \ln|e^t - 1|$

$y(t) = -2C_1 - \frac{3}{2} C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln|e^t - 1|$

} РЕШЕЊЕ!

---

5. $\frac{dx}{dt} = 3x + y + \frac{1}{t} - 4\ln t$

$\frac{dy}{dt} = -x + y + \frac{1}{t} \quad / \frac{d}{dt}$

$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \ln t$

$y(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 \quad e^{2t} + \ln t$

} РЕШЕЊЕ!

* из резултата се види да је 1. једна диференц.

---

6. $\frac{dx}{dt} = y + tg^2 t - 1$

$\frac{dy}{dt} = -x + tg\,t \quad / \cdot \frac{d}{dt}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\cos^2 t}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -y - tg^2 t + 1 + \frac{1}{\cos^2 t}$

$\left[\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + tg^2 t\right]$

$\begin{cases} 1 = \sin^2 t + \cos^2 t \,/ : \cos^2 t \\ \frac{1}{\cos^2 t} = tg^2 t + 1 \end{cases}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -y - tg^2 t + 1 + 1 + tg^2 t$

$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 2$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ (ХОМОГЕНО И ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ)

(h) $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

$y_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$y_p(t) = A$

$A = 2 \qquad y_p(t) = 2$

$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2$

$x(t) = -\frac{dy}{dt} + tgt$

$x(t) = +C_1 \cdot \sin t - C_2 \cos t + tgt$

$x(t) = -(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + tgt$

$x(t) = -C_2 \cos t + C_1 \sin t + tgt$

$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 = P_n(t) \cdot e^{\alpha t}$

$a_1, a_2 \in R$

$y_p(t) = Q_n(t) \cdot e^{\alpha t}$ $\quad y_h(t)$

$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

α је корен реда j $(j = 1, 2)$

ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ

$y_p(t) = t^j \cdot P_n(t) e^{\alpha t}$

7.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + te^t & (1) \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + 2e^t \;/\; \frac{d}{dt} & (2) \end{cases}$$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 3 \cdot (2x + y + te^t) + 4\frac{dy}{dt} + 2e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 6x + 3y + 3te^t + 4\frac{dy}{dt} + 2e^t \quad (3)$

$(2) \Rightarrow \quad 3x = \frac{dy}{dt} - 4y - 2e^t \quad (4)$

$(4) \Rightarrow (3)$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\left(\frac{dy}{dt} - 4y - 2e^t\right) + 3y + 3te^t + 4\frac{dy}{dt} + 2e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 6\frac{dy}{dt} - 5y + (3t - 2)e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 5y = (3t - 2)e^t$

СУНЕТФ

(H) $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 5y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$ < ⑤ ①

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$

$y_h = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$y_p(t) = t^1 (at + b) e^t$

$y_p(t) = (at^2 + bt) e^t$ $\quad / \frac{d}{dt}$

$y_p'(t) = (2at + b) e^t + (at^2 + bt) e^t$

$\rightarrow y_p'(t) = (at^2 + (2a+b)t + b) e^t$ $\quad / \frac{d}{dt}$

$y_p''(t) = (2at + 2a + b) e^t + (at^2 + (2a+b)t + b) e^t$

$\rightarrow y_p''(t) = (at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b) \cdot e^t$

$(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b) e^t$

$-6(at^2 + (2a+b)t + b) e^t + 5(at^2 + bt) e^t = (3t - 2) e^t \; / : e^t$

$(4a + b - 12a - 6b + 5b)t + 2a + 2b - 6b = 3t - 2$

$-8at + 2a - 4b = 3t - 2$

$-8a = 3 \Rightarrow a = -3/8$

$2a - 4b = -2$

$a - 2b = -1$ $\quad y_p(t) = t \cdot \left(-\frac{3}{8}t + \frac{5}{16}\right) e^t$

$2b = a + 1$

$2b = -\frac{3}{8} + 1$

$b = \frac{5}{16}$

$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \left(-\frac{3}{8}t^2 + \frac{5}{16}t\right) e^t$ (5)

(5) → (4)

$3x = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} + \left(-\frac{3}{4}t + \frac{5}{16}\right) e^t + \left(-\frac{3}{8}t^2 + \frac{5}{16}t\right) e^t$

$$-4C_1 \cdot e^t - 4C_2 \cdot e^{5t} + \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{4}t\right)e^t - 2e^t$$

$$3x = -3C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{4}t - \frac{3}{4}t + \frac{5}{16}t + \frac{5}{16}\right)e^t - 2e^t$$

$$3x = -3C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \left(\frac{12-3}{8}t^2 + \left(\frac{-20-12+5}{16}\right)t + \frac{5}{16}\right)e^t - 2e^t$$

$$3x = -3C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \left[\frac{9}{8}t^2 - \frac{27}{16}t - \frac{27}{16}\right]e^t$$

$$\boxed{x(t) = -C_1 e^t + \frac{C_2}{3}e^{5t} + \left[\frac{3}{8}t^2 - \frac{9}{16}t - \frac{9}{16}\right]e^t}$$

$$x(t) = -C_1 \cdot e^t + \overline{C_2} \cdot e^{5t} + \left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{9}{16}t - \frac{9}{16}\right)e^t$$

$$y(t) = C_1 \cdot e^t + 3\overline{C_2} e^{5t} + t\left(-\frac{3}{8}t + \frac{5}{16}\right)e^t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_2}{3} = \overline{C_2} \\ 3\overline{C_2} = C_2 \end{array} \right. \quad C_1$$

ДОМАТИ:

2. $\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - 2y \quad (1)$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 2x - y \quad / \frac{d^2}{dt^2} \quad (2)$

$\frac{d^4y}{dt^4} = 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2}$

$\frac{d^4y}{dt^4} = 2 \cdot (3x - 2y) - \frac{d^2y}{dt^2}$

$\frac{d^4y}{dt^4} = 6x - 4y - \frac{d^2y}{dt^2} \quad (4)$

(2) → (4): $\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3 \cdot \underbrace{\left(\frac{d^2y}{dt^2} + y\right)}_{2x}$

$\frac{d^4y}{dt^4} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$

$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \iff (\lambda^2 - 1)^2 = 0$

$\lambda^2_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$

$\lambda_{1,2} = +1 \quad \wedge \quad \lambda_{3,4} = -1$

$$\boxed{y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + (C_3 + C_4 t)e^{t}}$$

$$2x = \frac{d^2y}{dt^2} + y$$

$$2x = \frac{d}{dt}\left(C_2 e^{-t} - (C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_4 e^{t} + (C_3 + C_4 t)e^{t}\right)$$
$$+ (C_1 + C_2 t)e^{-t} + (C_3 + C_4 t)e^{t}$$

$$2x = -C_2 e^{-t} + C_4 e^{t} - C_2 e^{-t} + (C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_4 e^{t}$$
$$+ (C_3 + C_4 t)e^{t} + (C_1 + C_2 t)e^{-t} + (C_3 + C_4 t)e^{t}$$

$$2x = 2C_4 e^{t} + 2(C_1 + C_2 t)e^{-t} + 2(C_3 + C_4 t)e^{t} - 2C_2 e^{-t} \;/:2$$

$$x(t) = C_4 e^{t} + (C_1 + C_2 t)e^{-t} + (C_3 + C_4 t)e^{t} - C_2 e^{-t}$$

$$\boxed{x(t) = (C_1 + C_2 t - C_2)e^{-t} + (C_3 + C_4 t + C_4)e^{t}}$$

(4.) $$\frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}$$

5. $\frac{dx}{dt} = 3x + y + \frac{1}{t} - 4\ln t$ (1)

$\frac{dy}{dt} = -x + y + \frac{1}{t} \Big/ \frac{d}{dt}$ (2)

(2) $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{1}{t^2}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(3x + y + \frac{1}{t} - 4\ln t\right) + \frac{dy}{dt} - \frac{1}{t^2}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -3x - y + \frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + 4\ln t$ (3)

(2) → (3)

(2): $-x = \frac{dy}{dt} - y - \frac{1}{t}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\left(\frac{dy}{dt} - y - \frac{1}{t}\right) - y + \frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + 4\ln t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 4\frac{dy}{dt} - 4y - \frac{4}{t} - \frac{1}{t^2} + 4\ln t$

$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = -\frac{4}{t} - \frac{1}{t^2} + 4\ln t$

(H) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2$

$y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$

II НЕДЕЉА
11.04.2013.

ПРЕДАВАЊА

Метода диференцирања и елиминације и метода интегрирајућих комбинација

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t,x,y,z) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t,x,y,z) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \overline{f_1}(t,x,y,z) \quad 1)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(t,x,y,z) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

• Може се показати да је овај систем еквивалентан једној обичној диференцијалној једначини 3. реда (исто тако нормалан систем 1) еквивалентан је диференцијалној једначини n-тог реда).

① $\frac{d_3x}{dt^3} = \overline{\overline{f}}_1(t,x,y,z)$ 2) + 1) решимо по y и z и изразимо у трећу једначину и добијамо једначину трећег реда

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}\right) = 0$$

→ нађемо x, па онда и y и константе уз x остају исте за y и z само у другој комбинацији.

Пример:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + t \quad / \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y + t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2(2x + y + t) + 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4x + \underbrace{\left(\frac{dx}{dt} - x - t\right)}_{2y} + 2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + t + 1 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = t + 1$$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$r^2 - 2r - 3 = 0 \rightarrow \boxed{r_1 = 3 \quad r_2 = -1}$

$r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$x_h(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t}$

$x_p = at + b$

на десној страни полином 1. степена

$x_p' = a \qquad -2a - 3at - 3b = t + 1$

$x_p'' = 0 \qquad -3a = 1 \qquad -2a - 3b = 1 \Leftrightarrow +2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = 3b$

$a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{1}{9}$

$\boxed{x_p = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}}$

$\boxed{x(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}}$

$y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x - t\right) = \frac{1}{2}\left(-C_1 \cdot e^{-t} + 3C_2 e^{3t} - \frac{1}{3} - C_1 e^{-t}\right.$

$\left. - C_2 e^{3t} + \frac{t}{3} + \frac{1}{9} - t\right) = \left(-2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\boxed{y(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}}$

Пример: $\frac{dx}{dt} = -x + y$

$\frac{dy}{dt} = -y + 4z$

$\frac{dz}{dt} = x - 4z$

$\frac{d(x+y+z)}{dt} = 0$

$\boxed{x + y + z = C_1}$

+ трећа нам још једна веза

Метода интегрирајућих комбинација

Помоћу подесно изабраних рачунских операција образује се једноставнији систем обичних диференцијалних једначина помоћу кога одређујемо прве интеграле датог система и они представљају опште решење датог система. У примени ове методе најчешће се користи симетрична форма нормалног система:

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{dt}{1}$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{\lambda a + \mu b + \nu c}{\lambda A + \mu B + \nu C} \rightarrow \text{ОСОБИНА ПРОПОРЦИЈЕ}$$

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = d(x \cdot y \cdot z)$$

$$(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = d(xy + xz + yz)$$

→ НАЈЧЕШЋИ СЛУЧАЈЕВИ

Пример:

$$\frac{dx}{dt} = y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = z - x$$

$$\frac{dz}{dt} = x - y$$

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{d(x+y+z)}{0} = 0$$

$$\boxed{x + y + z = C_1}$$

$$z = C_1 - x - y$$

$$\frac{dx}{y - C_1 + x + y} = \frac{dy}{C_1 - x - y - x}$$

$$\underbrace{(C_1 - 2x - y)}_{P}\,dx - \underbrace{(C_1 - x - 2y)}_{Q}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \quad \text{и} \quad P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad du = P\,dx + Q\,dy$$

$$u = C \qquad u = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (C_1 - 2x - y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} (C_1 - x_0 - 2y)\,dy$$

$$= (C_1 x - x^2 - xy_0)\Big|_{x_0}^{x} + (C_1 y - x_0 y - y^2)\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= C_1(x+y) - x^2 - y^2 + \text{const}\,(x_0, y_0)$$

$$= (x+y+z)(x+y) - x^2 - y^2 + C$$

$$u = 2xy + xz + yz + C$$

$$\frac{dx}{dt} = x(y-z)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(z-x)$$

$$\frac{dz}{dt} = z\cdot(x-y)$$

$$\frac{dx}{xy-xz} = \frac{dy}{yz-yx} = \frac{dz}{zx-zy} = \frac{dx+dy+dz}{0} \rightarrow d(x+y+z) = 0$$

$$\boxed{x+y+z = C_1}$$

I НАЧИН: $z = C_1 - x - y$

$$\frac{dx}{x\cdot(2y+x-C_1)} = \frac{dy}{y(C_1-2x-y)}$$

$$xy(C_1 - x - y) = C_2$$

$$\boxed{xyz = C_2}$$

II НАЧИН: $\frac{dx}{xy-xz} = \frac{dy}{yz-yx} = \frac{dz}{zx-zy} =$

$$\frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{\cancel{xy^2z} - \cancel{xyz^2} + \cancel{xyz^2} - \cancel{x^2yz} + \cancel{x^2yz} - \cancel{xy^2z}} = \frac{d(xyz)}{0}$$

$$\rightarrow \boxed{xyz = C_2}$$

Пример:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2-y^2-z^2} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2-z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2-y^2-z^2 \\ \frac{dy}{dt} &= 2xy \\ \frac{dz}{dt} &= 2xz \end{aligned}$$

ЛИНЕАРНА БЕРНУЛИ ХОМОГЕНА мойу да чаш да дају

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \qquad \frac{z}{y} = C_1$$

I НАЧИН: $z = C_1 y$ $\quad \frac{dx}{x^2-y^2(1+C_1^2)} = \frac{dy}{2xy}$ (ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ)

II НАЧИН: $\frac{z}{y} = C_1$

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} =$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^3 - xy^2 - xz^2 + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2)}{x(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x^2+y^2+z^2} = C_2}$$

III НАЧИН: $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-dy^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\alpha(\frac{y}{x})^2}$

$\frac{y}{x} = u(x)$
$y = x \cdot u$
$y' = u + x \cdot u'$

$(\alpha = 1 + C_1^2)$

$$u + xu' = \frac{2u}{1-\alpha u^2}$$

$$xu' = \frac{2u - u + \alpha u^3}{1-\alpha u^2} \rightarrow \frac{(1-\alpha u^2)}{u+\alpha u^3} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\int \frac{1-\alpha u^2}{u(1+\alpha u^2)} = \ln C_2 x$$

$$\frac{1-\alpha u^2}{u(1+\alpha u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+\alpha u^2}$$

$\boxed{C_1 = \frac{z}{y}}$

$$1 - \alpha u^2 = A + A\alpha u^2 + Bu^2 + Cu$$

$-\alpha = A\alpha + B \quad \wedge \quad C = 0 \quad \wedge \quad A = 1$

$-\alpha = \alpha + B$

$B = -2\alpha$

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{-2\alpha u}{1+\alpha^2 u}\, du = \ln C_2 x$$

$$\ln u - \ln(1+\alpha u^2) = \ln C_2 x$$

$$\ln \frac{u}{1+\alpha u^2} = \ln C_2 x \iff \boxed{\frac{u}{(1+\alpha u^2)x} = C_2}$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{\left(1+\alpha \frac{y^2}{x^2}\right)x} = C_2 \qquad \boxed{\frac{y}{x^2+y^2+z^2} = C_2} \qquad \frac{y}{x^2+\alpha y^2} = C_2$$

$$\left\{ \frac{y}{x^2+\left(1+\frac{z^2}{y^2}\right)y^2} = C_2 \right\}$$

III НЕДЕЉА
12.04.2013.

ПРЕДАВАЊА

Линеарни системи обичних диференцијалних једначина

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\cdot x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)\cdot x_n + f_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)\cdot x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)\cdot x_n + f_2(t)\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)\cdot x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)\cdot x_n + f_n(t)
\end{aligned}\right\} 2)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t)$$

$i = \overline{1,n}$ $\quad t \in [\alpha, \beta]$

линеарни систем n-тог реда

$a_{ij}(t)$ су коефицијенти система

$f_i(t)$ су слободни чланови

- Овај систем је НЕХОМОГЕН
- Ако су сви $f_i(t) = 0$ онда је систем ХОМОГЕН

Теорема: Теорема о егзистенцији и јединствености система 2)

- На основу Коширове теореме имамо:
  Ако су коефицијенти $a_{ij}(t)$ и слободни чланови $f_i(t)$ система 2) непрекидне функције у интервалу $[\alpha, \beta]$ тада постоји само једно решење система 2) $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ које задовољава почетне услове:

$x_1(t_0) = x_{10}$
$x_2(t_0) = x_{20}$
⋮
$x_i(t_0) = x_{i0}$

при чему су x_{i0} и t_0 дати реални бројеви.

(*) Партикулярни интеграли хомогене система n-тог реда.

Детерминанта Вронског

$f_i = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad 3)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \frac{dX}{dt} = A \cdot X$$

Теорема: Ако су $X_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}$ $k = \overline{1,n}$ партикулярни интеграли система 3)

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$ тада

је и њихова линеарна комбинација

$\sum_{k=1}^{n} C_k X_k$ такође решење система 3)

Доказ: $\frac{d\left(\sum_{k=1}^{n} c_k x_k\right)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot A \cdot x_k = A \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$

$$\frac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \sum_{k=1}^{3} c_k x_k = \sum_{k=1}^{3} c_k \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ

- Ветимемо да су матрице X_k линеарно независне у $[\alpha, \beta]$ ако важи $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_3 = 0$

$$W(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \text{ за } \underline{n=3}$$

↓ ВРОНСКИЈАН

$$W = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

• Да би партикуларни интеграли X_k били линеарно независни у интервалу $[\alpha, \beta]$ потребно и довољно је да детерминанта Вронског $W(t) \neq 0$.

Фундаментални систем решења и опште решење система 3)

- За ма који низ од n линеарно независних партикуларних решења X_k каже се да образује фундаментални или основни систем решења. Њихова линеарна комбинација $X(t)$ је

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(t)$$ је ОПШТЕ РЕШЕЊЕ или ОПШТИ ИНТЕГРАЛ система 3).

Овим општим решењем обухваћени су сви партикуларни интеграли система 3) који задовољавају дате почетне услове.

*ПИТАЊЕ:

Опште решење хомогеног линеарног система n-тог реда обичних диференцијалних једначина

• Посматрамо нехомоген систем 2)

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \quad F = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$ и њему одговарајући

хомоген систем $\frac{dx}{dt} = Ax$.

Нека је матрица $X^*(t)$ једно решење нехомогеног система 2) тј. $\frac{dX^*}{dt} = AX^* + F$ и $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$ општи интеграл хомогеног система 3), тада је $X(t) = X_h(t) + X^*(t)$ опште решење нехомогеног система (2)

Доказ: $\frac{dx}{dt} = \frac{dx_h}{dt} + \frac{dX^*}{dt} = A \cdot x_h + A \cdot X^* + F$

$$= A(x_h + X^*) + F = AX + F$$

• Можемо рећи опште решење $X(t)$ нехомогеног система n-тог реда обичних диференцијалних једначина једнак је збиру општег решења $X_h(t)$ одговарајућег хомогеног система и партикуларног решења $X^*(t)$ нехомогеног система. Лако је показати као и у случају хомогеног система да опште решење нехомогеног система обухвата све његове партикуларне интеграле који задовољавају Кошијеве почетне услове.

Лагранжов метод за систем

• Нека је дат нехомоген систем $\frac{dx}{dt} = AX + F$ и одговарајући хомоген систем $\frac{dx}{dt} = AX$ са општим решењем $X_h(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$.

• Претпоставимо да су константне ф-је од t и одредићемо их тако да је функција

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) x_k(t)$$ задовољава једначину 2)

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_k'(t) x_k(t) + c_k(t) \frac{dx_k(t)}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_k'(t) x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \quad \left(A \cdot x_k(t) + F\right)$$

$$Ax + F = A \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \cdot x_k(t) + F$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \cdot x_k(t) = F} \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \cdot \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$$c_1'(t) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2'(t) \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \dots + c_n'(t) \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$c_1'(t) x_{11} + c_2'(t) x_{12} + \dots + c_n'(t) x_{1n} = f_1$$
$$c_1'(t) x_{21} + c_2'(t) x_{22} + \dots + c_n'(t) x_{2n} = f_2$$
$$\vdots$$
$$c_1'(t) x_{n1} + c_2'(t) x_{n2} + \dots + c_n'(t) x_{nn} = f_n$$

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + f_1$$
$$\frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + f_2$$
$$\frac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + f_3$$

$$c_1' x_1 + c_2' x_2 + c_3' x_3 = f_1$$
$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = f_2$$
$$c_1' z_1 + c_2' z_2 + c_3' z_3 = f_3$$

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$
$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$$

• Ово је нехомоген систем н алгебарских једначина по непознатима $C_k'(t)$ који има решење јер је детерминанта система Вронскијан $\neq 0$ јер су решења линеарно независна.

• Према Крамеровој теореми

$$C_k'(t) = \frac{D_k(t)}{W(t)} = \varphi_k(t)$$

Одатиле је $C_k(t) = \int \varphi_k(t) + D_k$ (const)

тј. $C_k(t) = \Phi_k(t) + D_k$ добијамо решење облика

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\Phi_k(t) + D_k\right) \cdot X_k(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} D_k X_k(t)}_{X_R(t)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Phi_k X_k(t)}_{X^*(t)}$$

ПРЕДАВАЊА

IV НЕДЕЉА
17.04.2013.

Линеарни системи са константним коефицијентима

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t) \qquad i = \overline{1,n} \qquad t \in [\alpha, \beta] \qquad a_{ij} = const$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + F$$

$n = 3$, $x_1 \to x$, $x_2 \to y$, $x_3 \to z$

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + f_1(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + f_2(t)$$
$$\frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + f_3(t)$$

- Метод интеграције хомогеног система

$$X = X_h + X_p$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = \overline{1,n})$$

тражимо решење у облику $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} e^{\lambda t}$,

показује се да се α_i $(i = \overline{1,n})$ и λ могу одредити:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} \iff \begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1 e^{\lambda t} \\ x_2(t) &= \alpha_2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \alpha_n e^{\lambda t} \end{aligned} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\underbrace{X = A\alpha \cdot e^{\lambda t}}_{\text{;}} \quad A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$X = A\alpha e^{\lambda t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A\alpha \cdot e^{\lambda t}$$

$$\frac{dx}{dt} = AX \iff \lambda A\alpha \cdot e^{\lambda t} = A \cdot A\alpha e^{\lambda t} \quad / : e^{\lambda t}$$

$$(A - \lambda I) \cdot A\alpha = 0$$

• Овај израз за случај $n = 3$:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \text{ ; } \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 &= 0 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33}-\lambda)\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{ХОМОГЕН} \\ \text{СИСТЕМ} \\ \text{ЈЕДНАЧИНА ПО} \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{array}$$

* Овај систем има увек нетривијално решење.

→ Систем има нетривијално решење ако је детерминанта система једнака 0 (Крамер).

$$\Delta(\lambda) = \det A = 0 \iff \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\lambda) = P_3(\lambda)$$

λ се зову СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ а вектори α_i су СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$$\lambda_1 \longrightarrow A \cdot \alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 \longrightarrow A\alpha^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 \longrightarrow A\alpha^{(3)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_2^{(3)} \\ \alpha_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(2)} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_2^{(3)} \\ \alpha_3^{(3)} \end{bmatrix} e^{\lambda_3 t}$$

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

$$x_1(t) = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{\lambda_3 t}$$

$$x_2(t) = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{\lambda_3 t}$$

$$x_3(t) = C_1 \alpha_3^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_3^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_3^{(3)} e^{\lambda_3 t}$$

2) $\mathbf{x}_s = p + iq \qquad x_s = A\alpha^{(s)} e^{(p+iq)} = u + iv$

3) за корене реда m у систем замењујемо

$$x_i = \left(A\alpha_0^{(i)} + A\alpha_1^{(i)} t + A\alpha_2^{(i)} t^2 + \dots + A\alpha_{m-1}^{(i)} t^{m-1}\right) e^{\lambda_i t}$$

(сопствене вредности λ) λ_i је нула реда m

$n = 3 \qquad m = 3 \qquad X = \left(A\alpha_0 + A\alpha_1 t + A\alpha_2 t^2\right) e^{\lambda t}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

СУ ЕТФ

• За нехомогени системи Лагранжов метод варијације константи!

пр:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - 2z$$

$$\frac{dy}{dt} = -x$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y - z$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) + 2 - 2\lambda - 1 - \lambda = (2-\lambda)\cdot(\lambda+\lambda^2) - 3\lambda + 1 =$$

$$2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - 3\lambda + 1 = -\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + 1 =$$

$$\lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda) = \boxed{(1-\lambda)(\lambda^2+1)}$$

$$\Delta(\lambda) = 0 \iff (1-\lambda)(1+\lambda^2) = 0$$

$$\iff \boxed{\lambda_1 = 1 \ \wedge \ \lambda_{2,3} = \pm i}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_s t}$$

$$\begin{aligned} (2-\lambda_s)\alpha_s + \beta_s - 2\gamma_s &= 0 \\ -\alpha_s - \lambda_s\beta_s &= 0 \\ \alpha_s + \beta_s - (1+\lambda_s)\gamma_s &= 0 \end{aligned}$$

$s = 1, 2, 3$ (ТРИ РЕШЕЊА $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)

1) $\underline{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_1 &= 0 \quad \leftarrow + \\ -\alpha_1 - \beta_1 &= 0 \quad \leftarrow \end{aligned}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_1 = 0$$

$$-2\gamma_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 = 0$$

$$\boxed{\alpha_1 = -\beta_1}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

$$X_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

$x_1(t) = e^t$, $y_1(t) = -e^t$, $z_1(t) = 0$ → ЕДНО РЕШЕНИЕ НА СИСТЕМА

2) $\lambda = i$

$$(2-i)\alpha_2 + \beta_2 - 2\gamma_2 = 0 \quad \leftarrow (+)$$
$$-\alpha_2 - i\beta_2 = 0 \quad \rightarrow \boxed{\alpha_2 = -i\beta_2}$$
$$\alpha_2 + \beta_2 - (1+i)\gamma_2 = 0 \quad \leftarrow (\cdot(-1))$$

$$\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 - i\gamma_2 = 0$$
$$-i\beta_2 + \beta_2 - \gamma_2 - i\gamma_2 = 0$$
$$\gamma_2(1+i) = (1-i)\beta_2$$
$$\gamma_2 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)\beta_2 = \frac{1-1-2i}{1+1}\beta_2 = \frac{-2i}{2}\beta_2$$

$$\boxed{\gamma_2 = -i\beta_2}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} -i\beta_2 \\ \beta_2 \\ -i\beta_2 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} -i\beta_2 \cos t + \beta_2 \sin t \\ \beta_2 \cos t + i\beta_2 \sin t \\ -i\beta_2 \cos t + \beta_2 \sin t \end{bmatrix}$$

$e^{it} \rightarrow \cos t + i \sin t$

$x_2 \rightarrow$ 2 вредности

$u + iv$

$$= -\beta_2 \begin{bmatrix} i\cos t - \sin t \\ -\cos t - i\sin t \\ i\cos t - \sin t \end{bmatrix} = -\beta_2 i \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} - \beta_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}}_{u}$$

v

$$X_2 = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$X = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$$
$$y(t) = -C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t$$
$$z(t) = -C_2 \sin t + C_3 \cos t$$

→ РЕШЕНИЕ СИСТЕМА

ДОМАШНО:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + z$$
$$\frac{dz}{dt} = -x + 2y + z$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - 1 + 2 - (\lambda + 2(2-\lambda) + 1 - \lambda) =$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - \lambda^2) + 1 - (4 - 2\lambda + 1) =$$

$$\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 1 - 5 + 2\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$
$$-4 \qquad -1 \quad 1 \quad +3 \quad -4 = 0$$

$$(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4) : (\lambda + 1) = -\lambda^2 + 4\lambda - 4$$
$$-(\ominus\lambda^3 - \ominus\lambda^2)$$
$$= 4\lambda^2 - 4$$
$$-(\ominus 4\lambda^2 \ominus 4\lambda)$$
$$= -4\lambda - 4$$
$$-4\lambda - 4$$
$$= =$$

$$\boxed{\lambda_1 = -1}$$

$$-\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$
$$\lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\boxed{\lambda_{2,3} = 2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_s t}$$

$$(2 - \lambda_s)\alpha_s + \beta_s + \gamma_s = 0$$
$$\alpha_s - \lambda_s \beta_s + \gamma_s = 0$$
$$-\alpha_s + 2\beta_s + (1 - \lambda_s)\gamma_s = 0$$

СУ ВЕТФ

$\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 0 \quad \cdot(-1) \\ -\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 &= 0 \end{aligned} \quad + \quad \Rightarrow 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \beta_1 + \gamma_1 = 0$$

$$\boxed{\gamma_1 = -\beta_1}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ -\beta_1 \end{bmatrix} e^{-t} = \beta_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\beta_2 + \gamma_2 = 0 \longrightarrow \boxed{\beta_2 = -\gamma_2}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 - 2\beta_2 + \gamma_2 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\beta_2 - \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 - 2(-\gamma_2) + \gamma_2 = \alpha_2 + 3\gamma_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_2 = -3\gamma_2}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} -3\gamma_2 \\ -\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} e^{2t} = \gamma_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

II НЕДЕЉА
19.04.2013.

ВЕЖБЕ

1. $\frac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t \quad / \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} + \cos t$

$\frac{dy}{dt} = 2x - y + 2\cos t$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 3(2x - y + 2\cos t) + \cos t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 6x + 3y - 6\cos t + \cos t$

$3y = -\frac{dx}{dt} + 4x + \sin t$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 6x - \frac{dx}{dt} + 4x + \sin t - 5\cos t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 2x - 5\cos t + \sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = (\sin t - 5\cos t)e^{0t}$

(H) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ → 2: $\lambda_1 = 2$; 1: $\lambda_2 = 1$

$x_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$

$x_p(t) = A\cos t + B\sin t$ → *ова сад замењимо у главну једначину!*

$(-A\cos t - B\sin t) - 3\cdot(-A\sin t + B\cos t) + 2A\cos t + 2B\sin t =$

$\sin t - 5\cos t$

$-A\cos t - B\sin t + 3A\sin t - 3B\cos t + 2A\cos t + 2B\sin t =$

$\sin t - 5\cos t$

$(A-3B)\cos t + (B+3A)\sin t = \sin t - 5\cos t$

$\Rightarrow \begin{cases} A-3B=-5 \\ B+3A=1 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot 3 \end{matrix}$

$A + 9A - 3B + 3B = -5 + 3 = -2$

$10A = -2 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{2}{10}} = -\frac{1}{5}$ $\quad \boxed{A = -\frac{1}{5}}$

$B + 3A = 1 \Rightarrow B = 1 - 3A = 1 - 3\left(-\frac{2}{10}\right) = 1 + \frac{6}{10}$

$\boxed{B = \frac{8}{5}}$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{8}{5}\sin t}$$

$3y = -\left(C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t} + \frac{1}{5}\sin t + \frac{8}{5}\cos t\right)$

$+ 4C_1 e^{t} + 4C_2 e^{2t} - \frac{4}{5}\cos t + \frac{32}{5}\sin t + \sin t$

$3y = 3C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t} + \frac{36}{5}\sin t - \frac{12}{5}\cos t$

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{t} + \frac{2}{3}C_2 e^{2t} + \frac{12}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t}$$

ДОМАЋА:

$$\frac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t \quad / \frac{d}{dt}$$

са два партикуларна решења

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t$$

---

2. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = +e^t \quad / \frac{d}{dt} \rightarrow y = e^t - 5x - \frac{dx}{dt}$

$\frac{dy}{dt} + 3y - x = e^{2t} \rightarrow \frac{dy}{dt} = e^{2t} - 3y + x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + x - 3y + e^{2t} = e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + x - 3\cdot\left(e^t - 5x - \frac{dx}{dt}\right) + e^{2t} = e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + x - 3e^t + 15x + 3\frac{dx}{dt} + e^{2t} = e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 4e^t - e^{2t}$$

(H) $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$

$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \frac{-8}{2} = \begin{cases} -4 & e^{-4t} \\ -4 & te^{-4t} \end{cases}$

$$x_h(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$$

* ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ: имамо 2 функције па морамо 2 партикуларна решења

$x_{p_1}(t)$: $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 9e^t$

$x_{p_1}(t) = Ae^t$

$Ae^t + 8Ae^t + 16Ae^t = 9e^t \;/ : e^t$

$A + 8A + 16A = 9$

$A \cdot 25 = 9 \Rightarrow \boxed{A = \frac{9}{25}}$

$x_{p_2}(t)$: $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = -e^{2t}$

$x_{p_2}(t) = B \cdot e^{2t}$

$4Be^{2t} + 16Be^{2t} + 16Be^{2t} = -e^{2t} \;/ : e^{2t}$

$B \cdot 36 = -1 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{36}}$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{9}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^t - 5\cdot\left((C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{9}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t}\right) - \left(-4(C_1 + C_2 t)e^{-4t} + C_2 e^{-4t} + \frac{9}{25}e^t - \frac{1}{18}e^{2t}\right)$$

$$y(t) = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t}$$

ДОМАШНЯ:

$\frac{dx}{dt} = x + y + te^t$

$\frac{dy}{dt} = 3y - 2x + \sin t$

II.1

$$\frac{dx}{dt} = x - y + 9\cos 2t \;/\; \frac{d}{dt} \rightarrow y = -\frac{dx}{dt} + x + 9\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 8\sin 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3x + 2y - 8\cos 2t - 5\sin 2t - 8\sin 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3x + 2\cdot\left(-\frac{dx}{dt} + x + 9\cdot\cos 2t\right) - 8\cos 2t - 13\sin 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - x + 8\cos 2t - 8\cos 2t - 13\sin 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = -13\sin 2t$$

(H) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_h(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

$x_p(t)$: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = -13\sin 2t$

$$x_p(t) = A\cdot\cos 2t + B\cdot\sin 2t$$

$$(-4A\cdot\cos 2t - 4B\sin 2t) + (-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + A\cdot\cos 2t + B\cdot\sin 2t = -13\cdot\sin 2t$$

$$(\cos 2t)\cdot(-3A + 2B) + (\sin 2t)(-3B - 2A) = -13\sin 2t$$

$$\begin{cases} -3A + 2B = 0 \\ -3B - 2A = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3A + 2B = 0 \rightarrow 3A = 2B \\ -2A - 3B = -13 \end{cases} \quad A = \frac{2}{3}B$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{9}{3}B - \frac{9}{3}B = -13 \quad / \cdot(-3)$$

$$4B + 9B = 39$$

$$13B = 39 \Rightarrow \boxed{B = 3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}B = \frac{2}{3}\cdot 3$$

$$\boxed{A = 2}$$

$$\boxed{x_p(t) = 2\cos 2t + 3\sin 2t}$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + 2\cos 2t + 3\sin 2t}$$

$$y = -\frac{dx}{dt} + x + 4\cos 2t$$

$$y(t) = -\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right)$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + 2\cos 2t + 3\sin 2t$$

$$+ 4\cos 2t$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\left(\frac{3}{2}C_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(\frac{3}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_1\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$$

$$+ 6\cos 2t + 3\sin 2t$$

Д2.

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t\cdot e^t \quad / \frac{d}{dt} \rightarrow y = \frac{dx}{dt} - x - t\cdot e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y - 2x + \sin t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + e^t + te^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 3y - 2x + \sin t + e^t + t\cdot e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 3\left(\frac{dx}{dt} - x - t\cdot e^t\right) - 2x + \sin t + e^t + t\cdot e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 5x - 2te^t + e^t + \sin t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = -2te^t + e^t + \sin t$$

(H) $\quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$x_h(t) = e^{2t}\cdot(C_1\cos t + C_2 \sin t)$$

$$x_{p_1}(t): \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = -2\cdot te^t$$

$$x_{p_1}(t) = (A + Bt)\cdot e^{\alpha t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Be^{\alpha t} + \alpha(A+Bt)e^{\alpha t}\right) - 4\left(Be^{\alpha t} + \alpha(A+Bt)e^{\alpha t}\right) + 5(A+Bt)\cdot e^{\alpha t} = -2te^t$$

$$\alpha Be^{\alpha t} + \alpha Be^{\alpha t} + \alpha^2(A+Bt)e^{\alpha t} - 4Be^{\alpha t} - 4\alpha(A+Bt)e^{\alpha t} + 5(A+Bt)\cdot e^{\alpha t} = -2te^t$$

$$e^{\alpha t}\left(B(2\alpha - 4) + (A+Bt)(\alpha^2 - 4\alpha + 5)\right) = -2A\cdot e^t$$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$B(2\alpha - 4) + (A + Bt)(\alpha^2 - 4\alpha + 5) = -2t$

$-2B + 2A + 2Bt = -2t$

$(2A - 2B) + 2Bt = 0 - 2t$

$\Rightarrow 2A - 2B = 0 \Rightarrow 2A = 2B \rightarrow \boxed{A = B}$

$2B = -2 \rightarrow B = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \boxed{B = -1 = A}$

$\boxed{x_{p_1}(t) = (-1 - t)e^t}$

$x_{p_2}(t): \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = e^t$

$x_{p_2}(t) = Ae^{\alpha t}$

$\alpha^2 A e^{\alpha t} - 4\alpha A e^{\alpha t} + 5A e^{\alpha t} = e^t$

$e^{\alpha t} \cdot (\alpha^2 A - 4\alpha + 5A) = e^t \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$\alpha^2 A - 4\alpha + 5A = 1$

$1^2 \cdot A - 4 \cdot 1 + 5A = 1$

$A + 5A = 1 + 4 = 5$

$6A = 5 \rightarrow \boxed{A = \frac{5}{6}}$

$\boxed{x_{p_2}(t) = \frac{5}{6}e^t}$

$x_{p_3}(t): \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t$

$x_{p_3}(t) = A\cos t + B\sin t$

$(-A\cos t - B\sin t) - 4(-A\sin t + B\cos t) + 5(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t) =$
$\sin t$

$(\cos t)(4A - 4B) + (\sin t)(4B + 4A) = \sin t$

$4A - 4B = 0 \;/:4 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = 0 \Rightarrow A = B$

$4B + 4A = 1 \qquad\qquad 4A + 4B = 1$

$8A = 1$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{8}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{8}}$

$$x_{p_3}(t) = \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t$$

$$x(t) = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + (-1-t)e^t + \frac{5}{6}e^t + \frac{1}{8}(\cos t + \sin t$$

$$x(t) = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t} + \left(-\frac{1}{6} - t\right)\cdot e^t + \frac{1}{8}(\cos t + \sin t)$$

$$y = \frac{dx}{dt} - x - t\cdot e^t$$

$$y(t) = 2(C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t} + (-C_1\sin t + C_2\cos t)e^{2t}$$
$$+\left(-\frac{1}{6} - t\right)e^t - e^t + \frac{1}{8}(-\sin t + \cos t)$$
$$-(C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t} + \left(\frac{1}{6} + t\right)e^t - \frac{1}{8}(\cos t + \sin t)$$
$$- t\cdot e^t$$

$$y(t) = e^{2t}((C_1+C_2)\cos t + (C_2-C_1)\sin t) +$$
$$e^t\cdot\left(-\tfrac{1}{6} - t - 1 + \tfrac{1}{6} + t - t\right) + \frac{1}{8}(-\sin t + \cos t - \cos t - \sin t$$
$$-2\sin t$$

$$y(t) = e^{2t}((C_1+C_2)\cos t + (C_2-C_1)\sin t)$$
$$-(1+t)e^t - \frac{1}{4}\sin t$$

СИМЕТРИЧНИ СИСТЕМИ

* јављају се код парцијалних једначина, свакој парцијалној једначини одговара један симетрични систем
• Да би ово знали потребне су пропорције!

1. Решити системе диференцијалних једначина у симетричном облику:

1) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}} = dt$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xz \\ \frac{dy}{dt} = yz \\ \frac{dz}{dt} = xy\sqrt{z^2+1} \end{cases}$$

– решавамо наложењем првих интеграла:

$$\frac{dx}{x\cancel{z}} = \frac{dy}{y\cancel{z}} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{d}{y} \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

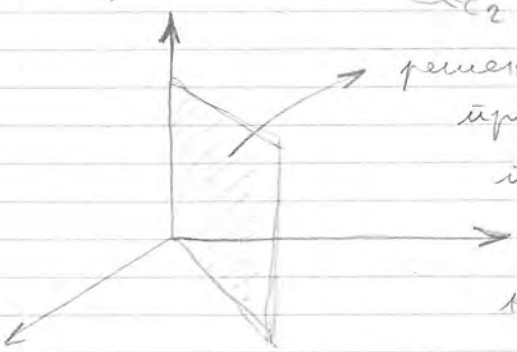
$$\ln|x| = \ln|y| + \overline{C_1} = \ln|y| + \ln e^{\overline{C_1}}$$

$$\cancel{\ln}|x| = \cancel{\ln} e^{\overline{C_1}}|y|$$

$$|x| = e^{\overline{C_1}}|y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = e^{\overline{C_1}} \qquad \boxed{\frac{x}{y} = \underbrace{\pm e^{\overline{C_1}}}_{C_1}} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = C_1}$$

$$x = C_1 \cdot y \longrightarrow y = \underbrace{\frac{1}{C_1}}_{C_2} x \Rightarrow y = C_2 x$$



решење система припада овој равни, код тражимо површи и њихов пресек је крива, тј. крива је решење система.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$$

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{y\sqrt{z^2+1}}$$

$$y\,dx = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\,dz \quad , \; y = C_2 x$$

$$C_2 x\,dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+1}} \;/\; \int$$

$$\int C_2 x\,dx = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{z^2+1} \;/^2 \\ t^2 = z^2+1 \\ 2t\,dt = 2z\,dz \\ t\,dt = z\,dz \end{cases}$$

$$C_2 \frac{x^2}{2} = \int \frac{t\,dt}{t} = \int dt$$

$$C_2 \frac{x^2}{2} = t + \bar{C}_1$$

$$\boxed{C_2 \frac{x^2}{2} = \sqrt{z^2+1} + \bar{C}_1}$$

$$C_2 x^2 = 2\sqrt{z^2+1} + \underbrace{2\bar{C}_1}_{C_3} \quad , \; C_2 = \frac{y}{x}$$

$$\frac{yx^2}{x} = 2\sqrt{z^2+1} + C_3$$

$$\boxed{xy - 2\sqrt{z^2+1} = C_3} \rightarrow \text{ПОВРШ ДРУГОГ РЕДА}$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = C_2 \; , \; xy - 2\sqrt{z^2+1} = C_3}$$

РЕШЕЊЕ ЈЕ ПРЕСЕК ОВА ДВА!

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y} \iff \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y} \iff \frac{dx}{z-y} = \frac{dz}{y-x}$

} симетрични систем — сада користимо особине пропорције

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = dt$$

ПРОПОРЦИЈА

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3} = k$$

$a_1 = b_1 k$

$$\frac{1\cdot dx + 1\cdot dy + 1\cdot dz}{\underbrace{(z-y)+(x-z)+(y-x)}_{0}} = \frac{dx}{z-y} \Rightarrow dx + dy + dz = 0$$

$$d(x+y+z) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x+y+z = C_1}$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\underbrace{x(z-y)+y(x-z)+z(y-x)}_{0}} = \frac{dx}{z-y}$$

$$\Rightarrow x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \;/\cdot 2$$

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0$$

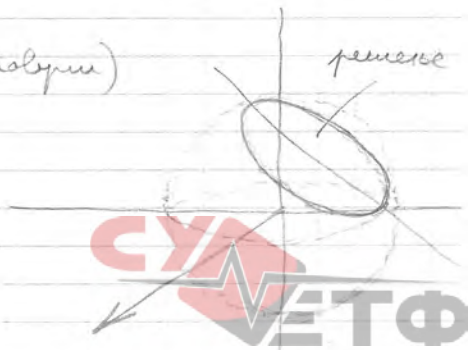
$$d(x^2+y^2+z^2) = 0$$

$$\underline{x^2+y^2+z^2 = C_2}$$

* решење система се налази у пресеку површи:

$x+y+z = C_1 \rightarrow$ раван

$x^2+y^2+z^2 = C_2 \rightarrow$ сфера (затворена површ)



3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2-z^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{2xy} = \frac{dx}{x^2-y^2-z^2}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2-y^2-z^2} \Leftrightarrow \frac{dz}{2xz} = \frac{dx}{x^2-y^2-z^2}$

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad / \int$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{z}$

$\ln|y| = \ln|z| + \bar{C}_1 = \ln|z| + \ln e^{\bar{C}_1}$

$\ln|y| = \ln e^{\bar{C}_1}|z|$

$\left|\frac{y}{z}\right| = e^{\bar{C}_1} \Rightarrow \frac{y}{z} = \pm e^{\bar{C}_1} = C_1 \Rightarrow \boxed{\frac{z}{y} = C_2}$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2-y^2-z^2) + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dy}{2xy}$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^3 - xy^2 - xz^2 + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dy}{2xy} \quad / \cdot 2$$

$$\frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^3 + xy^2 + xz^2} = \frac{dy}{xy}$$

$$\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dy}{xy}$$

$$\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} \quad / \int$$

$$\int \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = \int \frac{dy}{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = x^2+y^2+z^2 \\ du = d(x^2+y^2+z^2) \end{array} \right\}$$

$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y}$

$\ln|u| = \ln|y| + \bar{C}_3 = \ln|y| + \ln e^{\bar{C}_3}$

$\ln|u| = \ln e^{\bar{C}_3}|y| \Rightarrow \left|\frac{u}{y}\right| = e^{\bar{C}_3} \Rightarrow \frac{u}{y} = \pm e^{\bar{C}_3} = C_3$

$\Rightarrow \underline{u = C_3 y}$

$\underline{x^2+y^2+z^2 = u = C_3 y}$ → сфера која пролази кроз координатни почетак

$\underline{\frac{z}{y} = C_2}$ → раван * РЕШЕЊЕ система је пресек (не рачунамо пресек само кумулативно)

II НАЧИН: $\frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy}$, $\frac{z}{y} = C_2 \Rightarrow \underline{z = C_2 y}$

$$\frac{dx}{x^2-y^2-C_2^2y^2} = \frac{dy}{2xy}$$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^2(1+C_2^2)}{2xy}$ → хомогена али нама је најлакше као Бернулијеву

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{2xy} - \frac{y^2(1+C_2^2)}{2xy} = \frac{x}{2y} - \frac{y(1+C_2^2)}{2x}$$

$\underline{\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x = -\frac{y(1+C_2^2)}{2}x^{-1} \;/\cdot x}$ БЕРНУЛИЈЕВА ДИФ. ЈЕДНАЧИНА, x ЗАВИСНО ПРОМЕНЉИВА А y НЕЗАВИСНО

$\left[\begin{array}{l} u = x^{1-(-1)} = x^2, \; u = u(y) \\ u' = 2x \cdot x' = 2x\frac{dx}{dy} \end{array}\right]$

$$x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x^2 = -\frac{y(1+C_2^2)}{2}$$

$$\frac{1}{2}u' - \frac{1}{2y}u = -\frac{y(1+C_2^2)}{2}$$

$\frac{1}{2}\frac{du}{dy} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\cdot u = -\frac{1+C_2^2}{2}y \;/\cdot 2$

$\underline{\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -(1+C_2^2)y}$ → ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

$$u(y) = e^{-\int\frac{dy}{y}}\left(C_4 + \int -(1+C_2^2)y e^{\int -\frac{dy}{y}}\,dy\right)$$

$$u(y) = e^{\ln y}\left(C_4 + \int -(1+C_2^2)y e^{-\ln y}\,dy\right)$$

$$u(y) = y \cdot \left(C_4 + \int -(1+C_2^2)\, y\, e^{\ln \frac{1}{y}}\, dy \right)$$

$$u(y) = y \cdot \left(C_4 + \int -(1+C_2^2)\, y \cdot \frac{1}{y}\, dy \right)$$

$$u(y) = y \cdot \left(C_4 - \int (1+C_2^2)\, dy \right) = y C_4 - y \left(\int dy + \int C_2^2\, dy \right)$$

$$u(y) = y C_4 - y \left(y + C_5 + C_2^2 y \right)$$

$$u(y) = y \left(C_4 - (1+C_2^2) y \right)$$

$$\frac{z}{y} = C_2$$

ВРАТИМО СМЕНУ:

$$x^2 = y \left(C_4 - (1+C_2^2) y \right)$$

$$x^2 = y C_4 - y^2 (1+C_2^2)$$

$$x^2 = y C_4 - y^2 \left(1 + \frac{z^2}{y^2} \right)$$

$$x^2 = y C_4 - (y^2 + z^2)$$

$$x^2 = y C_4 - y^2 - z^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = y C_4$$

$$C_4 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}$$

III НЕДЕЛА
25.04.2013.

ВЕЖБЕ

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2} \iff \frac{dy}{z} = \frac{dx}{(z-y)^2}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2} \iff \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z-y)^2}$

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Rightarrow y\,dy = z\,dz \;/\int$$

$$\int y\,dy = \int z\,dz \longrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \bar{C}_1 \;/\cdot 2$$

$$y^2 = z^2 + 2\bar{C}_1 = C_1$$

$$y^2 - z^2 = C_1$$

површи на кајај се наоѓа крива

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{1\cdot dy + (-1)\,dz}{1\cdot z + (-1)\,y}$$

$$\frac{dy - dz}{z-y} = \frac{dx}{(z-y)^2} \;/\cdot (z-y)$$

$$dy - dz = \frac{dx}{z-y} = -\frac{dx}{y-z} = \frac{-dx}{y-z} \;/\cdot (y-z)$$

$$(y-z)(dy-dz) = -dx$$

$$(y-z)\,d(y-z) = -dx \;/\int$$

$$\int (y-z)\,d(y-z) = -\int dx$$

$$\left[\begin{array}{l} u = y-z \\ du = d(y-z) \end{array}\right]$$

$$\int u\,du = -x + \bar{C}_2$$

$$\frac{u^2}{2} = -x + \bar{C}_2 \;/\cdot 2$$

$$u^2 = -2x + 2\bar{C}_2 = C_2$$

$$2x + u^2 = C_2$$

$$2x + (y-z)^2 = C_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 - z^2 = C_1 \\ 2x + (y-z)^2 = C_2 \end{array}\right\}$$

* систем има крива која припаѓа двете дадени површини

2. Одредити решење система диференцијалних једначина које пролази кроз тачку $(1,1,1)$

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2)} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2)} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \bar{C}_1$$

$$\ln(x) = \ln|y| + \ln e^{\bar{C}_1}$$

$$\ln|x| = \ln e^{\bar{C}_1}|y|$$

$$|x| = e^{\bar{C}_1}|y|$$

$$\frac{|x|}{|y|} = e^{\bar{C}_1} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

$$\frac{x}{y} = \pm e^{\bar{C}_1} = C_1$$

$$\frac{y}{x} = C_2$$

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2)} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{x(x^2+C_2^2x^2)} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{x^3+x^3C_2^2} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{x^3(1+C_2^2)} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{1+C_2^2} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{1}{1+C_2^2} \cdot x^{-3}\,dx = z^{-2}\,dz \quad / \int$$

$$\int \frac{1}{1+C_2^2} \cdot x^{-3}\,dx = \int z^{-2}\,dz$$

$$\frac{1}{1+C_2^2}\,\frac{1}{-2}\,x^{-2} = \frac{1}{-1}\,z^{-1} + \bar{C}_3 \quad /\cdot(-2)$$

$$\frac{1}{1+C_2^2}\,x^{-2} = \frac{2}{z} - 2\bar{C}_3 = + C_3$$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{z} + C_3$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{2}{z} + C_3 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2}{z} = C_3$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= C_2 \\ \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2}{z} &= C_3 \end{aligned}\right\} \text{ prolazi kroz tačku } (1,1,1) \longrightarrow \text{partikularno rešenje}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = 1}$$

$$\frac{1}{1^2+1^2} - \frac{2}{1} = C_3 \rightarrow C_3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{1} = \frac{1-4}{2} \Rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \longrightarrow \boxed{y = x} = t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2}{z} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{z} = -\frac{3}{2} \quad / \cdot 2$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{4}{z} = -3$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{z} - 3$$

$$\frac{4}{z} = \frac{1}{x^2} + 3$$

$$\frac{z}{4} = \frac{1}{\frac{1+3x^2}{x^2}} = \frac{x^2}{1+3x^2}$$

$$\boxed{z = \frac{4x^2}{1+3x^2}} = \frac{4t^2}{1+3t^2}$$

$$\left(t, t, \frac{4t^2}{1+3t^2}\right) = (x, y, z)$$

→ sada krivu da napišemo u parametarskom obliku:

$$\vec{r}(t) = a_1(t) \cdot \vec{i} + a_2(t) \cdot \vec{j} + a_3(t) \cdot \vec{k}$$

$$x(t) = a_1(t)$$
$$y(t) = a_2(t)$$
$$z(t) = a_3(t)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= x = t \\ z &= \frac{4t^2}{1+3t^2} \end{aligned}} \longrightarrow \text{REŠENJE SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA}$$

3. Решить систему:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y} \iff \frac{y\,dx}{x^2 - t} = dt$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \iff \frac{dy}{-x} = dt$$

$$\boxed{x = -\frac{dy}{dt}}$$

$$\frac{y\,dx}{x^2 - t} = \frac{dy}{-x} = dt$$

$$\frac{1 \cdot y\,dx + x \cdot dy}{x^2 - t - x^2} = dt \Rightarrow \frac{y\,dx + x\,dy}{-t} = dt$$

$$d(xy) = -t\,dt \;/\; \int$$

$$\int d(xy) = -\int t\,dt$$

$$xy = -\frac{t^2}{2} + C_1$$

$$x = \left(\frac{-t^2}{2} + C_1\right)\frac{1}{y}$$

$$-\frac{dy}{dt} = \left(\frac{-t^2}{2} + C_1\right)\frac{1}{y}$$

$$-y\,dy = \left(\frac{-t^2}{2} + C_1\right)dt$$

$$y\,dy = \left(\frac{t^2}{2} - C_1\right)dt \;/\; \int$$

$$\int y\,dy = \int \left(\frac{t^2}{2} - C_1\right)dt$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^3}{6} - C_1 t + \overline{C_2} \;/\cdot 2$$

$$y^2 = \frac{t^3}{3} - \underbrace{2C_1}_{C_3} t + \underbrace{2\overline{C_2}}_{C_2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{t^3}{3} - C_3 t + C_2}, \quad C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

$$x = \left(-\frac{t^2}{2} + C_1\right) \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{t^3}{3} - C_3 t + C_2}}$$

РЕШЕЊЕ СИСТЕМА:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{t^2}{2} - C_1}{\pm\sqrt{\frac{t^3}{3} - 2C_1 t + C_2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{t^3}{3} - 2C_1 t + C_2} \end{cases}$$

---

4. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)} = \dfrac{-dy}{y(z^2+x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$

$$\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{-y(z^2+x^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

$$\frac{x\,dx}{x^2(y^2-z^2)} = \frac{y\,dy}{-y^2(z^2+x^2)} = \frac{z\,dz}{z^2(x^2+y^2)}$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\underbrace{x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}_{0}} = \frac{dx}{x(y^2-z^2)}$$

да би имало смисла бројилац мора да буде 0

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,d(x^2+y^2+z^2) = 0 \quad /\cdot 2$$

$$d(x^2+y^2+z^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = C_1 \rightarrow \begin{cases} x^2+z^2 = C_1 - y^2 \\ x^2+y^2 = C_1 - z^2 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{-y(x^2+z^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

$$\frac{dy}{-y(C_1-y^2)} = \frac{dz}{z(C_1-z^2)} \quad / \int$$

$$-\int \frac{dy}{y(C_1-y^2)} = \int \frac{dz}{z(C_1-z^2)} \quad /\cdot 2$$

$$-\int \frac{2y\,dy}{y^2(C_1-y^2)} = \int \frac{2z\,dz}{z^2(C_1-z^2)}$$

$$\begin{cases} u = y^2 & v = z^2 \\ du = 2y\,dy & dv = 2z\,dz \end{cases}$$

$$-\int \frac{du}{u(C_1-u)} = \int \frac{dv}{v(C_1-v)}$$

$$-\int \frac{C_1-u+u}{u(C_1-u)}\,du = \int \frac{(C_1-v)+v}{v(C_1-v)}\,dv$$

$$-\left(\int \frac{C_1-u}{u(C_1-u)}\,du + \int \frac{u}{u(C_1-u)}\,du\right) = \int \frac{C_1-v}{v(C_1-v)}\,dv + \int \frac{v}{v(C_1-v)}\,dv$$

$$-\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{C_1-u} = \int \frac{dv}{v} + \int \frac{dv}{C_1-v}$$

$$-\ln|u| + \ln|C_1-u| = \ln|v| - \ln|C_1-v| + \overline{C}_2$$

$$\ln\left|\frac{C_1-u}{u}\right| = \ln\left|\frac{v}{C_1-v}\right| + \overline{C}_2 = \ln\left|\frac{v}{C_1-v}\right| + \ln e^{\overline{C}_2}$$

$$\ln\left|\frac{C_1-u}{u}\right| = \ln e^{\overline{C}_2}\left|\frac{v}{C_1-v}\right|$$

$$\left|\frac{u-C_1}{u}\right| = \left|\frac{v}{v-C_1}\right| e^{\overline{C}_2}$$

$$\frac{u-C_1}{u} = \frac{v}{v-C_1}\,C_2$$

$$\Rightarrow (u-C_1)(v-C_1) = C_2\,u\cdot v$$

$$(y^2-(x^2+y^2+z^2))(z^2-(x^2+y^2+z^2)) = uv\,C_2$$

$$(x^2+z^2)(x^2+y^2) = y^2z^2\cdot C_2$$

$$\frac{(x^2+z^2)(x^2+y^2)}{y^2z^2} = C_2$$

II НАЧИН: $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{-y(z^2+x^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$

$$\frac{z\,dy + y\,dz}{-yz(z^2+x^2) + yz(x^2+y^2)} = \frac{dx}{x(y^2-z^2)}$$

$$\frac{y\,dz + z\,dy}{yz(-z^2 \cancel{-x^2+x^2} + y^2)} = \frac{dx}{x(y^2-z^2)}$$

$$\frac{y\,dz + z\,dy}{yz(y^2-z^2)} = \frac{dx}{x(y^2-z^2)} \quad / \cdot (y^2-z^2)$$

$$\frac{d(yz)}{yz} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\int \frac{d(yz)}{yz} = \int \frac{dx}{x} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = yz \\ du = d(yz) \end{array} \right\}$$

$$\ln|yz| = \ln|x| + \overline{C_3} = \ln|x| + \ln e^{\overline{C_3}}$$

$$\ln|yz| = \ln e^{\overline{C_3}}|x|$$

$$\left|\frac{yz}{x}\right| = e^{\overline{C_3}} \longrightarrow \frac{yz}{x} = \pm e^{\overline{C_3}} = C_3$$

$$\boxed{\frac{yz}{x} = C_3}$$

РЕШЕНИЕ:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = C_1 \\ \frac{yz}{x} = C_2 \end{array} \right\}$$

5. $\frac{dx}{y(x+y)} = \frac{-dy}{x(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2(x+y)+z)}$

$\frac{x\,dx + y\,dy}{xy(x+y) - xy(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2(x+y)+z)}$

$\to$ мора и бројилац биће 0 да би имала смисла

$\Rightarrow x\,dx + y\,dy = 0$

$\frac{1}{2}\,d(x^2+y^2) = 0 \quad / \cdot 2$

$d(x^2+y^2) = 0 \quad \to \quad x^2+y^2 = C_1$

$\frac{(-1)\,dx + (-1)\,dy}{-y(x+y)+x(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2(x+y)+z)}$

$\frac{-(dx+dy)}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2(x+y)+z)}$

$\frac{-d(x+y)}{(x+y)} = \frac{dz}{2(x+y)+z}$

$\begin{cases} u = x+y \\ du = d(x+y) \end{cases}$

$-\frac{du}{u} = \frac{dz}{2u+z} \quad / \int$

$\frac{dz}{du} = \frac{-2u-z}{u} = \frac{-2u}{u} - \frac{z}{u}$

$\frac{dz}{du} + \frac{1}{u}\cdot z = -2$ ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦ. ЈЕДНАЧИНА

$z = e^{-\int \frac{du}{u}} \left(C_2 + \int -2 e^{\int \frac{du}{u}} du \right) = e^{-\ln u} \left(C_2 - 2\int e^{\ln u}\, du \right)$

$z = \frac{1}{u}\left(C_2 - 2\cdot \int u\, du \right) = \frac{1}{u}\left(C_2 - 2\cdot \frac{u^2}{2} \right)$

$z = \frac{C_2}{u} - \frac{1}{u}\cdot u^2 = \frac{C_2}{u} - u$

$$z + u = \frac{C_2}{u}$$

$$\Rightarrow (z+u)u = C_2 \xrightarrow[\text{СМЕНУ}]{\text{ВРАТИМО}} (z + x + y)(x+y) = C_2$$

$$\boxed{(x+y)(x+y+z) = C_2}$$

---

6. $\quad \frac{dy}{dx} = y^2 z$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - yz^2$$

HINT: y не гледамо као параметар већ морамо да га напишемо у симетричној форми па да се мирамо!

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{xy^2 z}{x} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{z - xyz^2}{x} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy^2 z} = \frac{dz}{z - xyz^2}}$$

$$\frac{z\,dy + y\,dz}{xy^2z^2 + yz - xy^2z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{d(yz)}{yz} = \frac{dx}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= yz \\ du &= d(yz) \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = \ln|x| + \bar{C}_1 = \ln|x| + \ln e^{\bar{C}_1}$$

$$\ln|u| = e^{\bar{C}_1}|x|$$

$$|u| = e^{\bar{C}_1}|x|$$

$$\left|\frac{u}{x}\right| = e^{\bar{C}_1}$$

$$\frac{u}{x} = \pm e^{\bar{C}_1} = C_1$$

$$\frac{u}{x} = C_1 \xrightarrow[\text{СМЕНУ}]{\text{ВРАТИМО}} \boxed{\frac{yz}{x} = C_1}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy^2z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\frac{x^2y^2z}{x}}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{(x^2y)\underbrace{\left(\frac{yz}{x}\right)}_{C_1}} = \frac{dy}{x^2yC_1}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x^2yC_1}$$

$$x\,dx = \frac{dy}{C_1 y} \quad / \int$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{C_1}\int \frac{dy}{y}$$

$$C_1\frac{x^2}{2} = \ln|y| + \bar{C}_2 = \ln|y| + \ln e^{\bar{C}_2} = \ln e^{\bar{C}_2}|y|$$

$$-\frac{C_1x^2}{2} = -\ln e^{\bar{C}_2}\cdot|y|$$

$$e^{-\frac{C_1x^2}{2}} = \frac{1}{e^{\bar{C}_2}y} \Rightarrow y\cdot e^{-\frac{C_1x^2}{2}} = \frac{1}{e^{\bar{C}_2}} = C_2$$

$$y\cdot e^{-\frac{yz}{x}\cdot\frac{x^2}{2}} = C_2 \Rightarrow \boxed{y\cdot e^{-\frac{xyz}{2}} = C_2}$$

7. Решити следеће системе: (увек треба да пишемо како је у задатку тражено да решимо)

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$\|a_{ij}\|_{m\times n}$ $\quad [a_{ij}]_{m\times n}$

$$A(t) = [a_{ij}(t)]_{m\times n}$$

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{d}{dt}[a_{ij}(t)]_{m\times n} = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]_{m\times n}$$

Пример: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2t^2 & \ln t \\ t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\sin t \end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = AX, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = A\alpha e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad A\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\alpha e^{\lambda t}) = A\alpha \cdot \lambda e^{\lambda t} = (\lambda A\alpha)e^{\lambda t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda A(t) + \mu B(t)\right) = \lambda \frac{dA(t)}{dt} + \mu \frac{dB(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(A(t) \cdot B(t)\right) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$$ } водити рачуна јер множење матрица није комутативно

$$(\lambda A\alpha)e^{\lambda t} = A \cdot x$$

$$(\lambda A\alpha)e^{\lambda t} = A \cdot A\alpha e^{\lambda t}$$

$$(\lambda A\alpha - AA\alpha)e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda I - A)A\alpha \cdot e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t}$$

$$(\lambda I - A)A\alpha = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$(A - \lambda I)A\alpha = 0$$ → сопствени вектор матрице

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \lambda\alpha_3 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \det(A - \lambda I) = 0$$

↑

да би имали реална решења

СУНЕТФ

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-1) \end{matrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -1$$

$$(1-\lambda_i)\alpha_{1i} - \alpha_{2i} + \alpha_{3i} = 0$$

$$\alpha_{1i} + (1-\lambda_i)\alpha_{2i} - \alpha_{3i} = 0$$

$$2\alpha_{1i} - \alpha_{2i} - \lambda_i\alpha_{3i} = 0$$

$i = 1 \qquad \lambda_1 = 1$

$$-\alpha_{21} + \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_{21} = \alpha_{31}}$$

$$\alpha_{11} - \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_{11} = \alpha_{31}}$$

$$\left\{ \boxed{\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = c_1} \right.$$

$$\underline{2\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31} = 0} \Rightarrow 2\alpha_{31} - \alpha_{31} - \alpha_{31} = 0 \checkmark$$

$$A\alpha_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{собственный вектор}$$

$$\underbrace{x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_{12} - \alpha_{22} + \alpha_{32} &= 0 \\ \alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} &= 0 \end{aligned}\right\} +$$

$$2\alpha_{12} - \alpha_{22} - 2\alpha_{32} = 0$$

$$-2\alpha_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_{22} = 0}$$

$$\alpha_{11} - \alpha_{32} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_{11} = \alpha_{32} = C_2}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \\ C_2 \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}}$$

$\lambda_3 = -1$

$$\left.\begin{aligned} +2\alpha_{13} - \alpha_{23} + \alpha_{33} &= 0 \\ \alpha_{13} + 2\alpha_{23} - \alpha_{33} &= 0 \end{aligned}\right\} +$$

$$2\alpha_{13} - \alpha_{23} + \alpha_{33} = 0$$

$$3\alpha_{13} + \alpha_{23} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_{23} = -3\alpha_{13}}, \quad \boxed{\alpha_{13} = C_3},$$

$$\alpha_{13} - 6\alpha_{13} - \alpha_{33} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_{33} = -5\alpha_{13}}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 \\ -3C_3 \\ -5C_3 \end{bmatrix} = C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$X_3(t) = \begin{bmatrix} +1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)$$

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t}$$

МАТРИЧНЫЙ ОБЛИК РЕШЕНИЯ

СУАиВЕТФ

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ x_2(t) &= C_1 e^{t} - 3C_3 e^{-t} \\ x_3(t) &= C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

СКАЛАРНИ ОБЛИК РЕШЕЊА

IV НЕДЕЉА
26.04.2013.

ВЕЖБЕ

1. $\frac{dx}{dt} = A \cdot X$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -6 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ (-1) \\ \cdot(+1) \\ \leftarrow + \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-2)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda+1) \cdot (3-\lambda-2) = -(\lambda-2)(\lambda+1)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

II НАЧИН:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -6 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ (+1) \\ + \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = +\lambda(2-\lambda)(\lambda+1) + 2(\lambda-2)(-1-\lambda) - ((-1-\lambda)\cdot(\lambda-2)\cdot 3) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2+\lambda+2+2\lambda) + 3(\lambda-2)(\lambda+1)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2+\cancel{3\lambda}+2-\cancel{3\lambda}-3) = (2-\lambda)(\lambda^2-1) = \cancel{(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)}$$

$$-\lambda_i \alpha_{1i} + 3\alpha_{2i} + 2\alpha_{3i} = 0$$
$$-2\alpha_{1i} + (5-\lambda_i)\alpha_{2i} + 2\alpha_{3i} = 0$$
$$2\alpha_{1i} - 6\alpha_{2i} - (3+\lambda_i)\alpha_{3i} = 0$$

$i=1 \quad \lambda_1 = 2$

$$-2\alpha_{11} + 3\alpha_{21} + 2\alpha_{31} = 0$$
$$-2\alpha_{11} + 3\alpha_{21} + 2\alpha_{31} = 0 \quad +$$
$$2\alpha_{11} - 6\alpha_{21} - 5\alpha_{31} = 0$$

$$-3\alpha_{21} - 3\alpha_{31} = 0 \;/:3 \Rightarrow \underline{\alpha_{21} = -\alpha_{31}}$$

$\alpha_{11} = c_1$

$$2\alpha_{11} + 6\alpha_{31} - 5\alpha_{31} = 0$$
$$2\alpha_{11} + \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_{31} = -2\alpha_{11}}, \quad \underline{\alpha_{21} = 2\alpha_{11}}$$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ -2c_1 \end{bmatrix} e^{2t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$i=2 \quad \lambda_2 = -1$

$$\alpha_{12} + 3\alpha_{22} + 2\alpha_{32} = 0 \quad \cdot(-1)$$
$$-2\alpha_{12} + 6\alpha_{22} + 2\alpha_{32} = 0 \quad +$$
$$2\alpha_{12} - 6\alpha_{22} - 2\alpha_{32} = 0$$

$$-3\alpha_{12} + 3\alpha_{22} = 0 \;/:3 \Rightarrow \underline{\alpha_{12} = \alpha_{22}}$$

$\alpha_{22} = c_2$

$$\alpha_{22} + 3\alpha_{22} + 2\alpha_{32} = 0$$
$$4\alpha_{22} + 2\alpha_{32} = 0 \;/:2 \Rightarrow \underline{\alpha_{32} = -2\alpha_{22}}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ -2c_2 \end{bmatrix} e^{-t} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

СУНЕТФ

$\lambda_3 = 1 \quad i = 3$

$$-\alpha_{13} + 3\alpha_{23} + 2\alpha_{33} = 0 \quad \big| \cdot (-1)$$
$$-2\alpha_{13} + 4\alpha_{23} + 2\alpha_{33} = 0 \quad \big| +$$
$$2\alpha_{13} - 6\alpha_{23} - 4\alpha_{33} = 0$$

$-2\alpha_{23} - 2\alpha_{33} = 0 \;/:(-2) \Rightarrow \alpha_{23} = -\alpha_{33}, \Rightarrow \alpha_{33} = -\alpha_{23}$

$-\alpha_{13} + \alpha_{23} = 0 \Rightarrow \alpha_{13} = \alpha_{23},$

$\alpha_{23} = C_3$

$$x_3(t) = \begin{bmatrix} C_3 \\ C_3 \\ -C_3 \end{bmatrix} e^t = C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t) \rightarrow$ ОБЩЕ РЕШЕНИЕ

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

КОМПЛЕКСНЕ НУЛЕ

(2.) $\frac{dx}{dt} = A \cdot X$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$+ \quad (-1)$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(+1)}{\underset{+}{\rightleftarrows}} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$+ \quad (-1)$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 4\right) = 0 \iff 1-\lambda = 0 \;\wedge\; (1-\lambda)^2 = -4$$

$$1-\lambda = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm 2i$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$

$\lambda_2 = 1 + 2i \;\wedge\; \lambda_3 = 1 - 2i$

II НАЧИН:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - \left(-3(1-\lambda) - (1-\lambda)\right) =$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)^2 - \left((1-\lambda)(-3-1)\right) =$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)^2 + (+4)(1-\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 4\right) = 0$$

СУНЕТФ

$$(1-\lambda_i)\alpha_{1i} - \alpha_{2i} - \alpha_{3i} = 0$$
$$\alpha_{1i} + (1-\lambda_i)\alpha_{2i} = 0$$
$$3\alpha_{1i} + (1-\lambda_i)\alpha_{3i} = 0$$

$i=1 \quad \lambda_1 = 1$

$$-\alpha_{21} - \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -\alpha_{31}$$
$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0 \\ 3\alpha_{11} &= 0 \end{aligned}\right\} \alpha_{11} = 0, \qquad \alpha_{31} = C_1$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} e^t = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \qquad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t}$$

$i=2 \quad \lambda_2 = 1+2i$

$$-2i\alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} = 0$$
$$\alpha_{12} - 2i\alpha_{22} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = 2i\alpha_{22}, \qquad \alpha_{22} = C_2$$
$$3\alpha_{12} - 2i\alpha_{32} = 0 \Rightarrow 3\alpha_{12} = 2i\alpha_{32}$$
$$3 \cdot 2i\alpha_{22} = 2i\alpha_{32}$$
$$\Rightarrow \alpha_{32} = 3C_2, \quad \alpha_{12} = 2iC_2$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2iC_2 \\ C_2 \\ 3C_2 \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_2(t) = A_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^t \cdot e^{2it} =$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t)$$

$$\tilde{x}_2(t) = e^t \begin{vmatrix} 2i\cos 2t - 2\cdot\sin 2t \\ \cos 2t + i\cdot\sin 2t \\ 3\cos 2t + 3i\cdot\sin 2t \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{vmatrix} e^t}_{x_2(t)} + i \underbrace{\begin{vmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{vmatrix} e^t}_{x_3(t)}$$

(реални део, једна партикуларна решења) (имагинарни део, друга партикуларна решења)

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{bmatrix} e^t$$

$$x_3(t) = \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{bmatrix} e^t$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)$$

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{bmatrix} e^t$$

скаларни облик:

$$x_1(t) = (-2c_2\sin 2t + 2c_3\cos 2t)e^t$$

$$x_2(t) = (-c_1 + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t)e^t$$

$$x_3(t) = (c_1 + 3c_2\cos 2t + 3c_3\sin 2t)e^t$$

3. $\frac{dx}{dt} = AX$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{(+1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 5-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) - \big((2-\lambda)(\lambda-5) + (2-\lambda)\big) =$$

$$(2-\lambda)^2(3-\lambda) - (2-\lambda)(\lambda-5+1) =$$

$$(2-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - \lambda + 4\big) = (2-\lambda)(6 - 5\lambda + \lambda^2 - \lambda + 4)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0 \iff 2-\lambda = 0 \ \wedge \ \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{6 \pm i2}{2} = 3 \pm i$$

$$\lambda_2 = 3 + i \ \wedge \ \lambda_3 = 3 - i$$

$$\begin{aligned} (2-\lambda_s)\alpha_{1s} + \alpha_{2s} &= 0 \\ \alpha_{1s} + (3-\lambda_s)\alpha_{2s} - \alpha_{3s} &= 0 \\ -\alpha_{1s} + 2\alpha_{2s} + (3-\lambda_s)\alpha_{3s} &= 0 \end{aligned} \qquad s = 1, 2, 3$$

$\lambda_1 = 2 \quad s = 1$

$\alpha_{21} = 0$,

$\alpha_{11} + \alpha_{21} - \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} - \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = \alpha_{31}$

$-\alpha_{11} + 2\alpha_{21} + \alpha_{31} = 0$

$\alpha_{11} = C_1$,

$-\alpha_{11} + \alpha_{31} = 0$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$s = 2, \quad \lambda_2 = 3 + i$

$$(-1-i)\alpha_{12} + \alpha_{22} = 0 \Rightarrow \alpha_{22} = (1+i)\alpha_{12}$$

$$\alpha_{12} - i\alpha_{22} - \alpha_{32} = 0$$

$$-\alpha_{12} + 2\alpha_{22} - i\alpha_{32} = 0$$

$$\alpha_{12} - i(1+i)\alpha_{12} - \alpha_{32} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{32} = \alpha_{12}(1 - i + 1) = (2-i)\alpha_{12}$$

$$\alpha_{32} = (2-i)\alpha_{12}, \qquad \alpha_{12} = c_2$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ (1+i)c_2 \\ (2-i)c_2 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_2(t) = A_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix} e^{(3+i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix} e^{3t} \cdot e^{it}$$

$$= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ (\cos t - \sin t) + i(\cos t + \sin t) \\ (2\cos t + \sin t) + i(2\sin t - \cos t) \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} e^{3t}}_{x_2(t)} + i \underbrace{\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix} e^{3t}}_{x_3(t)}$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$x_3(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)$$

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix} e$$

$$x_1(t) = C_1 \cdot e^{2t} + (C_2 \cos t + C_3 \sin t) e^{3t}$$

$$x_2(t) = (C_2(\cos t - \sin t) + C_3(\sin t + \cos t)) e^{3t}$$

$$x_3(t) = C_1 e^{2t} + (C_2(2\cos t + \sin t) + C_3(2\sin t - \cos t)) e^{3t}$$

$$\frac{dx}{dt} = AX \quad , \quad A = [a_{ij}]_{n\times n} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

λ_i корен реда m $\quad (2 \le m \le n)$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

1) ако је ранг матрице $(A - \lambda_i I) = n - m$

→ партикуларно решење тражимо у облику:

$$\boxed{X = A\alpha^{(i)} \cdot e^{\lambda_i (t)}}$$

2) ако је ранг $(A - \lambda_i I) > n - m$

→ партикуларно решење тражимо у облику:

$$X = \left(A\alpha^{(1)} + A\alpha^{(2)} t + \dots + A\alpha^{(m)} t^{m-1} \right) e^{\lambda_i t}$$

$$A\alpha^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

---

4. $\frac{dx}{dt} = AX \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$+ \quad (+1)$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 3-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} = 0$$

СУНЕТФ

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(+1) +

(+1) +

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = (3-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3$

$$(4-\lambda_s)\alpha_{1s} - \alpha_{2s} - \alpha_{3s} = 0$$
$$\alpha_{1s} + (2-\lambda_s)\alpha_{2s} - \alpha_{3s} = 0$$
$$\alpha_{1s} - \alpha_{2s} + (2-\lambda_s)\alpha_{3s} = 0$$

$s=1 \quad \lambda_1 = 2$

$$2\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31} = 0$$
$$\alpha_{11} + 0 - \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = \alpha_{31},$$
$$\alpha_{11} - \alpha_{21} + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = \alpha_{21},$$

$\boxed{\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = C_1}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

• морамо да одредимо ранг матрице :

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_{2,3} = 3 \qquad m = 2 \qquad n = 3$

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{rang}\begin{vmatrix} 4-\lambda_2 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda_2 \end{vmatrix} = \operatorname{rang}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (+1) \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{1 = 3-2}$$

$= n - m$

$$\Rightarrow \quad X = A\alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix} e^{3t}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} = 0$$
$$\alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} = 0$$
$$\alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} = 0$$

$$\alpha_{32} = \alpha_{12} - \alpha_{22}$$

$\alpha_{12} = c_1$

$\alpha_{22} = c_2$

$\Rightarrow \alpha_{32} = c_1 - c_2$

$$A\alpha^{(2)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}_2(t) = \left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \qquad X_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)$$

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

---

5. $\frac{dx}{dt} = AX$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

* елементарне трансформације :

- мењање места 2 врсте, колоне
- множење врсте или колоне бројем $\neq 0$ и додавање другој врсти и колони

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

(+1) +

(+1) +

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1-\lambda \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

+ (-3)

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad + \quad (-1) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(-(1+\lambda)(1-\lambda)+(1-(1-\lambda))\right) =$$

$$(1-\lambda)\cdot\left((1+\lambda)(\lambda-1)+(1-\lambda)\right) = (1-\lambda)\left(1-\lambda\right)\left(-1-\lambda+1\right) =$$

$$-\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 0 \wedge 1-\lambda = 0$$
$$\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_{2,3} = 1$$

$s = 1, 2, 3$

$$(2-\lambda_s)\alpha_{1s} - \alpha_{2s} - \alpha_{3s} = 0$$
$$3\alpha_{1s} - (\lambda_s+2)\alpha_{2s} - 3\alpha_{3s} = 0$$
$$-\alpha_{1s} + \alpha_{2s} + (2-\lambda_s)\alpha_{3s} = 0$$

$s = 1 \rightarrow \lambda_1 = 0$

$$2\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31} = 0 \quad \cdot(+1)$$
$$3\alpha_{11} - 2\alpha_{21} - 3\alpha_{31} = 0$$
$$-\alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31} = 0 \quad \cdot(+)$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = -\alpha_{31} \Rightarrow \alpha_{31} = -\alpha_{11}$$
$$2\alpha_{11} - \alpha_{21} + \alpha_{11} = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = +3\alpha_{11}$$

$\alpha_{11} = c_1$

$\alpha_{21} = 3c_1$

$\alpha_{31} = -c_1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 3c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} c_1$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{0\cdot t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$s = 2 \rightarrow \lambda_2 = 1$ $\quad n = 2, \quad n = 3$

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{rang}\begin{vmatrix} 2-\lambda_2 & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda_2 & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$\operatorname{rang}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (+1) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$= \boxed{3 - 2} \quad \checkmark$$

$$X = A_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix} e^{1 \cdot t} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix} e^{t}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} &= 0 \\ 3\alpha_{12} - 3\alpha_{22} - 3\alpha_{32} &= 0 \\ -\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\alpha_{12} = \alpha_{22} + \alpha_{32}}$$

$\underline{\alpha_{22} = c_2}$, $\wedge$ $\underline{\alpha_{32} = c_3}$,

$\underline{\alpha_{12} = c_2 + c_3}$,

$$X = \begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} e^{t} = \underbrace{c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t}}_{x_2(t)} + \underbrace{c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}}_{x_3(t)}$$

$$x = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{t} \rightarrow x_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} \; ; \; x_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)$$

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$$

$$x_1(t) = c_1 + (c_2 + c_3) e^{t}$$

$$x_2(t) = 3c_1 + c_2 e^{t} \qquad x_3(t) = -c_1 + c_3 e^{t}$$

V и VI НЕДЕЉА
09. 05. 2013.

ПРЕДАВАЊА

Парцијалне једначине формирање и типови решења

$u(x,y)$

$u(x,y,z)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = xy + 1$ – први пример, функција од 2 независне променљиве $u = u(x,y)$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (xy+1)dx + \varphi(y)$$

интеграциона константа је функција у зависности од y

$u(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + x + \varphi(y)$ → општи у простору → општи решење и у њему су садржана сва решења, а ако жели да задовољи неке почетне услове лако се добија $\varphi(y)$ и то су Коширјева решења.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4$ → интегралимо по x

$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x + \varphi(y)$

$u(x,y) = 4xy + \int \varphi(y)dy + \Psi(x)$

$u(x,y) = 4xy + \varphi_1(y) + \Psi(x)$

Дефиниција: Нека је $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функција од n променљивих која је непрекидна и има парцијалне изводе до реда m које је мање или једнако n. Тада се израз

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)$$ се

назива парцијална диференцијална једначина m-тог реда.

(*) Специјално:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

→ парцијална диференцијална једначина првог реда

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

→ парцијална диференцијална једначина првог реда са две независне променљиве

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

→ парцијална диференцијална једначина првог реда са три независне променљиве

пр: $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$

пр: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} + 2xyzu = 0$

• За линеарне једначине ово је образац, за нелинеарне (нама у струци их има доста) нема развијена дефиниција већ покушава некако да се нађе решење, или тражимо смене које нелинеарне једначине претвара у линеарне.

СУ ЕТФ

Дефиниција: Било која функција $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се пресликава у $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ која заједно са својим парцијалним изводима задовољава једначину $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ назива се решењем ње диференцијалне једначине.

Пример: $u(x,y) = x^2 \cdot \sin\frac{y}{x}$: $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$

↑ једно решење једначине, а можемо наћи и опште решење

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin\frac{y}{x} + x^2\left(\frac{-y}{x^2}\right)\cdot\cos\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} = x\cos\frac{y}{x};$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\right) + y\left(x\cos\frac{y}{x}\right) =$$

$$= 2x^2\cdot\sin\frac{y}{x} = 2u$$

$$u(x,y) = x^2\cdot\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u_x = 2x\Phi - x^2\frac{y}{x^2}\cdot\Phi'\left(\frac{y}{x}\right) = 2x\Phi - y\Phi$$

$$u_y = x\Phi'$$

$$xu_x + yu_y = 2x^2\Phi = 2u$$

→ ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha u \quad ; \quad u = x^{\alpha} \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha \cdot u$$

$$u(x,y,z) = x^{\alpha} \cdot H\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = \alpha \cdot u$$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha} \cdot H\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

Формирање парцијалних једначина

$$u = f(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot f' \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cdot f'$$

можемо да елиминишемо f'

$$\frac{1}{2x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad / \cdot 2$$

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \longrightarrow$$ ова једначина има ово опште решење

$$u(x,y) = F(x, y, f(g(x,y)))$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \quad / \cdot \frac{dg}{dy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{df}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \quad / \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$* \; u(x,y) = C_1 x + C_2 y + f(C_1, C_2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C_1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = C_2$$

$$u = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

– Клерова диференцијална једначина – уместо првих извода стављамо константе.

$$\boxed{\begin{aligned} y &= xy' + f(y') \\ y &= Cx + f(C) \end{aligned}}$$

⊙ Врсташа решења парцијалних једначина

Дефиниција: Оно решење парцијалне једначине $F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ које садржи две произвољне константе чијом се елиминацијом добија искључиво дата једначина назива се ПОТПУНО РЕШЕЊЕ или ПОТПУНИ ИНТЕГРАЛ.

Дефиниција 2: Решење диференцијалне једначине 2. реда које садржи једну произвољну функцију чијом се елиминацијом добија дата једначина назива се ОПШТИ ИНТЕГРАЛ (РЕШЕЊЕ) једначине.

Ово се односи и на функцију

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

Линеарна хомогена парцијална једначина првог реда

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (1)$$

где су $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i = \overline{1,n}$ дате непрекидне функције, а функција $u(x_1, \dots, x_n)$ је непозната функција.

$$X_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + X_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \; ; \; u(x,y)$$

$$X_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + X_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + X_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \; ; \; u(x,y,z)$$

Заједно са једначином (1) посматрамо систем

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} \qquad (2)$$

• Нека је $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ једно решење система (2)

Показаћемо да је тада $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ решење једначине (1). (Ако нађемо решење система решили смо парцијалну једначину)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \longrightarrow dF = 0 \iff$$

$$\iff \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n = 0$$

методом из система (2) имамо да је:

$$dx_1 = \lambda X_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$dx_2 = \lambda X_2(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$dx_n = \lambda \cdot X_n(x_1, \dots, x_n)$$

на заменом у последњи диференцијал добијамо:

$$\lambda \cdot \left(X_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = 0$$

$\lambda \neq 0$ $\quad X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ тј.

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ је решење дате парцијалне једначине (1)

$u = G(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow G = \text{const}$ (показатељ да мора бити једнака константи, а G је решење система)

$$X_1\frac{\partial G}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial G}{\partial x_2} + \dots + X_n\frac{\partial G}{\partial x_n} = 0$$

$X_1 \to \frac{dx_1}{\lambda}$, $X_2 \to \frac{dx_2}{\lambda}$, $X_n \to \frac{dx_n}{\lambda}$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial G}{\partial x_n}dx_n = 0$$

$$\Rightarrow dG = 0 \Rightarrow \boxed{G = \text{const}}$$

Теорема: Интеграција, решавање једначине (1) и решавање система (2) су еквивалентни проблеми.

Систем (2) назива се систем карактеристика за једначину (1).

Пример: $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (парцијална једначина – треба наћи једно решење или у општем случају опште решење)

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2}$$

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C$$

$$\underbrace{-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C}_{} \rightarrow F$$

$\longrightarrow$ једно решење (велико Φ из система)

$\underbrace{u = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}_{}$ је једно решење дате једначине (треба решити систем карактеристика)

* систем карактеристика је:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\underbrace{\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1}}_{} = \frac{dz}{1}$$

$$-dx = dy \quad / \int$$

$$-\int dx = \int dy$$

$$-x = y + \overline{C_1}$$

$$-x - y = \overline{C_1}$$

$$x + y = -\overline{C_1}$$

$$\boxed{x + y = C_1}$$

$$dy = -dz \quad / \int$$

$$\int dy = -\int dz$$

$$y = -z - \overline{C_2}$$

$$y + z = -\overline{C_2}$$

$$\boxed{y + z = C_2}$$

$$\begin{cases} u_1 = x + y \\ u_2 = y + z \end{cases}$$

СУ ЕТФ

Теорема: Нека су $u_1 = F_1(x_1, \dots, x_n)$ решења

$$u_2 = F_2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$u_k = F_k(x_1, \dots, x_n)$$

парцијалне једначине (1) и нека је $(t_1, t_2, \dots, t_k) \longrightarrow \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ произвољна диференцијабилна функција. Тада је

$$u = \Phi(F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, \dots, x_n))$$

такође решење једначине (1)

Доказ: Како су $F_i(x_1, \dots, x_n)$ решења следи

$$x_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial F_i}{\partial x_n} = 0 \quad / \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial F_i}$$

$(i = \overline{1,k})$, помножимо горе са $\frac{\partial \Phi}{\partial F_i}$ и добијемо:

$$x_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} + \dots + x_n \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} = 0$$

$$x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0$$

тј. $u = \Phi$ је решење једначине (1)

• Специјално ако имамо $n-1$ функција важи:

Теорема: Нека су $F_1, \dots, F_{n-1}$ различита решења једначине (1) и Φ произвољна функција тада решење $u = \Phi(F_1, \dots, F_{n-1})$ садржи сва решења једначине (1), тј. овим смо записали опште решење једначине (1).

• **Закључак – Последица:**

За би се одредило опште решење једначине (1) довољно је наћи опште решење система (2) у облику:

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = C_1$$
$$F_2(x_1, \dots, x_n) = C_2$$
$$\vdots$$
$$F_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}$$

тј. довољно је наћи првих $n-1$ интеграла система (2)

$\longrightarrow$ Тада је опште решење система (1) дато са

$$u(x_1, \dots, x_n) = \Phi\left(F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\right)$$

Пример: 1) $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2}$$

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C$$

$$u = \Phi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

↓ опште решење дате једначине

2) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ (потребна су нам 2 прва интеграла за решење)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-1}$$

1° $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \;/\int$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$

$\ln|x| = \ln|y| + \bar{C}_1 = \ln|y| + \ln e^{\bar{C}_1}$

$\ln|x| = \ln e^{\bar{C}_1}|y|$

$|x| = e^{\bar{C}_1}|y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = e^{\bar{C}_1}$

$\frac{x}{y} = \pm e^{\bar{C}_1} = C_1$ → $\boxed{\frac{x}{y} = C_1}$

2° $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{-1} \;/\int$

$\int \frac{dx}{x} = -\int dz$

$\ln|x| = -z + C_2$

$\boxed{\ln x + z = C_2}$

$u(x,y,z) = \Phi(C_1, C_2)$

$\boxed{u(x,y,z) = \Phi\left(\frac{x}{y}, \ln x + z\right)}$

• опште решење парцијалне једначине, ако су нам дате криве онда можемо да нађемо специјалне Φ – ове а то су Коширова решења.

3) $(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy} = \frac{1}{2y}x + \frac{y}{2}\cdot\frac{1}{x}$

$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x = \frac{y}{2}\cdot x^{-1} \;/\cdot x$

$x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x^2 = \frac{y}{2}$

$t = x^2 \Rightarrow t' = 2x\cdot\frac{dx}{dy}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}t' - \frac{1}{2y}t = \frac{y}{2} \;/\cdot 2$

$t' - \frac{1}{y}t = y$

$t = e^{+\int -\frac{1}{y}dy}\left(C_1 + \int \frac{y}{2}\cdot e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy\right)$

$t = e^{\ln y}\left(C_1 + \frac{1}{2}\int y\cdot e^{2\ln\frac{1}{y}}dy\right)$

$t = y\cdot\left(C_1 + \frac{1}{2}\int y\cdot\frac{1}{y}dy\right)$

$t = y\cdot\left(C_1 + \frac{y}{2}\right)$

$x^2 = C_1 y + \frac{1}{2}y^2$

V НЕДЕЉА
10.05.2013.

ВЕЖБЕ

1. Решити систем:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$(+2)$ $+$

$$(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$+$ (-2)

$$-(1-\lambda)(\lambda+1)\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$+$ (-1) (-1) $+$

$$-(1-\lambda)(\lambda+1)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(\lambda+1)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{-}(1-\lambda)(\lambda+1)(\cancel{-}(1+\lambda)\cancel{-0}) = (1-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\lambda = 0 \quad \wedge \quad (\lambda+1)^2 = 0$$

$$\underbrace{\lambda = 1 \quad \wedge \quad \lambda = -1}$$

$$\underbrace{\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1}$$

$s = 1, 2, 3$

$$(-1-\lambda_s)\alpha_{1s} + \alpha_{2s} - 2\alpha_{3s} = 0$$
$$4\cdot\alpha_{1s} + (1-\lambda_s)\alpha_{2s} = 0$$
$$2\cdot\alpha_{1s} + \alpha_{2s} - (\lambda_s+1)\alpha_{3s} = 0$$

$s=1 \quad \lambda_1 = 1$

$$-2\alpha_{11} + \alpha_{21} - 2\alpha_{31} = 0$$
$$4\cdot\alpha_{11} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_{11} = 0}$$
$$2\cdot\alpha_{11} + \alpha_{21} - 2\alpha_{31} = 0$$

$$\alpha_{21} - 2\alpha_{31} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_{21} = 2\alpha_{31}}$$

$\alpha_{31} = c_1$
$\alpha_{21} = 2c_1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{t}$$

$\lambda_{2,3} = -1$:

$\beta = 2 \qquad \gamma = 3$

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{+(-2)}{=} \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 > \gamma - \beta = 1$$

субматрица која је регуларна

ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ: (у овом облику)

$$x(t) = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} t \right) \cdot e^{-t}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a + mt \\ b + nt \\ c + pt \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = A \cdot x}$$

* матрицу диференцирано када диференцирано сваки елемент те матрице

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} a + mt \\ b + nt \\ c + pt \end{bmatrix} \cdot (-e^{-t}) = \begin{bmatrix} m - a - mt \\ n - b - nt \\ p - c - pt \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\begin{bmatrix} m - a - mt \\ n - b - nt \\ p - c - pt \end{bmatrix} \cancel{e^{-t}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a + mt \\ b + nt \\ c + pt \end{bmatrix} \cancel{e^{-t}}$$

$$\begin{bmatrix} m - a - mt \\ n - b - nt \\ p - c - pt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - mt + b + nt - 2(c + pt) \\ 4(a + mt) + b + nt \\ 2(a + mt) + b + nt - c - pt \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -a + b - 2c + (-m + n - 2p) \cdot t \\ 4a + b + (4m + n) \cdot t \\ 2a + b - c + (2m + n - p) \cdot t \end{bmatrix}$$

$$m - a - mt = -a + b - 2c + (-m + n - 2p) \cdot t$$

$$n - b - nt = 4a + b + (4m + n) \cdot t$$

$$p - c - pt = 2a + b - c + (2m + n - p) \cdot t$$

$$m - \cancel{a} = -\cancel{a} + b - 2c \qquad -\cancel{m} = -\cancel{m} + n - 2p$$

$$n - b = 4a + b \qquad \wedge \qquad -n = 4m + n$$

$$p - \cancel{c} = 2a + b - \cancel{c} \qquad -\cancel{p} = 2m + n - \cancel{p}$$

* **HINT**: лакше је писати преко непознатих и решавати, ако убацимо коефицијенте – нећемо се испетљати никако!

$$n - 2p = 0 \longrightarrow n = 2p$$

$$4m + 2n = 0 \;/:2$$

$$2m + n = 0 \longrightarrow \cancel{2}m + \cancel{2}p = 0 \;/:2$$

$$m + p = 0 \iff m = -p$$

$p \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} b - 2c = m \\ 4a + 2b = n \\ 2a + b = p \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b - 2c = -p \\ 4a + 2b = 2p \\ 2a + b = p \longrightarrow b = p - 2a \end{array}$$

$$\Rightarrow p - 2a - 2c = -p$$

$$2p = 2a + 2c$$

$$2c = -2a + 2p \;/:2$$

$$c = -a + p \;;\; a \in \mathbb{R}$$

мењамо у

$$x(t) = \begin{bmatrix} a + mt \\ b + nt \\ c + pt \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} a + (-p)\cdot t \\ -2a + p + 2p\cdot t \\ -a + p + p\cdot t \end{bmatrix} \cdot e^{-t} = \begin{bmatrix} a \\ -2a \\ -a \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -p\cdot t \\ p + 2pt \\ p + pt \end{bmatrix} \cdot e^{-t} =$$

СУ ЕТФ

$$m - \cancel{a} = -\cancel{a} + b - 2c \qquad -\cancel{m} = -\cancel{m} + n - 2p$$
$$n - b = 4a + b \quad \wedge \quad -n = 4m + n$$
$$p - \cancel{c} = 2a + b - \cancel{c} \qquad -\cancel{p} = 2m + n - \cancel{p}$$

* **HINT**: лакше је писати преко непознатих и решавати, ако убацимо коефицијенте – нећемо се испетљати никако!

$$n - 2p = 0 \longrightarrow n = 2p$$
$$4m + 2n = 0 \;/:2$$
$$2m + n = 0 \longrightarrow \cancel{2}m + \cancel{2}p = 0 \;/:2$$
$$m + p = 0 \iff m = -p$$

$p \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} b - 2c = m \\ 4a + 2b = n \\ 2a + b = p \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b - 2c = -p \\ 4a + 2b = 2p \\ 2a + b = p \longrightarrow b = p - 2a \end{array}$$

$$\Rightarrow p - 2a - 2c = -p$$
$$2p = 2a + 2c$$
$$2c = -2a + 2p \;/:2$$
$$c = -a + p \;;\; a \in \mathbb{R}$$

мењамо у

$$x(t) = \begin{bmatrix} a + mt \\ b + nt \\ c + pt \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} a + (-p)\cdot t \\ -2a + p + 2p\cdot t \\ -a + p + p\cdot t \end{bmatrix} \cdot e^{-t} = \begin{bmatrix} a \\ -2a \\ -a \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -p\cdot t \\ p + 2pt \\ p + pt \end{bmatrix} \cdot e^{-t} =$$

СУЛ ЕТФ

$$x(t) = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}}_{x_2(t)} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} -t \\ 1+2t \\ 1+t \end{bmatrix} e^{-t}}_{x_3(t)}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x_3(t) = \begin{bmatrix} -t \\ 1+2t \\ 1+t \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)$$

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{bmatrix} -t \\ 1+2t \\ 1+t \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$$

$$x_1(t) = C_2 e^{-t} - C_3 t e^{-t}$$

$$x_2(t) = 2C_1 e^{t} - 2C_2 e^{-t} + (C_3 + 2C_3 t) e^{-t}$$

$$x_3(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + (C_3 + C_3 t) e^{-t}$$

2. $\frac{dX}{dt} = AX$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$(+1)$ $+$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$+$ $(+1)$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$+$ (-1)

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda-0) =$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \iff 2-\lambda = 0 \wedge \underbrace{(1-\lambda)^2 = 0}_{1-\lambda = 0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 2 \wedge \lambda_{2,3} = 1}$$

$s = 1, 2, 3$

$$(1-\lambda_s)\alpha_{1s} - \alpha_{2s} + \alpha_{3s} = 0$$

$$1\,\alpha_{1s} + (1-\lambda_s)\alpha_{2s} - \alpha_{3s} = 0$$

$$-\alpha_{2s} + (2-\lambda_s)\alpha_{3s} = 0$$

$s=1 \quad \lambda_1 = 2$

$$-\alpha_{11} - \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0$$
$$\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31} = 0$$
$$-\alpha_{21} = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = 0$$

$$-\alpha_{11} + \alpha_{31} = 0 \Rightarrow \alpha_{31} = \alpha_{11}$$

$$\alpha_{11} = C_1$$
$$\alpha_{31} = C_1$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$\lambda_{2,3} = 1 \qquad m = 2 \qquad n = 3$

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (+1) \\ = \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(+1) +

$$= \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 > n - m = 1$$

ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕНИЕ ОБЛИКА:

$$x(t) = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \cdot t \right) \cdot e^t = \begin{bmatrix} a + pt \\ b + qt \\ -c + rt \end{bmatrix} e^t$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} a + pt \\ b + qt \\ -c + rt \end{bmatrix} \cdot e^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + pt \\ b + qt \\ c + rt \end{bmatrix} e^t \; / : e^t$$

$$\begin{bmatrix} a+p+pt \\ b+q+qt \\ c+r+rt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+pt-b-qt+c+rt \\ a+pt+b+qt-c-rt \\ -b-qt+2c+2rt \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a-b+c+(p-q+r)t \\ a+b-c+(p+q-r)t \\ -b+2c+(-q+2r)t \end{bmatrix}$$

$a+p = a-b+c$ $\quad p = p-q+r \rightarrow r-q=0 \Rightarrow \boxed{r=q}$

$b+q = a+b-c$ $\quad \wedge \quad q = p+q-r \rightarrow p-r=0 \Rightarrow \boxed{p=r}$

$q+r = -b+2c$ $\quad p = -q+2r \rightarrow r-q=0 \Rightarrow \boxed{r=q}$

$$\boxed{p=q=r}$$

$$\left.\begin{array}{l} c-b=p \\ a-c=q \\ c-b=r \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c-b=r \\ a-c=r \\ c-b=r \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} a=c+r \\ b=c-r \end{array}}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} a+pt \\ b+qt \\ c+rt \end{bmatrix} \cdot e^t = \begin{bmatrix} c+r+rt \\ c-r+rt \\ c+rt \end{bmatrix} e^t =$$

$$= \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} r+rt \\ -r+rt \\ rt \end{bmatrix} e^t = c \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t}_{x_2(t)} + r \underbrace{\begin{bmatrix} 1+t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix} e^t}_{x_3(t)}$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

$$x_3(t) = \begin{bmatrix} 1+t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix} e^t$$

$$x(t) = C_1 \cdot x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)$$

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C_3 \begin{bmatrix} 1+t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix} e^{t}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 + C_3 t) e^{t} \\ x_2(t) = (C_2 - C_3 + C_3 t) e^{t} \\ x_3(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t) e^{t} \end{cases}$$

3. Израчунати:

$\frac{dA^{-1}}{dt}$, $\frac{d^2A^{-1}}{dt^2}$ $\quad t \to A(t) = [a_{ij}(t)]_{m\times n}$ је регуларна матрица

$$A(t)\cdot A^{-1}(t) = I \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)\cdot A^{-1}(t)\right) = \emptyset \quad \text{(нула матрица)}$$

$$\frac{dA}{dt} = \left[\frac{d\,a_{ij}(t)}{dt}\right]_{m\times n} \to \text{како се диференцира матрица}$$

• Множење матрица није комутативно!

$$\frac{dA}{dt}A^{-1} + A\cdot\frac{dA^{-1}}{dt} = 0 \quad / \cdot A^{-1} \to \text{лево множење}$$

$$A\frac{dA^{-1}}{dt} = -\frac{dA}{dt}A^{-1} \quad / \cdot A^{-1}$$

$$\boxed{\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\cdot\frac{dA}{dt}A^{-1}}$$

$$\frac{d^2A^{-1}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dA^{-1}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-A^{-1}\frac{dA}{dt}\cdot A^{-1}\right) =$$

$$= -\frac{dA^{-1}}{dt}\cdot\frac{dA}{dt}A^{-1} - A^{-1}\cdot\frac{d^2A}{dt^2}\cdot A^{-1} - A^{-1}\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^{-1}}{dt} =$$

$$-\left(-A^{-1}\frac{dA}{dt}\cdot A^{-1}\cdot\frac{dA}{dt}\cdot A^{-1} + A^{-1}\cdot\frac{d^2A}{dt^2}\cdot A^{-1} - A^{-1}\frac{dA}{dt}\cdot A^{-1}\frac{dA}{dt}\cdot A\right.$$

$$= \left(A^{-1}\frac{dA}{dt}\right)^2\cdot A^{-1} - A^{-1}\frac{d^2A}{dt^2}A^{-1} + \left(A^{-1}\frac{dA}{dt}\right)^2\cdot A^{-1} =$$

$$= \boxed{2\left(A^{-1}\cdot\frac{dA}{dt}\right)^2\cdot A^{-1} - A^{-1}\cdot\frac{d^2A}{dt^2}A^{-1}}$$

VII НЕДЕЉА
16.05.2013.

ПРЕДАВАЊА

- Одредити опште решење, а затим наћи произвољну функцију Ψ.

• Наћи опште решење, а затим Коширово решење за дате почетне услове.

$$(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$y = 2x$, $u = x$ } раван у простору и пролази се дуж z осе

$x = \frac{y}{2} = \frac{u}{1}$ пролази кроз $(0,0,0)$ чији је вектор $\vec{a} = (1,2,1)$

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy}$$

може да се реши као хомогена једначина.

$$y' = \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$y = x \cdot t(x)$ → али ја сада овако не решавамо

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{d(x-y)}{(x-y)^2}$$

$\left\{ u = x+y,\ v = x-y \right\}$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dv}{v^2} \ / \int$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dv}{v^2}$$

$$-\frac{1}{u} = -\frac{1}{v} + C$$

$$\boxed{\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = C}$$

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = C$$

$$\frac{x+y-x+y}{(x-y)(x+y)} = C$$

$$\boxed{\frac{2y}{x^2-y^2} = C}$$

$$\boxed{u(x,y) = \Phi\left(\frac{2y}{x^2-y^2}\right)}$$

СУНЕТФ

→ од свих фамилија површина тражимо оне које испуњавају почетне услове

$$x = \Phi\left(\frac{4x}{x^2-4x^2}\right)$$

$$x = \Phi\left(\frac{-4}{3x}\right)$$ уводимо смену $\frac{-4}{3x} = t$

$$\Rightarrow \left\{ x = -\frac{4}{3t} \right\}$$

$\Phi(t) = -\frac{4}{3t}$ из општег решења → Коши

$$u(x,y) = \Phi\left(\frac{2y}{x^2-y^2}\right)$$

$$u = -\frac{\cancel{4}\,2}{3\cdot\frac{\cancel{2}y}{x^2-y^2}} \Rightarrow \boxed{u = \frac{2(y^2-x^2)}{3y}}$$

Квазилинеарна парцијална диференцијална једначина првог реда

- нехомогена је (такама се као линеарна - слично)

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad (*)$$

- ова једначина се своди на хомогене

$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C$ диференцирањем добијамо

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}}, \quad i = \overline{1, n}$$

- заменом ових израза у наш систем добијамо хомогену једначину по Φ

$$X_1 \cdot \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} + X_2 \cdot \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} + \dots + X_n \cdot \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} = X_{n+1} \Big/ \cdot \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)$$

$$X_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \underbrace{X_{n+1}\frac{\partial \Phi}{\partial u}} = 0 \quad (\#)$$

сада смо добили хомогену једначину

• Ако је φ решење једначине $(*)$ онда је истовремено и решење једначине $(\#)$

$$\frac{\partial x_1}{x_1} = \frac{\partial x_2}{x_2} = \cdots = \frac{\partial x_n}{x_n} = \frac{\partial u}{x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_i(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$$

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$$

даје нам општије решење једначине $\#$ а уједно и еквивалентно решење једначине $(*)$

---

2. Наћи опште решење, а затим оно решење које садржи криву $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=16 \\ z=3 \end{matrix}\right\}$

$z = z(x,y)$

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy$$

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2=16 \\ z=3 \end{matrix}\right\}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz}$$

$$x\,dx = y\,dy \;/\int$$

$$\int x\,dx = \int y\,dy$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + \bar{C}_1 \;/\cdot 2$$

$$x^2 - y^2 = 2\bar{C}_1$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = C_1}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{-2xy}$$

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{-2x}$$

$$-2x\,dx = z\,dz \;/\int$$

$$-\int 2x\,dx = \int z\,dz$$

$$-2\frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \bar{C}_2 \;/\cdot(-2)$$

$$2x^2 + z^2 = 2\bar{C}_2$$

$$\boxed{2x^2 + z^2 = C_2}$$

Треба нам 2 интеграла (прва)

$f_1(x,y,z) = C_1$

$f_2(x,y,z) = C_2$

$\Phi(f_1, f_2) \longrightarrow$ ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ ОВОГ ОБЛИКА

Дође је $f_2 = F(f_1)$

↑ садрзи z или u

$$\Phi(f_1, f_2) = \Phi(x^2 - y^2,\ 2x^2 + z^2) = 0$$

Дакле је → када z остаје напољу

$$2x^2 + z^2 = F(x^2 - y^2)$$

тражимо решење које садржи криву.

- почетни услови:

$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \underline{y^2 = 16 - x^2}$, $\wedge$ $\underline{z = 3}$,

$\Rightarrow 2x^2 + 9 = F(x^2 - 16 + x^2)$

$2x^2 + 9 = F(\underbrace{2x^2 - 16}_{t})$

$2x^2 - 16 = t$

$\Rightarrow 2x^2 = t + 16$

$x^2 = \frac{t+16}{2}$

$\Rightarrow F(t) = 2 \cdot \frac{t+16}{2} + 9$

$F(t) = t + 16 + 9$

$\boxed{F(t) = t + 25}$

$\hookrightarrow 2x^2 + z^2 = x^2 - y^2 + 25$

$\Leftrightarrow \underline{x^2 + y^2 + z^2 = 25}$ [СФЕРА]

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u$;

нађи Коширово решење које задовољава услов:

$u = y + z$

$x = 1$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}$$

$x \cdot y = C_1$

$\frac{z}{x} = C_2$

$\frac{u}{x} = C_3$

* потребна су нам прва три интеграла:

$$\frac{u}{x} = \Phi\left(x \cdot y, \frac{z}{x}\right)$$

$$y + z = \Phi(y, z)$$

$$\frac{u}{x} = xy + \frac{z}{x}$$

$$u(x, y, z) = x^2 y + z$$

VI НЕДЕЉА
17.05.2013.

ВЕЖБЕ

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = a_3(x,y,z)$$

a_1, a_2, a_3 су непрекидне функције

$$\frac{dx}{a_1(x,y,z)} = \frac{dy}{a_2(x,y,z)} = \frac{dz}{a_3(x,y,z)}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= C_1 \\ f_2(x,y,z) &= C_2 \end{aligned}\right\}$$ први интеграли

$$F(C_1, C_2) = 0$$

$$F(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = 0$$

(1) Решити следеће парцијалне једначине:

1) $(x+2y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0} \longrightarrow \boxed{z = C_1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+2y}{-y} = -\frac{1}{y}x - 2 \longrightarrow$$ свођимо на линеарну диф. једначину (у независна променљива, а x зависна променљива)

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = -2$$

$$x(y) = e^{-\int\frac{dy}{y}}\left(C_2 + \int -2e^{\int\frac{dy}{y}}dy\right)$$

$$x(y) = e^{-\ln y}\left(C_2 - 2\int e^{\ln y}dy\right)$$

$$x(y) = \frac{1}{y}\left(C_2 - 2\int y\,dy\right) = \frac{1}{y}\left(C_1 - 2\frac{y^2}{2}\right)$$

$$x(y) = \frac{1}{y}C_2 - y$$

$$x + y = \frac{C_2}{y}$$

$$\boxed{xy + y^2 = C_2}$$

→ линеарна диференц. једначина коју решавамо преко Ојлера

$F(C_1, C_2) = 0 \rightarrow$ ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

$$\boxed{F(z, xy+y^2) = 0} \qquad \boxed{z = f(xy+y^2)}$$

може и овај облик решења

II НАЧИН: $\frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y}$

$\frac{1\cdot dx + 1\cdot dy}{x+2y-y} = \frac{dy}{-y}$

$\frac{d(x+y)}{(x+y)} = \frac{dy}{-y}$ $\quad \begin{cases} u = x+y \\ du = d(x+y) \end{cases}$

$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y} \;/\int$

$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dy}{y}$

$\ln|u| = -\ln|y| + \bar{C}_2 = \ln|y|^{-1} + \ln e^{\bar{C}_2} = \ln e^{\bar{C}_2}\frac{1}{|y|}$

$|u| = \frac{1}{|y|}\cdot e^{\bar{C}_2} \Rightarrow |u|\cdot|y| = e^{\bar{C}_2}$

$u\cdot y = \pm e^{\bar{C}_2} = C_2$

$(x+y)\cdot y = C_2 \Rightarrow \boxed{xy+y^2 = C_2}$

$F(z, xy+y^2) = 0$

$z = f(xy+y^2)$

---

2) $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz$

$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2z} = \frac{dz}{yz}$

$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz}$

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \;/\int$

$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{z}$

$\ln|x| = \ln|z| + \bar{C}_1 = \ln|z| + \ln e^{\bar{C}_1}$

$\ln|x| = \ln e^{\bar{C}_1}|z|$

$|x| = e^{\bar{C}_1}|z|$

$\left|\frac{x}{z}\right| = e^{\bar{C}_1} \Rightarrow \frac{x}{z} = \pm e^{\bar{C}_1} = C_1$

$\boxed{\frac{x}{z} = C_1}$

$\frac{dy}{x-2z} = \frac{dz}{yz} \quad \boxed{x = zC_1}$

$\frac{dy}{z(C_1-2)} = \frac{dz}{yz}$

$ydy = (C_1-2)dz \;/\int$

$\int ydy = \int(C_1-2)dz$

$\frac{y^2}{2} = (C_1-2)z + C_2$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x}{z}\cdot z - 2z + C_2$

$-x + 2z + \frac{y^2}{2} = C_2$

$\boxed{-x+2z+\frac{y^2}{2} = C_2}$

$$F\left(\frac{x}{z}, -x + 2z + \frac{y^2}{2}\right) = 0$$

$$2z + \frac{y^2}{2} - x = f\left(\frac{x}{z}\right)$$

---

3) $y\frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{\frac{y}{x}}$$

$$dx = x\,dz$$

$$\frac{dx}{x} = dz \;/\int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| = z + C_1$$

$$\ln|x| - z = C_1$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{\ln|x| - C_1}$$

$$(\ln|x| - C_1)\,dx = y\,dy \;/\int$$

$$\int \underbrace{(\ln|x| - C_1)}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \int y\,dy$$

$$\begin{cases} u = \ln|x| - C_1 ; & dv = dx \\ du = \frac{1}{|x|}dx ; & v = x \end{cases}$$

$$x(\ln|x| - C_1) - \int \frac{x}{|x|}dx = \frac{y^2}{2} + C_2$$

$$x(\ln|x| - C_1) - x = \frac{y^2}{2} + C_2$$

$$x(\ln|x| - \ln|x| + z - 1) = \frac{y^2}{2} + C_2$$

$$xz - x - \frac{y^2}{2} = C_2$$

$$F\left(\ln|x| - z, \; xz - x - \frac{y^2}{2}\right) = 0$$

4) $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y-x)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y-x} = \frac{dz}{x^2}$$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dz}{x^2}$$

$$\frac{dx}{2} = \frac{dz}{x}$$

$$x\,dx = 2\,dz \quad / \int$$

$$\int x\,dx = 2\int dz$$

$$\frac{x^2}{2} = 2z + \bar{C}_1 \quad / \cdot 2$$

$$x^2 = 4z + 2\bar{C}_1 = 4z + C_1$$

$$\boxed{x^2 - 4z = C_1}$$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{2x} = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}y - \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2}$$

$$y = e^{+\int \frac{dx}{2x}}\left(C_2 + \int -\frac{1}{2}e^{-\int \frac{dx}{2x}}\,dx\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{2}\ln x}\left(C_2 - \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{2}\ln x}\,dx\right)$$

$$y = \sqrt{x}\left(C_2 - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}}\right)$$

$$y = \sqrt{x}\left(C_2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{x}\right)$$

$$y = \sqrt{x}\,C_2 - x$$

$$y + x = \sqrt{x}\,C_2$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}} = C_2$$

$$\boxed{F\left(x^2 - 4z,\ \frac{x+y}{\sqrt{x}}\right) = 0}$$

5) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$

Одредити општа решења парцијалне диференцијалне једначине као и она која садржи криву

$$\left.\begin{aligned} y &= -2 \\ z &= x - x^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \bar{C}_1$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln e^{\bar{C}_1}$$

$$\ln|x| = \ln e^{\bar{C}_1}|y|$$

$$|x| = e^{\bar{C}_1}|y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = e^{\bar{C}_1}$$

$$\frac{x}{y} = \pm e^{\bar{C}_1}$$

$$\frac{x}{y} = C_1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = C_1$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z - (x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \frac{dz}{z - (x^2+y^2)}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 \\ du &= d(x^2+y^2) \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{du}{2u} = \frac{dz}{z-u}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{z-u}{2u} = \frac{z}{2u} - \frac{u}{2u}$$

$$\frac{dz}{du} - \frac{1}{2u}\cdot z = -\frac{1}{2}$$ ЛНДЈ

$$z = e^{+\int \frac{du}{2u}}\left(C_2 + \int -\frac{1}{2} e^{-\int \frac{du}{2u}} du\right)$$

$$z = e^{\frac{1}{2}\ln u}\left(C_2 - \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{2}\ln u} du\right) = \sqrt{u}\left(C_2 - \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}\right)$$

$$z = \sqrt{u}\left(C_2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{u}\right) = \sqrt{u}\,C_2 - u$$

$$z + u = \sqrt{u}\,C_2$$

$$\frac{z+u}{\sqrt{u}} = C_2 \Rightarrow \text{ВРАТИМО СМЕНУ} \quad \frac{z + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2$$

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

$$\frac{z+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} z &= x - x^2 \\ y &= -2 \end{aligned}\right\} \text{ КРИВА}$$

$$\frac{x - x^2 + x^2 + (-2)^2}{\sqrt{x^2+(-2)^2}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4}} = f\left(\underbrace{\frac{-2}{x}}_{t}\right)$$

$$t = \frac{-2}{x}$$

$$x = -\frac{2}{t}$$

$$\frac{-\frac{2}{t}+4}{\sqrt{\frac{4}{t^2}+4}} = \frac{2\left(-\frac{1}{t}+2\right)}{2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \frac{\frac{2t-1}{t}}{\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{2-\frac{1}{t}}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}} = f(t)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2t-1}{\sqrt{t^2+1}}}$$

$$\frac{z+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \left(t = \frac{y}{x}\right) \qquad \left(\frac{1}{t} = \frac{x}{y}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2 - \frac{x}{y}}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}} = \frac{\frac{2y-x}{y}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}}$$

$$\Rightarrow \frac{z+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{2y-x}{y}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}}$$

1° $y<0$

$|y| = -y$

$$\frac{z+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{2y-x}{y}\cdot 1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{-y}\cdot(-1)} = -\frac{2y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z + x^2 + y^2 = -2y + x$$

$$z = x - x^2 - y^2 - 2y$$

$y=-2$: $z = x - x^2 - (-2)^2 - 2(-2)$

$z = x - x^2 - 4 + 4$

$\boxed{z = x - x^2}$

2° $y>0$

$|y| = y$

$$\frac{z+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{2y-x}{y}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}$$

$$z + x^2 + y^2 = 2y - x$$

$$z = 2y - x - x^2 - y^2$$

$y=-2$: $z = 2\cdot(-2) - x - x^2 - (-2)^2$

$z = -4 - x - x^2 - 4$

$z = -x - x^2 - 8 \neq x - x^2$

$\Rightarrow \boxed{z = -x^2 - y^2 + x - 2y}$

II НАЧИН: $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2}$ $(y = C_1 x)$ $\frac{y}{x} = C_1 \,/^2$

$C_1^2 = \frac{y^2}{x^2}$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - x^2 - C_1^2 x^2} = \frac{dz}{z - x^2(1+C_1^2)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - x^2(1+C_1^2)}{x} = \frac{z}{x} - x(1+C_1^2)$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}\cdot z = -x\cdot(1+C_1^2)$$

$$z = e^{+\int \frac{dx}{x}}\left(C_2 + \int -x\cdot(1+C_1^2)\, e^{-\int \frac{dx}{x}}\, dx\right)$$

$$z = e^{\ln x}\left(C_2 - (1+C_1^2)\cdot\int x\cdot e^{-\ln x}\, dx\right)$$

$$z = x\left(C_2 - (1+C_1^2)\int x\cdot\frac{1}{x}\, dx\right) = x\left(C_2 - (1+C_1^2)x\right)$$

$$z = xC_2 - x^2(1+C_1^2) = xC_2 - x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$z = xC_2 - x^2 - y^2 \Rightarrow z + x^2 + y^2 = xC_2$$

$$\boxed{\frac{z+x^2+y^2}{x} = C_2}$$

5) Одредити решење парцијалне једначине:

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z^2 - y^2 = a^2 \end{array}\right\}$$

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \bar{C}_1$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln e^{\bar{C}_1}$$

$$\ln|x| = \ln e^{\bar{C}_1}|y|$$

$$\frac{|x|}{|y|} = e^{\bar{C}_1}$$

$$\frac{x}{y} = \pm e^{\bar{C}_1}$$

$$\frac{x}{y} = C_1$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{2x^2z + 2y^2z} = \frac{dz}{z^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\,d(x^2+y^2)}{2z(x^2+y^2)} = \frac{dz}{z^2 - (x^2+y^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + y^2 \\ du = d(x^2+y^2) \end{array}\right\}$$

$$\frac{du}{4zu} = \frac{dz}{z^2 - u}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{z^2 - u}{4zu} = \frac{z^2}{4zu} - \frac{u}{4zu}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{z}{4u} - \frac{1}{4z}$$

$$\frac{dz}{du} - \frac{1}{4u}\cdot z = -\frac{1}{4}z^{-1} \quad / \cdot z$$

Бернулијева диф. једн.

$$\left[t = z^{1-(-1)} = z^2 \rightarrow t' = 2z \cdot z' \right]$$

$$z\frac{dz}{du} - \frac{1}{4u}\cdot z^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}t' - \frac{1}{4u}t = -\frac{1}{4} \quad / \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad t' - \frac{1}{2u}\cdot t = -\frac{1}{2}$$

линеарна диф. једн.

$$t = e^{+\int \frac{du}{2u}} \left(C_2 + \int -\frac{1}{2} e^{-\int \frac{du}{2u}} du \right)$$

$$t = e^{\frac{1}{2}\ln u} \left(C_2 - \frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{2}\ln u} du \right) = \sqrt{u} \left(C_2 - \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \right)$$

$$t = \sqrt{u} C_2 - \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} = \sqrt{u} C_2 - u$$

$$t + u = \sqrt{u} C_2$$

$$\boxed{\frac{t+u}{\sqrt{u}} = C_2} \xrightarrow[\text{СМЕНУ}]{\text{ВРАТИМО}} \frac{z^2+u}{\sqrt{u}} = C_2 \xrightarrow[\text{СМЕНУ}]{\text{ВРАТИМО}} \boxed{\frac{z^2+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2}$$

II НАЧИН:

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{2x^2z + 2y^2z + z^3 - 2x^2 - y^2z} = \frac{dx}{2xz}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\,d(x^2+y^2+z^2)}{x^2z + y^2z + z^3} = \frac{dx}{2xz} \quad / \cdot 2z$$

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2} d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{dx}{x} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = x^2+y^2+z^2 \\ du = d(x^2+y^2+z^2) \end{array} \right\}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = \ln|x| + \bar{C}_2 = \ln|x| + \ln e^{\bar{C}_2} = \ln e^{\bar{C}_2}|x|$$

$$\frac{|u|}{|x|} = e^{\bar{C}_2} \Rightarrow \frac{u}{x} = \pm e^{\bar{C}_2} = C_2$$

$$\frac{u}{x} = C_2 \xrightarrow[\text{СМЕНУ}]{\text{ВРАТИМО}} \boxed{\frac{x^2+y^2+z^2}{x} = C_2}$$

$$F(C_1, C_2) = 0 \iff F\left(\frac{x}{y}, \frac{x^2+y^2+z^2}{x}\right) = 0$$

→ сводим кривую:

$$\begin{cases} x = a \\ z^2 = a^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{a^2 + y^2 + (a^2 + y^2)}{a} = f\left(\underbrace{\frac{y}{a}}_{t}\right)$$

$t = \frac{y}{a} \Rightarrow y = ta$

$t \to f(t)$

$$f(t) = \frac{(a^2 + a^2t^2) \cdot 2}{a} = \frac{2a^2 + 2a^2t^2}{a}$$

$$f(t) = 2a + 2at^2 = \underline{2a(t^2 + 1)}$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = 2a\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = \frac{2ay^2}{x^2} + 2a$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = \frac{2ay^2}{x^2} + 2a \quad / \cdot x^2$$

$$x(x^2 + y^2 + z^2) = 2ay^2 + 2ax^2$$

$$\boxed{x(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x^2 + y^2)}$$

6. $(xy^3 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(y^3 - x^3)$

$$\frac{dx}{xy^3 - 2x^4} = \frac{dy}{2y^4 - x^3y} = \frac{dz}{9z(y^3 - x^3)}$$

$$\frac{ydx + xdy}{xy^4 - 2x^4y + 2xy^4 - x^4y} = \frac{dz}{9z(y^3 - x^3)}$$

$$\frac{d(xy)}{3xy^4 - 3x^4y} = \frac{dz}{9z(y^3 - x^3)}$$

$$\frac{d(xy)}{3(xy)(y^3 - x^3)} = \frac{dz}{9z(y^3 - x^3)} \quad / \cdot (y^3 - x^3)$$

$$\frac{d(xy)}{3(xy)} = \frac{dz}{9z} \quad / \cdot 3$$

$$\begin{cases} u = xy \\ du = d(xy) \end{cases}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dz}{3z} \quad / \int$$

$$3\int \frac{du}{u} = \int \frac{dz}{z}$$

$$3\ln|u| = \ln|z| + \bar{C}_1 = \ln|z| + \ln e^{\bar{C}_1} = \ln e^{\bar{C}_1}|z|$$

$$\ln|u|^3 = \ln e^{\bar{C}_1}|z|$$

$$\frac{|u|^3}{|z|} = e^{\bar{C}_1}$$

$$\frac{u^3}{z} = \pm e^{\bar{C}_1} = C_1$$

$$u^3 = z \cdot C_1 \xrightarrow[\text{смену}]{\text{враћамо}} \boxed{\frac{(xy)^3}{z} = C_1}$$

$$\frac{x^2dx + y^2dy}{x^3y^3 - 2x^6 + 2y^6 - x^3y^3} = \frac{dz}{9z(y^3 - x^3)}$$

$$\frac{\frac{1}{3}d(x^3+y^3)}{2(y^6 - x^6)} = \frac{dz}{9z(y^3 - x^3)}$$

$$\frac{d(x^3+y^3)}{2 \cdot 6 (y^3+x^3)(y^3-x^3)} = \frac{dz}{9z(y^3-x^3)} \quad / \cdot 3$$

$$3\frac{d(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = 2 \cdot \frac{dz}{z} \quad / \int \qquad \begin{cases} u = x^3+y^3 \\ du = d(x^3+y^3) \end{cases}$$

$$3\frac{du}{u} = 2\frac{dz}{z} \Rightarrow 3\int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dz}{z}$$

$$3\ln|u| = 2\ln|z| + \bar{C}_2 = \ln|z|^2 + \ln e^{\bar{C}_2}$$

$$\ln|u|^3 = \ln e^{\bar{C}_2} z^2$$

$$\frac{|u|^3}{z^2} = e^{\bar{C}_2}$$

$$\frac{u^3}{z^2} = \pm e^{\bar{C}_2} = C_2 \xrightarrow[\text{СМЕНУ}]{\text{ВРАТИМО}} \frac{(x^3+y^3)^3}{z^2} = C_2$$

$$F\left(\frac{(xy)^3}{z}, \frac{(x^3+y^3)^3}{z^2}\right) = 0$$

(LAGRANŽOV) METOD VARIJACIJE KONSTANTI:

① $y'' - y = \underbrace{\frac{e^x}{e^x+1}}_{f(x)}$

$f(x)$ - nije oblika $e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x)$ ⇒ ne može se pretpostaviti oblik partikularnog reš.

homogeni deo: $y''-y=0 \Rightarrow k^2-1=0$, $k_{1,2}=\pm 1$, $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$

Opšte rešenje tražimo u obliku homogenog, gde su konstante fje od x:

$$C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} \quad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} &= 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} &= \frac{e^x}{e^x+1} \end{aligned}\right]_{+} \Rightarrow C_1'(x) = \frac{1}{2(e^x+1)} \qquad C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{2(e^x+1)} \Rightarrow$$ integracija do $C_1(x), C_2(x)$

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{2(e^x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C_1 = \frac{1}{2}\underbrace{\ln e^x}_{x} - \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C_1$$

$e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{t}$

$\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{1}{t(t+1)}$, $At + A + Bt = 1$, $A+B=0$, $A=1$, $B=-1$

isto: $C_2(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_2$

Zamenom $C_1(x)$ i $C_2(x)$ u $(*)$:

$$y = e^x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C_1\right) + e^{-x}\left(-\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_2\right)$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left(e^x(x - \ln(e^x+1)) - 1 + e^{-x}\ln(e^x+1)\right)$$

Ⓣ Neka je $y_h = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ opšte reš. homogene j-ne $L^n(y)=0$. Tada je opšte rešenje nehomogene j-ne $L^n(y)=F(x)$ dato sa

$$y = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

gde su $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ funkcije čiji se izvodi nalaze rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)} &= F(x) \end{aligned}$$

a zatim se same konstante (funkcije) nalaze integracijom.

→ u svim j-nama je $C_i'(x)$

→ u svakoj sledećoj se povećava izvod $y_i(x)$ do $n-1$ izvoda

→ samo u poslednjoj j-ni je na desnoj str. $F(x)$, u ostalim je nula.

npr. za $n=2$ dobiju se 2 jednačine, prva za y_i bez izvoda da je $=0$, druga za $n-1=1$. izvod y_i da je $=F(x)$.

OPŠTI OBLIK: $F(x, y, y', y'') = 0$

① NEPOTPUNA JEDNAČINA $F(y', y'') = 0$, $y'' = f(y')$

smena: $y' = p$

$y'' = \frac{dp}{dx}$

PR.1. $y'' = y'$

$y' = p \quad y'' = \frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = dx \Rightarrow \ln|p| = x + C \quad /\exp$

$p = C_1 e^x + C_2$

② $F(x, y', y'') = 0$

smena: $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} \Rightarrow F(x, p, p') = 0$ Svodi se na DJ prvog reda

PR. 2. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 1$

$y' = p$

$y'' = p'$

$(1+x^2)p' + 2xp = 1$

$p' + \frac{2x}{1+x^2} p = \frac{1}{1+x^2}$ ← linearna DJ 1. reda

$p = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left(C + \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx}}{1+x^2} dx\right)$ ... (provežbaj integrale :))

... $p = \frac{C_1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{dy}{dx}$

$y = \int \frac{C_1}{1+x^2} dx + \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = C_1 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2$

③ $F(y, y', y'') = 0$

$y'' = f(y, y')$

smena $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y' = p} = p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$

PR.3. $y'' \sin y = 2(y')^2 \cos y$

$y' = p$

$y'' = p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy}\sin y = 2p^2 \cos y$

$dp \cdot \frac{\sin y}{dy} = 2p \cdot \cos y$

$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{\cos y}{\sin y} dy + C_1$

$\ln|p| = \ln(\sin^2 y) + C_1$

$\ln \frac{p}{\sin^2 y} = C_1 \quad /\exp$

$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sin^2 y} = C_2 = e^{C_1}$

$\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int C_2\,dx + C_3$

$\operatorname{ctg} y = -C_2 x - C_3$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

I ДЈ првог реда:

① $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0 \quad / \int$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} g(y)\,dy = C$$

PR. $y\,dx + (x^2-4x)\,dy = 0$

$(x^2-4x)\,dy = -y\,dx$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2-4x}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-4}\right| + C$$

$$\ln|y| = \ln\left(\frac{x}{x-4}\right)^{1/4} e^{C}$$

$$|y| = \sqrt[4]{\frac{x}{x-4}} \cdot \underbrace{e^{C}}_{C_1}$$

$$y = C_1 \sqrt[4]{\frac{x}{x-4}}$$

$$-\int \frac{dx}{x(x-4)} = -\left(-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-4}\right) = \frac{1}{4}(\ln x - \ln(x-4))$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} = \frac{1}{x(x-4)}$$

$A(x-4) + Bx = 1$

$A + B = 0$

$-4A = 1$

$A = -\frac{1}{4} \qquad B = \frac{1}{4}$

② $y' = g(ax+by)$

smena: $z = ax + by = z(x) \quad / \frac{d}{dx}$

$z' = a + by' = \frac{dz}{dx}$

$y' = g(z)$

$a + bg(z) = \frac{dz}{dx}$

$dx = \frac{dz}{a+bg(z)} \quad / \int \rightarrow \ldots$

PR.2. $y' = \underbrace{4x^2 + 4xy + y^2}_{(2x+y)^2} - 6 = (2x+y)^2 - 6$

$2x + y = z \quad / \frac{d}{dx}$

$2 + y' = z'$

$y' = z^2 - 6 = z' - 2$

$z' = z^2 - 4 = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{z^2-4} = dx$

$\frac{1}{4}\int \frac{dz}{z-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z+2} = x + C$

$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = x + C$

$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+y-2}{2x+y+2}\right| = x + C$

Хомогене ДЈ : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{y}{x} = u = u(x)$

$y = xu \quad / \frac{d}{dx}$

$y' = u + xu'$

$u + xu' = f(u)$

$x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u$

$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \quad / \int \Rightarrow \dots$

3. $(x^2+y^2)y' = 2xy$

$y' = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad /:x^2 \quad /:x^2 = \frac{2\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}$

$\frac{y}{x} = u$

$y' = u + xu'$

$u + u'x = \frac{2u}{1+u^2}$

$u'x = \frac{2u - u - u^3}{1+u^2}$

$\frac{(1+u^2)du}{u-u^3} = \frac{dx}{x}$

$= \ln|x| + C$

$-\int \frac{1+u^2}{u(1-u^2)}\,du \qquad 1-u^2$

$\frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{1+u} = \frac{1+u^2}{u(1-u^2)}$

$A(1-u^2) + Bu(1+u) + Cu(1-u) = 1+u^2$

$-A + B - C = 1 \qquad -C - C = 2$

$B + C = 0 \Rightarrow B = -C$

$\boxed{C = -1}$

$\boxed{B = 1}$

$\boxed{A = 1}$

$\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{1-u} - \int \frac{du}{1+u} = \ln\frac{u}{1-u^2}$

$\int \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u|$

$\ln\left|\frac{\frac{y}{x} \quad /\cdot x^2}{1-(\frac{y}{x})^2 \quad /\cdot x^2}\right| = \ln|x| + C$

$\frac{xy}{x^2-y^2} = C_1 x$

СУНЕТФ

29.4.2013

④ Линеарне ДЈ: $y' + P(x)y = Q(x)$

1) $Q(x) \equiv 0$ - хомогена

$$y' + P(x)y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$
$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \;/\int \Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + C$$
$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

2) $Q(x) \neq 0$ - нехомогена

$$y' + P(x)y = Q(x) \;/\cdot e^{\int P(x)dx}$$
$$y' e^{\int P(x)dx} + P(x) y e^{\int P(x)dx} = Q(x) e^{\int P(x)dx}$$
$$\left(y \cdot e^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x) e^{\int P(x)dx} \;/\int$$
$$y \cdot e^{\int P(x)dx} = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} + C$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx\right)}$$

PR. $y' + 2xy = \frac{1}{x} \Rightarrow P(x) = 2x \quad Q(x) = \frac{1}{x}$

$$y = e^{-\int 2x\,dx}\left(C + \int \frac{1}{x} \cdot e^{\int 2x\,dx} dx\right)$$
$$= e^{-x^2}\left(C + \int \frac{e^{x^2}}{x} dx\right) \ldots$$

⑤

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m \quad \text{- БЕРНУЛИ}$$

$$\boxed{z = y^{1-m}}$$

$$z' = (1-m) y^{-m} y'$$

PR. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2 \;/: y^2 \rightarrow$

$$z = y^{-1}$$
$$z' = -y^{-2} y'$$

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -x$$
$$-z' + \frac{1}{x} \cdot z = -x \;/\cdot(-1)$$
$$z' - \frac{1}{x}z = x \qquad P(x) = -\frac{1}{x} \qquad Q(x) = x$$
$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int x \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right)$$
$$= x\left(C + \int x \cdot \frac{1}{x} dx\right)$$

$$-\int \frac{dx}{x} = -\ln x = \ln x^{-1}$$

$$z = x(C + x)$$

3) Рикатиева дна (ништа без партикуларног :P)

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad R(x) \equiv 0 \Rightarrow \text{Бернули}$$

познато: y_p

$$\boxed{y = y_p + \frac{1}{z}} \qquad z = z(x)$$

$$y' = y_p' - \frac{1}{z^2}\cdot z' = P(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + R(x)$$

$y_p' =$

$$P(x)\left(2y_p\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + Q(x)\frac{1}{z} + \frac{z'}{z^2} = 0 \quad / \cdot z^2$$

$$P(x)\left(2zy_p + 1\right) + z\cdot Q(x) = -z'$$

$$z' = -2P(x)\cdot y_p\cdot z - P(x) - z\cdot Q(x)$$

$$z' = \underbrace{\left(-2P(x)y_p - Q(x)\right)}\cdot z - \underbrace{P(x)}$$

Linearne DJ 2. REDA

① LIUVILOVA FORMULA

$y_1(x)$ - jedno netrivijalno reš. $\quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx$$

---

② JNA SA KONST. KOEF.:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

$y = y_p + y_h$

y_h → Reš. karakt. j-ne (1)

y_p → u zavisnosti $f(x)$ (2)

(1) $k^2 + pk + q = 0$

1° $k_1 = k_2 \Rightarrow$ OPŠTE REŠ: $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$

2° $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

3° $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\quad y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

1. $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$y_p = x^s(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)$

s-red br. nula.

$y'' - y' = P(x)$

K.J. $\lambda^2 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$

2) $f(x) = ae^{\alpha x}$

$y_p = Bx^s e^{\alpha x}$

s-red α kao korena

3) $f(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)e^{\alpha x}$

$y = ze^{\alpha x}$

$\ldots \quad \lambda(5-\lambda)^3$

$k^2 + 1$

4) $f(x) = a\sin\beta x + b\cos\beta x$

$y_p = x^s(A\sin\beta x + B\cos\beta x)$ $\quad \boxed{s - i\beta}$ -

5) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$

$y_p = x^s e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x)$

$\underline{s - \alpha + i\beta}$

CYNETΦ

22.06.2010.

1. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X \text{ , где је } A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Решити систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{z^2+xy} = \frac{dz}{zx+z^2}.$$

3. Квазилинеарна нехомогена парцијална диференцијална једначина.

17.06.2006.

1. Наћи опште решење система диференцијалних једначина,

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - 7te^{-t} - 3$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y - 1$$

а затим издвојити оно решење које остаје ограничено када $t \to +\infty$.

2. Одредити опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \left(x^2+y\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2+y\right)z^2 - z,$$

а затим издвојити партикуларно решење које садржи криву: $x=1, y=t+1, z=\frac{1}{t^2}$ $\left(t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0\right)$.

3. Линеарна хомогена парцијална једначина првог реда.

05.02.2007.

1. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y + z$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y + z \quad .$$

2. Наћи опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$y\left(x+y\right)\frac{\partial z}{\partial x} - x\left(x+y\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x-y\right)\left(2x+2y+z\right),$$

а затим издвојити оно партикуларно решење које садржи криву: $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y=b$.

3. Квазилинеарна нехомогена парцијална диференцијална једначина.

СУНЕТФ

08.09.2006.

1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^{t}$$
$$\frac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t} \quad .$$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину $\left(x+y-xy^{2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(x^{2}y-x-y\right)\frac{\partial z}{\partial y}=y^{2}-x^{2}$.

3. Написати дефиниције свих решења парцијалних диференцијалних једначина.

06.09.2005.

1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}=3x-2y$$
$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}}=2x-y \quad .$$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^{2}-x^{2}-y^{2},$$

а затим издвојити оно решење које садржи криву: $y=x^{2}, x^{2}+y^{2}+z^{2}=a^{2}$.

3. Матрична метода за решавање система диференцијалних једначина.

18.06.2005.

1. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_{1}}{dt}=x_{1}-2x_{2}-x_{3}$$
$$\frac{dx_{2}}{dt}=-x_{1}+x_{2}+x_{3}$$
$$\frac{dx_{3}}{dt}=x_{1}\qquad -x_{3} \quad .$$

2. Одредити решење парцијалне диференцијалне једначине

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^{2}-x^{2}-y^{2},$$

које садржи криву: $x=a, z^{2}-y^{2}=a^{2}$.

3. Квазилинеарна нехомогена парцијална диференцијална једначина.

СУ ВЕТФ

05.10.2006.

1. Решити систем диференцијалних једначина:
$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + te^t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + y + 2e^t \quad .$$

2. Решити систем диференцијалних једначина:
$$\frac{dy}{dx} = y^2 z$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - yz^2 \quad .$$

3. Линеарна парцијална диференцијална једначина првог реда.

05.05.2006.

1. Решити систем диференцијалних једначина:
$$\frac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos(t) \quad .$$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину
$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2,$$
а затим одредити оно решење које садржи криву: $y = x^2, x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3. Системи линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима.

24.02.2006.

1. Решити систем диференцијалних једначина:
$$\frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}$$
$$\frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \quad .$$

2. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина:
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + 2x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 4x_2 - 2x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + 5x_2 - 3x_3 \quad .$$

3. Квазилинеарна нехомогена парцијална диференцијална једначина.

СУНЕТФ

10.07.2006.

1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + 2e^t$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = x + 2y \quad .$$

2. Наћи опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$\left(x + y - xy^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(x^2y - x - y\right)\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(y^2 - x^2\right),$$

а затим издвојити оно решење које садржи криву: $x^2 + y^2 = 2$, $z = 1$.

3. Систем диференцијалних једначина. Појам првих интеграла.

03.07.2007.

1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x + 4y - e^{2t}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -x - y + 3e^{2t} \quad .$$

2. Одредити опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$\left(x^2 - y^2 - z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz,$$

а затим одредити партикуларно решење које садржи криву: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = \frac{1}{2}$.

3. Хомогена парцијална диференцијална једначина првог реда.

06.07.2005.

1. Матричном методом решити систем:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \qquad - x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \quad .$$

2. Решити систем:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 z$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - yz^2 \quad .$$

3. Линеарна парцијална диференцијална једначина првог реда. Први интеграли система диференцијалних једначина.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

1. (16) Матричном методом решити систем диф. једначина

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (17) Наћи опште решење парцијалне диф. једначине

$$x\left(y^2 - z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + y\left(z^2 - x^2\right)\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(y^2 - x^2\right),$$

а затим одредити партикуларно решење које садржи праву $x = y = z$.

3. (T)(17) Први интеграли нормалног система диференцијалних једначина.

У Београду, 3.07.2013. Испит траје 90'.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

Диференцијалне једначине

1. (16) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{1}{\sin t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}.$$

2. (17) Наћи опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \left(y - x\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = z + x^2 \ln x,$$

а затим издвојити оно које садржи криву $z = \sin y$, $x = 1$.

3. Т (17) Лагранжов метод варијације константи за нехомоген систем диференцијалних једначина.

У Београду, 12.06.2013. Испит траје 90 min.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ (август '13)

1. (16) Наћи опште решење система диф. једначина

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - 7te^{-t} - 3$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y - 1,$$

а затим издвојити оно решење које остаје ограничено када $t \to +\infty$.

2. (17) Одредити опште решење парцијалне диф. једначине

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2+y)\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2+y)z^2 - z,$$

а затим издвојити партикуларно решење које садржи криву $x = 1,\ y = t+1,\ z = \frac{1}{t^2}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$.

3(Т) (17) Лагранжова метода варијације константа за решавање система диференцијалних једначина.

У Београду, 25.08.2013 Испит траје 90 min.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА (Блок диф. једначине)

(15) 1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + te^t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 4y + 2e^t$$

(20) 2. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{dx} = y^2 z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - yz^2$$

(15) 3. (Теорија) Линеарна парцијална диф. једначина првог реда

23.02.2008.

У Београду, Испит траје два сата

СУ ЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТЕМАТИКА 4 (Блок Диф. једначине)

1. (12) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x.$$

2. (13) Наћи опште решење парц. диф. једначине

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + 1 - x^2 - y^2,$$

а затим из општег решења издвојити оно које садржи криву $y = x^2$, $z = 2x$.

3. (т)(15) Први интеграли система линеарних диференцијалних једначина.

У Београду 30.06. 2008. Испит траје два сата.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = y + tg^2 t - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + tg\, t.$$

2. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = x(y^2 - z^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(z^2 + x^2)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(x^2 + y^2).$$

3. (Т) Хомогена парцијална једначина првог реда.

У Београду, 25.08. 2008. Испит траје два сата.

СУ ЕТФ

Електротехнички факултет
Београд

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

1. (13) Матричном методом решити систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z$$

$$\frac{dz}{dt} = -4x + y + 5z$$

2. (12) Решити систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + 2\sin t$$

3. (15) Лагранжеов метод варијације константа

У Београду 28.09.2007

Испит траје два сата

СУ ЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 4 (Блок Диф. једначине)

1. (12) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^{t}$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{2t}.$$

2. (13) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y(x+y)} = \frac{-dy}{x(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+y+z)}.$$

3. (15) Хомогена парцијална једначина првог реда.

У Београду 25. 09. 2007. Испит траје два сата.

СУ ЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

(15) 1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + te^t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + y + 2e^t.$$

(15) 2. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{dx} = y^2 z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - yz^2.$$

(10) 3. (Теорија) Линеарна парцијална једначина првог реда

У Београду, 5.10.2006. Испит траје два сата.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

(15) 1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$
$$\frac{dy}{dt} + 3y - x = e^{2t}.$$

(15) 2. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x+y-xy^2)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2y - x - y)\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - x^2$$

(10) 3. (Т) Написати дефиниције свих решења парцијалних диференцијалних једначина.

У Београду, 8. 09. 2006. Испит траје два сата.

① $$\begin{cases} x(t) = e^{-4t}(C_1 + C_2 t) + \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t} \\ y(t) = -e^{-4t}(C_1 + C_2 + C_2 t) + \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t}. \end{cases}$$

② Опште решење:

$$F\left(\ln|1-xy| + z,\ x^2 + y^2 + 2z\right) = 0.$$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 5 (Блок диф. једначине)

1. (15) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x - 3y + t^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x - 2y.$$

2. (20) Одредити партикуларно решење парцијалне диференцијалне једначине

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\,\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

које садржи криву $x + y = 2z$, $xz = 1$.

3. (Т, 15) Хомогена линеарна парцијална диференцијална једначина првог реда.

У Београду, 27.12.2007.

Испит траје 2 сата.

СУНЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

1. (12) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x + 4y - e^{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -x - y + 3e^{2t}.$$

2. (13) Одредити опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

а затим одредити партикуларно решење које садржи криву $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 1/2$.

3. (Т) (15) Хомогена парцијална једначина првог реда.

У Београду, 3.07.2007. Испит траје два сата.

СУНЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

(15) 1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + te^t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + y + 2e^t.$$

(15) 2. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{dx} = y^2 z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - yz^2.$$

(10) 3. (Теорија) Линеарна парцијална једначина првог реда

У Београду, 5. 10. 2006. Испит траје два сата.

СУНЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 5 (Блок диф. једначине)

1. (15) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x - 3y + t^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x - 2y.$$

2. (20) Одредити партикуларно решење парцијалне диференцијалне једначине

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\,\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

које садржи криву $x + y = 2z$, $xz = 1$.

3. (Т, 15) Хомогена линеарна парцијална диференцијална једначина првог реда.

У Београду, 27. 12. 2007.

Испит траје 2 сата.

СУ ЕТФ

ТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

Колоквијум из МАТЕМАТИКЕ 4
Блок диференцијалне једначине

1. Наћи опште решење система диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - 7te^{-t} - 3$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y - 1$$

а затим издвојити оно решење које остаје ограничено када $t \to +\infty$.

2. Одредити опште решење парцијалне једначине

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y)\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y)z^2 - z$$

а затим издвојити партикуларно решење које садржи криву $x = 1$, $y = t + 1$, $z = \frac{1}{t^2}$ $(t \in R,\ t \neq 0)$.

3. (теорија) Линеарна хомогена парцијална једначина првог реда.

У Београду, 17.06. 2006.

Колоквијум траје два сата.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

1. [14] Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{где је} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. [14] Решити систем диференцијални једначина

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{z^2+xy} = \frac{dz}{zx+z^2}.$$

3. [13] Квазилинеарна парцијална диференцијална једначина.

У Београду, 22.06.2010

Испит траје 90 min.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТ 4

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

13 1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = y + tg^2 t - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + tg\, t.$$

13 2. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = x(y^2 - z^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(z^2 + x^2)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(x^2 + y^2).$$

3. (Т) Хомогена парцијална једначина првог реда.

14 У Београду, 25.08.2008. Испит траје два сата.

Електротехнички факултет, Београд

МАТ.4 (Блок диф. једначине)

1. (13) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y$$

2. (15) Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = x(y^2 - z^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(z^2 + x^2)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(x^2 + y^2).$$

3. (Т)(12) Хомогена парцијална једначина првог реда.

У Београду, 24.08.2009

Испит траје 90 min.

Анђелковић Ненад

435/06

Σ 130 [illegible]

10

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТЕМАТИКА 4 (Блок диф. једначине)

1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = y + tg^2 t - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + tg\, t.$$

2. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = x(y^2 - z^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(z^2 + x^2)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(x^2 + y^2).$$

3. (Т) Хомогена парцијална једначина првог реда.

У Београду, 25.08.2008. Испит траје два сата.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТЕМАТИКА 4 (Блок Диф. једначине)

1. [14] Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{где је} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. [14] Решити систем диференцијални једначина

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{z^2+xy} = \frac{dz}{zx+z^2}.$$

3. [13] Квазилинеарна парцијална диференцијална једначина.

У Београду, 22.06.2010

Испит траје 90 min.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТЕМАТИКА 5 (Блок диф. једначине)

1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 3y + 2\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t$$

2. Решити парцијалну једначину

$$2xz\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\,\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$$

а затим одредити оно решење које садржи криву

$$y = x^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

3. (Теорија) Системи линеарних једначина са константним коефицијентима.

Београд, 5.05.2006.

Испит траје два сата.

СУ ЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 4/5 (Блок Диф. једначине)

14 1. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x.$$

13 2. Одредити решење парцијалне Диф. једначине

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$$

које садржи криву $x = a$, $z^2 - y^2 = a^2$

13. 3. Систем диференцијалних једначина. Појам првих интеграла

У Београду, 6.02.2010 Испит траје 90 min.

СУ ЕТФ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд

МАТЕМАТИКА 4 (Блок Диф. једначине)

1. [14] Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{где је} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. [14] Решити систем диференцијални једначина

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{z^2+xy} = \frac{dz}{zx+z^2}.$$

3. [13] Квазилинеарна парцијална диференцијална једначина.

У Београду, 22.06.2010 Испит траје 90 min.

① $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} e^{-t}$

② $\left.\begin{aligned} x - y + z &= c_1 \\ \ln|x| + \frac{y}{z} &= c_2 \end{aligned}\right\}$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

МАТ. 4, МАТ. 5 (Блок Диф. Једначине)

1. (15) Матричном методом решити систем диф. једначина

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_1 + 2x_2.$$

2. (20) Одредити решење парцијалне једначине

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$$

које садржи криву $x = a$, $z^2 - y^2 = a^2$.

3. (15) (Т) Нехогена парцијална једначина првог реда

У Београду 28.01.2008. Испит траје два сата.

СУ ЕТФ