Elektrotehnički fakultet
Beograd

PROBNI TEST IZ MATEMATIKE, 13. juni 2014.

Šifra zadatka: $\boxed{12151}$

Test ima 20 zadataka na 2 stranice. Zadaci 1-2 vrede po 3 poena, zadaci 3-7 vrede po 4 poena, zadaci 8-13 vrede po 5 poena, zadaci 14-18 vrede po 6 poena i zadaci 19-20 po 7 poena. Pogrešan odgovor donosi -10% od broja poena predviđenih za tačan odgovor. Zaokruživanje N ne donosi ni pozitivne ni negativne poene. U slučaju zaokruživanja više od jednog odgovora, kao i nezaokruživanja nijednog odgovora, dobija se -1 poen. Test se radi 180 minuta.

1. Za svako $a > 1$ vrednost sledećeg izraza $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$ je jednaka:

(A) $\sqrt{a^2-1}$ (B) $a-1$ (C) $2\sqrt{a(a-1)}$ $\boxed{\text{(D)}}$ $\sqrt{a-1}$ (E) a^2-1 (N) ne znam

2. Proizvod kvadrata rešenja jednačine $4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0$ jednak je:

(A) 0 $\boxed{\text{(B)}}$ 4 (C) 2 (D) $\frac{1}{4}$ (E) 5 (N) ne znam

3. Nejednakost $\frac{x+a}{x^2+x+1} < \frac{x}{x^2+2x+3}$ je tačna za svako x ako i samo ako je:

(A) $a < -2$ $\boxed{\text{(B)}}$ $a \le -1$ (C) $-1 < a < -\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ (E) $-\infty < a < +\infty$
(N) ne znam

4. Zbir rešenja jednačine $\frac{2b}{x-a} - \frac{b^2}{(x-a)\sqrt{x^2-2ax+a^2}} = 1$ $(a, b > 0)$ iznosi:

(A) $4a+4b$ (B) $2a+2b-b\sqrt{2}$ (C) $a+b$ (D) $3a+3b$ $\boxed{\text{(E)}}$ $3a+3b-b\sqrt{2}$ (N) ne znam

5. Prava $y = mx$, $(m > 0)$ seče krug $(x-1)^2+y^2 = 1$ u tačkama A i B. Ako je $AB = \sqrt{3}$, tada m pripada skupu:

(A) $(0, \frac{1}{6}]$ (B) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ $\boxed{\text{(C)}}$ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ (D) $(\frac{2}{3}, 1]$ (E) $(1, +\infty)$ (N) Ne znam

6. Osnova pravog paralelepipeda je paralelogram sa stranicama $a = 3cm$, $b = 8cm$ i uglom između njih $\gamma = 30^0$. Ako je površina omotača ovog tela $220cm^2$, zapremina iznosi (u cm^3):

(A) 60 (B) 240 (C) 180 (D) 150 $\boxed{\text{(E)}}$ 120 (N) Ne znam

7. Skup rešenja nejdnačine $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x+2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^x$ je skup $[a, b)$ takav da je proizvod $a \cdot b$ jednak:

(A) $+\infty$ (B) 2 (C) 0 (D) -2 $\boxed{\text{(E)}}$ -4 (N) ne znam

8. Broj rešenja jednačine $4\sin^2 x + 5\sin x + \cos 2x + 1 = 0$ u intervalu $(0, \pi)$ iznosi:

$\boxed{\text{(A)}}$ 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) bar 4 (N) ne znam

9. U jednakostranični trougao dužine stranice a upisan je krug, a zatim je konstruisan krug koji dodiruje dve stranice trougla i upisan krug. Poluprečnik konstruisanog kruga iznosi:

(A) $\frac{a}{27}\sqrt{3}$ (B) $\frac{a}{9}\sqrt{3}$ $\boxed{\text{(C)}}$ $\frac{a}{18}\sqrt{3}$ (D) $\frac{a}{9}$ (E) $\frac{a}{6}$ (N) Ne znam

10. Ako je $f(x+1) = \frac{x+1}{x-1}$, tada je skup rešenja nejednačine $f(x-3) > 3$ skup:

$\boxed{\text{(A)}}$ $(5, 6)$ (B) $(1, 5]$ (C) $(1, 6)$ (D) $(1, 3)$ (E) $(1, 4)$ (N) Ne znam

11. Rešenje (x, y) sistema jednačina $x^3 + 2x^2y - 3xy^2 = \frac{4}{3}$ i $(x-y)(x+y)^2 = \frac{32}{27}$ pripada pravoj:

(A) $y = \frac{1}{3}x + 1$ $\boxed{\text{(B)}}$ $y = \frac{1}{3}x$ (C) $y = \frac{1}{4}x$ (D) $y = \frac{1}{4}x - 1$ (E) $y = \frac{1}{4}x + 1$ (N) Ne znam

12. Koliko se četvorocifrenih brojeva može napisati koristeći cifre 1, 3, 5, 7, 9, takvih da se među ciframa bar jednom pojavljuje cifra 7?

(A) 8704 (B) 625 (C) 504 $\boxed{\text{(D)}}$ 369 (E) 96 (N)

13. U trouglu ABC je $\cos\angle B = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\angle C = -\frac{2}{3}$ i AC=6. Dužina stranice AB jeste:

(A) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{18\sqrt{7}}{7}$ $\boxed{\text{(C)}}$ $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (E) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (N) Ne znam

14. Zbir onih članova opadajuće beskonačne geometrijske progresije koji se nalaze na neparnim mestima iznosi 64, a zbir ostalih članova (tj. onih na parnim mestima) 16. Drugi član te progresije jednak je:

(A) 12 $\boxed{\text{(B)}}$ 15 (C) 6 (D) 3 (E) 18 (N) Ne znam

15. Naći član u razvoju $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ koji sadrži $x^{\frac{5}{2}}$ ako binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana u razvoju obrazuju aritmetičku progresiju.

(A) $35x^{\frac{5}{2}}$ $\boxed{\text{(B)}}$ $-35x^{\frac{5}{2}}$ (C) $21x^{\frac{5}{2}}$ (D) $-21x^{\frac{5}{2}}$ (E) $-7x^{\frac{5}{2}}$ (N) Ne znam

16. Skup rešenja nejednačine $log_x(2x - \frac{3}{4}) > 2$ jeste skup:

(A) $(\frac{3}{8}, 1)$ (B) $(\frac{3}{8}, +\infty)$ (C) $(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2})$ (D) $(\frac{3}{8}, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$ (E) $(\frac{3}{8}, 1) \cup (1, +\infty)$ (N) Ne znam

17. Kompleksnih brojeva $z = x + iy$, $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{R}$ za koje je tačna jednakost $z \cdot |z| + 4z + 5\overline{z} + 2i = 0$ ima:

(A) 0 $\boxed{\text{(B)}}$ 1 (C) 2 (D) 3 (E) više od tri ali konačno mnogo (N) Ne znam

18. Ako je broj $x = 2 - i$ rešenje jednačine $x^3 - 2x^2 - 3x + a = 0$ onda je broj a jednak:

(A) 10 $\boxed{\text{(B)}}$ -10 (C) 0 (D) 20 (E) -20 (N) Ne znam

19. Proizvod maksimuma i minimuma funkcije $f(x) = \cos 2x - 2\cos x + 3$ iznosi:

(A) 3 (B) 4 (C) 6 $\boxed{\text{(D)}}$ 9 (E) 12 (N) Ne znam

20. Skup svih rešenja nejednačine $log_{10}tgx + log_{10}tg2x \geq 0$ na segmentu $[-\pi, \pi]$ je oblika:

(A) $[a, b)$ $\boxed{\text{(B)}}$ $[a, b) \cup [c, d)$ (C) $(a, b] \cup (c, d] \cup (e, f]$ (D) $(a, b] \cup (c, d]$ (E) $(a, b) \cup (c, d)$ (N) Ne znam

REŠENJA NEKIH ZADATAKA PROBNOG TESTA.

1. Važi:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)\\
=&\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)\\
=&\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a-(a+1)}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{a-(a-1)}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)\\
=&\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{-1}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{1}\right):\left(\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}\right)\\
=&\left(-\sqrt{a}+\sqrt{a+1}+\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}\right)=\sqrt{a-1}.
\end{aligned}$$

2. Smenom $t=2^x$ data jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu: $t^2-6t+8=0$ čija su rešenja $t_1=4$ i $t_2=2$. Prema tome, iz jednakosti $2^{x_1}=4$ i $2^{x_2}=2$ dobijamo rešenja $x_1=2$, $x_2=1$. Odavde je ${x_1}^2x_2^2=4$.

3. Pošto za svako x važe nejednakosti: $x^2+x+1>0$ i $x^2+2x+3>0$ datu nejednakost možemo pomnožiti sa $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)$. Dobijamo:

$$(x+a)(x^2+2x+3)<x(x^2+x+1)\iff(a+1)x^2+2(a+1)x+3a<0.$$

Poslednja nejednakost je zadovoljena za svako x ako je $a+1<0$ i $(a+1)^2-3a(a+1)<0$, tj. $a<-1$. Primetimo da je poslednja nejednakost zadovoljena za svako x ako je $a=-1$. Prema tome, početna nejednakost je tačna za svako x ako je $a\le-1$.

4. Na osnovu $\sqrt{x^2-2ax+a^2}=\sqrt{(x-a)^2}=|x-a|$ posmatranu jednačinu možemo razmatrati u ekvivalentnom obliku: $\dfrac{2b}{x-a}-\dfrac{b^2}{(x-a)|x-a|}=1$, za $x\neq a$.

Uvedimo smenu $t=x-a$ i razmotrimo, za $t\neq0$, jednačinu: $\dfrac{2b}{t}-\dfrac{b^2}{t|t|}=1$, $\qquad(*)$

Razlikujemo slučajeve:

1°. $t=x-a>0$. U tom slučaju jednačina $(*)$ se svodi na: $\dfrac{2b}{t}-\dfrac{b^2}{t^2}=1\iff t^2-2bt+b^2=0$.
Odatle je $t_{1,2}=x-a=b$. Samim tim nalazimo dva rešenja $x_{1,2}=a+b$ polazne jednačine.

2°. $t=x-a<0$. U tom slučaju jednačina $(*)$ se svodi na: $\dfrac{2b}{t}+\dfrac{b^2}{t^2}=1\iff t^2-2bt-b^2=0$.
Odatle je $t_{3,4}=x-a=b\mp b\sqrt2$. Primetimo da $t_4=x-a=b+b\sqrt2>0$ nije rešenje[1] u ovom slučaju $(t<0)$. Samim tim iz $t_3=x-a=b-b\sqrt2<0$ nalazimo još jedno rešenje $x_3=a+b-b\sqrt2$ polazne jednačine.

Zbir svih rešenja polazne jednačine iznosi: $x_1+x_2+x_3=3a+3b-b\sqrt2$.

7. Važi: $\left(\dfrac15\right)^{\sqrt{x+2}}<\left(\dfrac15\right)^x\iff\sqrt{x+2}>x\quad(x\ge-2)$, jer je osnova $\dfrac15\in(0,1)$. Dalje rešavamo nejednačinu $\sqrt{x+2}>x$ razlikovanjem slučajeva:

1°. $x\in[-2,0)$, tada je nejednačina $\underbrace{\sqrt{x+2}}_{(\ge0)}>\underbrace{x}_{(<0)}$ trivijalno tačna.

2°. $x\ge0\wedge\sqrt{x+2}>x\iff x\ge0\wedge x^2-x-2<0\iff x\in[0,2)$.

Konačan odgovor: $x\in[-2,0)\cup[0,2)=[-2,2)=[a,b)$, tj. $a\cdot b=-4$.

---

[1] do istog zaključka se može doći i direktnom zamenom $x_4=a+b+b\sqrt2$ u polaznu jednačinu

8. Izvršimo niz transformacija posmatrane trigonometrijske jednačine:

$$\begin{aligned}
&4\sin^2 x + 5\sin x + \cos 2x + 1 \\
&= 4\sin^2 x + 5\sin x + (\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 \\
&= 3\sin^2 x + 5\sin x + \cos^2 x + 1 \\
&= 3\sin^2 x + 5\sin x + (1 - \sin^2 x) + 1 \\
&= 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Uvedimo smenu $t = \sin x$ pomoću koje se polazna jednačina svodi na kvadratnu jednačinu $2t^2 + 5t + 1 = 0$ sa rešenjima $t = -2$ ili $t = -\frac{1}{2}$. Vraćajući smenu polazna jednačina se svodi samo na jednačinu: $\sin x = -\frac{1}{2}$. Rešenja su $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ za $k \in Z$. Dakle broj rešenja posmatrane jednačine u intervalu $(0, \pi)$ iznosi 0.

11.

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2y - 3xy^2 = \frac{4}{3} \\ (x-y)(x+y)^2 = \frac{32}{27} \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^2 + 2xy - 3y^2) = x(x-y)(x+3y) = \frac{4}{3} \\ (x-y)(x+y)^2 = \frac{32}{27} \end{cases}$$

Iz jednačina ovog sistema se vidi da je $x \neq y$. Ako podelimo leve i desne strane prve i druge jednačine, dobijamo:

$$\frac{x(x+3y)}{(x+y)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{32}{27}} = \frac{9}{8} \Rightarrow 8x(x+3y) = 9(x+y)^2 = (x-3y)^2 = 0 \Rightarrow x = 3y$$

12. Traženi broj n možemo dobiti tako što ćemo od ukupnog broja 4-cifrenih brojeva napisanih pomoću cifara $1, 3, 5, 7, 9$ oduzeti broj 4-cifrenih brojeva napisanih pomoću cifara $1, 3, 5, 9$ (tj. bez ijedne cifre 7). Tako dobijamo $n = 5^4 - 4^4 = 625 - 256 = 369$.

17. Kako je $\bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, data jednačina se svodi na sistem

$$x\sqrt{x^2 + y^2} + 9x = 0, \quad y\sqrt{x^2 + y^2} - y + 2 = 0.$$

Prva jednačina je zadovoljena samo za $x = 0 (\in N_0)$. Za ovu vrednost x druga jednačina se svodi na jednačinu $y|y| - y + 2 = 0$. Za $y > 0$ dobijamo kvadratnu jednačinu $y^2 - y + 2 = 0$, koja nema realna rešenja; a za $y \leq 0$ dobijamo kvadratnu jednačinu $y^2 + y - 2 = 0$, čije je jedino negativno rešenje $y = -2$. Dakle, data jednačina ima jedno rešenje $z = 0 + (-2)i = -2i$.