TEST IZ SREDNJOŠKOLSKE MATEMATIKE

šifra zadatka: $\boxed{12345}$

Zadaci 1-2 vrede 3 poena, adaci 3-7 po 4 poena, zadaci 8-13 po 5 poena, zadaci 14-18 po 6 poena, i zadaci 19-20 po 7 poena. Pogrešan odgovor donosi −10% od broja poena za tačan odgovor. Zaokruživanje N ne donosi ni pozitivne ni negativne poene. U slučaju zaokruživanja više od jednog odgovora, kao i u slučaju nezaokruživanja ni jednog odgovora, dobija se −1 poen. Test se radi 180 minuta.

1. Vrednost izraza $\left(\left(\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4}$ jednaka je:

(A) 9/8 (B) 4 (C) 0 (D) 1 (E) 16/25 (N)

2. Ako je $a \cdot b \neq 0$ i $a \neq b$, izraz $\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+3\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a^3-b^3}{ab}$ jednak je izrazu:

(A) a^2+ab+b^2 (B) $a-b$ (C) $a+b$ (D) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ (E) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (N)

3. Neka je $M=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}$, tada broj M je jednak:

(A) 9 (B) 7 (C) $7-4\sqrt{2}$ (D) $9+4\sqrt{2}$ (E) $-3+4\sqrt{2}$ (N)

4. Zbir svih rešenja jednačine $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$ je:

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) −1 (E) −2 (N)

5. Ako je $\log_2(\log_3(\log_2 x))=1$, onda vrednost izraza $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ pripada intervalu:

(A) $(1,2)$ (B) $\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10}\right)$ (C) $\left(\frac{9}{10},1\right)$ (D) $\left(0,\frac{4}{1000}\right)$ (E) $\left(\frac{1}{2},1\right)$ (N)

6. Kompleksan broj z ima svojstvo da je $\mathrm{Re}(z)$ četiri puta veći od $\mathrm{Im}(z)$. Koliko je puta $\mathrm{Re}(z^2)$ veći od $\mathrm{Im}(z^2)$?

(A) 1.875 (B) 2.85 (C) 2.55 (D) 4.875 (E) 16 (N)

7. Neka su α i β oštri uglovi takvi da je $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ i $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Razlika $\alpha-\beta$ tih uglova je:

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{4}$ (E) $\frac{\pi}{3}$ (N)

8. Četvorocifrenih prirodnih brojeva u čijem se dekadnom zapisu pojavljuju tačno tri neparne cifre, ima:

(A) 2500 (B) 2750 (C) 2250 (D) 2625 (E) 2375 (N)

9. Neka je dat jednakokraki trapez sa dijagonalom ℓ i uglom α između te dijagonale i veće osnovice. Tada površina trapeza iznosi:

(A) $\ell^2\sin\alpha$ (B) $\ell^2\cos\alpha$ (C) $\ell^2\sin\alpha\cos\alpha$ (D) $\ell^2\sin 2\alpha$ (E) $\ell^2\cos 2\alpha$ (N)

10. Brojevi a_1,a_2,a_3 su tri uzastopna člana geometrijske progresije sa količnikom $q=2$, a brojevi a_2,a_3,a_4 su tri uzastopna člana aritmetičke progresije sa razlikom $d=6$. Zbir $a_1+a_2+a_3+a_4$ je:

(A) 39 (B) 38 (C) 37 (D) 36 (E) 35 (N)

11. Date su funkcije $f_1(x) = \frac{4x}{|x|}$, $f_2(x) = \frac{4}{x}\ln e^x$, $f_3(x) = \frac{\left(\sqrt{4x}\right)^2}{x}$ i $f_4(x) = 2^{\frac{2(x-1)}{x}+\frac{2}{x}}$. Tačan iskaz je:

(A) među datim funkcijama nema jednakih (B) $f_2 \neq f_3 = f_4 \neq f_1$ (N)
(C) $f_1 \neq f_2 = f_3 \neq f_4$ (D) $f_1 \neq f_2 = f_3 = f_4$ (E) $f_1 \neq f_2 = f_4 \neq f_3$

12. Ako je polinom $P(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + x^2 + b$ deljiv sa polinomom $Q(x) = (x-2)^2$, tada je $a^2 + b^2$ jednak:

(A) 13 (B) 17 (C) 16 (D) 20 (E) 10 (N)

13. Zbir celobrojnih rešenja nejednačine $x^2 - 4x \leq 5$ je:

(A) -5 (B) 10 (C) 5 (D) 14 (E) 0 (N)

14. Najmanji prirodan broj n takav da u razvoju binoma $(1+x)^n$ postoje dva susedna binomna koeficijenta C_n^k i C_n^{k+1} sa osobinom da $C_n^k : C_n^{k+1} = 7 : 15$ iznosi:

(A) $n = 21$ (B) $n = 6$ (C) $n = 11$ (D) $n = 17$ (E) $n = 35$ (N)

15. Ako je $5\left(\frac{1}{\text{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\text{ctg}^2\alpha}\right) + 219\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = 2006$ i $\pi/2 < \alpha < \pi$, onda je $\sin 2\alpha$ jednak:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (E) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ (N)

16. Bočna strana jednakokrakog trougla jednaka je 80 cm, a osnovna strana 90 cm. Rastojanje između cenra opisane i upisane kružnice iznosi:

(A) $\frac{110\sqrt{7}}{7}$ cm (B) $\frac{128\sqrt{7}}{7}$ cm (C) $9\sqrt{7}$ cm (D) $25\sqrt{7}$ cm (E) $\frac{16\sqrt{7}}{7}$ cm (N)

17. Ako su $y = ax + b$ i $y = cx + d$ jednačine tangenti iz tačke $A(2,0)$ na krug $x^2 + y^2 = 1$, onda je proizvod ac jednak:

(A) $3/2$ (B) $-3/2$ (C) $-1/3$ (D) $-5/7$ (E) -1 (N)

18. Neka telo nastaje rotacijom pravouglog trougla čije su katete $a = 2$ cm i $b = 3$ cm oko ose koja sadrži teme kod pravog ugla i paralelna je sa hipotenuzom. Zapremina posmatranog tela iznosi:

(A) $\frac{36}{\sqrt{13}}\pi$ cm^3 (B) $\frac{24}{\sqrt{13}}\pi$ cm^3 (C) $\frac{48}{13\sqrt{13}}\pi$ cm^3 (D) $\frac{108}{13\sqrt{13}}\pi$ cm^3 (E) $\frac{12}{\sqrt{13}}\pi$ cm^3 (N)

19. Jednačina $\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} = 2$

(A) ima tačno jedno rešenje (B) ima tačno dva rešenja (C) ima tačno tri rešenja
(D) ima beskonačno mnogo rešenja (E) nema rešenja (N)

20. Neka je S skup realnih brojeva x za koje važi:

$$2\log_{\cos x}\sin x \leq \log_{\sin x}\text{ctg}\,x \quad (0 < x < \pi).$$

Tada za neke brojeve a, b, c, d, e, f $(a < b < c < d < e < f)$, skup S je oblika:

(A) $[a, b)$ (B) $[a, b] \cup [c, d]$ (C) $(a, b) \cup (c, d)$
(D) $[a, b]$ (E) $(a, b) \cup (c, d) \cup (e, f)$ (N)

Rešenje testa iz srednjoškolske matematike (12345)

1. (D) Važi:

$$\left(\left(\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4}=\left(\left(\frac{3}{16}:\frac{25}{3}+\frac{1}{25}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4}$$
$$=\left(\left(\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{25}+\frac{1}{25}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4}=\left(\left(\frac{9}{400}+\frac{16}{400}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4}$$
$$=\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4}=\left(16^{1/4}-1\right)^{-4}=(2-1)^{-4}=1.$$

2. (E) Ako dati izraz označimo sa I, jednostavnim transformacijama dobijamo:

$$I = \frac{a^2+ab+b^2}{ab}\cdot\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{a^3-b^3}$$
$$= \frac{a^2+ab+b^2}{ab}(a-b)(a+b)\cdot\frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Napomena. Rezultat se može pogoditi metodom eliminacije. Ako su a i b dužine, rezultat ima prirodu recipročne vrednosti dužine. Prema tome, otpadaju odgovori ponuđeni pod (A), (B) i (C). S druge strane, ako u datom izrazu a i b promene mesta, izraz se ne menja, a to je slučaj sa izrazom pod (E).

3. (A) Važi:

$$M = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{3^2+3\cdot 2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}$$
$$= \frac{3-2\sqrt{2}}{1}+2\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3-2\sqrt{2}+2(3+\sqrt{2}) = 9.$$

4. (C) Ako jednačinu podelimo sa 2^{2x}, dobijamo:

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+6=0.$$

Ova kvadratna jednačina po $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ima dva rešenja:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}=\frac{3}{2}\implies x_1=1 \quad\text{i}\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}=\frac{2}{3}\implies x_2=-1.$$

Samim tim $x_1+x_2=0$.

5. (D) Važi:

$$\log_2\big(\log_3(\log_2 x)\big)=1\implies\log_3(\log_2 x)=2\implies\log_2 x=9\implies x=2^9.$$

Na osnovu toga je:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^9+1}=\frac{1}{512}+\frac{1}{513}<\frac{1}{500}+\frac{1}{500}=\frac{4}{1000}.$$

Dakle, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ pripada intervalu $\left(0,\frac{4}{1000}\right)$.

6. (A) Kompleksan broj z je oblika $z = 4a + ia$, za neko $a \in R\setminus\{0\}$. Tada na osnovu:

$$z^2 = (4a+ia)^2 = 15a^2 + i8a^2 \implies \mathrm{Re}(z^2) = 15a^2 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z^2) = 8a^2,$$

zaključujemo: $\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{\mathrm{Im}(z^2)} = \dfrac{15}{8} = 1.875$.

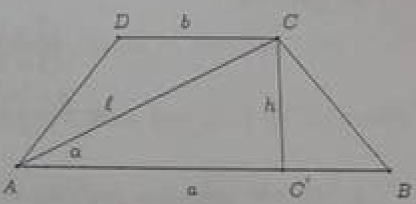
7. (D) Važi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)} \\
&= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1} = \frac{3}{3} = 1 \implies \alpha-\beta = \pi/4.
\end{aligned}$$

8. (E) Posmatrajmo najpre slučaj kada se na prvom mestu (hiljade) nalazi paran broj, a na ostala tri neparni brojevi. Pošto nula ne dolazi u obzir da bude prva cifra, tada dva/četiri/šest/osam biramo na četiri načina i ostale neparne brojeve biramo na pet načina. Takvih brojeva ima $4\cdot5\cdot5\cdot5$ (po principu proizvoda). Zatim posmatrajmo slučaj kada se na drugom ili trećem ili četvrtom mestu nalazi paran broj. U tom slučaju nula/dva/četiri/šest/osam se bira na pet načina i ostale neparne brojeve takođe biramo na pet načina. U svakom od ta 3 slučaja[1] javlja se po $5\cdot5\cdot5\cdot5$ brojeva (po principu proizvoda). Konačno, traženih brojeva ima:

$$4\cdot5\cdot5\cdot5 + 3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = (4+3\cdot5)\cdot5^3 = 19\cdot125 = 2375.$$

9. (C) Rešenje 1. Neka je dat jednakokraki trapez $ABCD$ veće osnovice $a = |AB|$, manje osnovice $b = |CD|$, dijagonale $\ell = |AC|$ i ugla $\alpha = \angle CAB$. Neka je $h = |CC'|$ visina iz temena C na osnovicu AB. Iz pravouglog trougla $\triangle AC'C$ sleduje:



$$h = |CC'| = \ell\sin\alpha \quad \text{i} \quad \frac{a+b}{2} = |AC'| = \ell\cos\alpha.$$

Samim tim površina P posmatranog trapeza iznosi:

$$P = \frac{a+b}{2}h = \ell^2\cos\alpha\sin\alpha.$$

Rešenje 2. Za proizvoljan četvorougao $ABCD$ sa dužinama dijagonala $d_1 = |AC|$, $d_2 = |BD|$ i uglom β između dijagonala površina se iskazuje sa formulom:

$$P = \frac{d_1d_2}{2}\sin\beta.$$

Specijalno u ovom zadatku $d_1 = d_2 = \ell$ i $\beta = 180^\circ - 2\alpha$. Odatle, površina P posmatranog trapeza iznosi:

$$P = \frac{\ell^2}{2}\sin(180^\circ-2\alpha) = \frac{\ell^2}{2}\sin 2\alpha = \ell^2\cos\alpha\sin\alpha.$$

10. (A) Pošto su a_1, a_2, a_3 uzastopni članovi geometrijske progresije sa količnikom $q = 2$, važi $a_2 = 2a_1$ i $a_3 = 4a_1$. Iz uslova da a_2, a_3, a_4 obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom $d = 6$, imamo $a_3 - a_2 = d = 6$, tj. $4a_1 - 2a_1 = 6$, odakle je $a_1 = 3$. Pored toga, nalazimo $a_4 = a_3 + d = 4a_1 + 6 = 18$. Dakle, brojevi a_1, a_2, a_3, a_4 su redom 3, 6, 12, 18, tako da je

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 + 6 + 12 + 18 = 39.$$

[1]kada se na drugom ili trećem ili četvrtom mestu nalazi paran broj

11. (E) Prvo određujemo domene posmatranih funkcija: $D_{f_1} = D_{f_2} = D_{f_3} = R \setminus \{0\}$ i $D_{f_4} = R^+$ (pretpostavljajući za kodomen da je skup realnih brojeva). Posle određivanja domena vršimo sređivanje analitičkih izraza za funkcije:

$$f_1(x) = 4\,\mathrm{sgn}\,x \;\; (x \neq 0), \quad f_2(x) = 4 \;\; (x \neq 0), \quad f_3(x) = 4 \;\; (x > 0) \quad \text{i} \quad f_4(x) = 4 \;\; (x \neq 0).$$

Konačan odgovor: $f_1 \neq f_2 = f_4 \neq f_3$.

12. (B) Rešenje 1. Deljenjem polinoma $P(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + x^2 + b$ sa polinomom $Q(x) = x^2 - 4x + 4$ nalazimo ostatak $R(x) = (12a - 12)x + (12 - 16a + b)$ koji se anulira za $a = 1$ i $b = 4$. Odatle: $a^2 + b^2 = 1^2 + 4^2 = 17$.

Rešenje 2. Iz činjenice da je $P(x) = Q(x) \cdot G(x) = (x-2)^2 \cdot G(x)$, za neki polinom $G(x)$ trećeg stepena, zaključujemo da je $x_0 = 2$ nula drugog reda polinoma $P(x)$. Odatle dobijamo sistem:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x_0) = x_0^5 - 3 \cdot x_0^4 + a \cdot x_0^3 + x_0^2 + b = 0 \\ P'(x_0) = 5 \cdot x_0^4 - 12 \cdot x_0^3 + 3a \cdot x_0^2 + 2 \cdot x_0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^4 + a \cdot 2^3 + 2^2 + b = -12 + 8a + b = 0 \\ P'(2) = 5 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^3 + 3a \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 12a - 12 = 0 \end{array} \right\}.$$

Samim tim $a = 1$ i $b = 4$. Odatle: $a^2 + b^2 = 1^2 + 4^2 = 17$.

13. (D) Koreni jednačine $x^2 - 4x - 5 = 0$ su $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, tako da je $-1 \leq x \leq 5$ rešenje nejednačine $x^2 - 4x - 5 \leq 0$. Celobrojna rešenja nejednačine su $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ i njihov zbir je 14.

14. (A) Iz uslova:

$$C_n^k : C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} : \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = 7 : 15$$

nalazimo:

$$\frac{k+1}{n-k} = \frac{7}{15} \implies n = \frac{22k + 15}{7}.$$

Uzimajući redom $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ nalazimo da je $k = 6$ prvi prirodan broj za koji je:

$$n = \frac{22k + 15}{7} = \frac{22 \cdot 6 + 15}{7} = \frac{147}{7} = 21 - \text{prirodan broj}.$$

Tako određen broj $n = 21$ je najmanji prirodan broj sa razmatranom osobinom.

15. (B) Data jednačina se može prikazati u obliku:

$$5\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 5\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 219\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 2006,$$

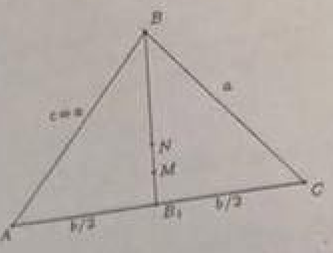
tj.

$$5\cos^4\alpha + 5\sin^4\alpha - 2006\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 219 = 0.$$

Kako je $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = 1 \implies \cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, poslednja jednačina se svodi na $2016\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 224$. Odatle:

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{9} \implies \sin^2 2\alpha = \frac{4}{9}.$$

Iz uslova $\pi/2 < \alpha < \pi$ sleduje $\pi < 2\alpha < 2\pi$, tako da je $\sin 2\alpha < 0$. Prema tome, iz gornje jednačine dobijamo $\sin 2\alpha = -2/3$.



16. (E) Neka je BB' visina jednakokrakog trugla $\triangle ABC$, kod koga je $a = c = 80$ (cm) i $b = 90$ (cm). Neka je $h = |BB'|$. Primetimo da je za jednakokraki trougao $B' = B_1$ sredina duži AC. Označimo sa M centar opisane kružnice poluprečnika R, a sa N centar upisane kružnice poluprečnika r. Tražena dužina je: $|NM| = |NB_1| - |B_1M| = |NB_1| - (|B_1B| - |BM|) = r - (h - R)$.

Visina h trougla je određena sa:

$$h = \sqrt{a^2 - (b/2)^2} = \sqrt{80^2 - (40)^2} = 25\sqrt{7} \text{ (cm)}.$$

Odatle dobijamo površinu trougka $P_\triangle = \frac{bh}{2} = \frac{25\sqrt{7} \cdot 90}{2} = 1125\sqrt{7}$ (cm^2), kao i poluprečnik opisane kružnice:

$$R = \frac{abc}{4P_\triangle} = \frac{80 \cdot 90 \cdot 80}{4 \cdot 1125\sqrt{7}} = \frac{128\sqrt{7}}{7} \text{ (cm)}.$$

Poluprečnik upisane kružnice iznosi:

$$r = \frac{P_\triangle}{s} = \frac{P_\triangle}{(a+b+c)/2} = \frac{1125\sqrt{7}}{250/2} = 9\sqrt{7} \text{ (cm)}.$$

Konačno:

$$|NM| = r - (h - R) = 9\sqrt{7} - \left(25\sqrt{7} - \frac{128\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{16\sqrt{7}}{7} \text{ (cm)}.$$

17. (C) Rešenje 1. Jednačine pravih koje prolaze kroz tačku $A(2,0)$ su date sa $y - 0 = k(x-2)$, tj. $kx + (-1)y + (-2k) = 0$. Uslov da prava dodiruje krug je da rastojanje centra $O(0,0)$ do prave bude jednako poluprečniku kruga $r = 1$, tj.

$$\frac{|k \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2k)|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \implies 3k^2 = 1 \implies k_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Samim tim za $a = k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $c = k_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ sleduje $ac = -\frac{1}{3}$.

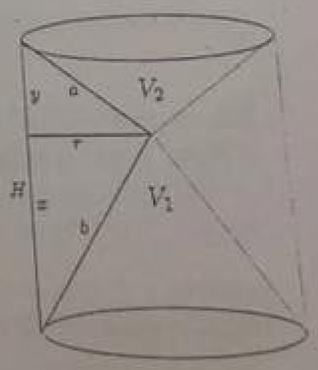
Rešenje 2. Jednačine pravih koje prolaze kroz tačku $A(2,0)$ su date sa $y - 0 = k(x-2)$, tj. $y = kx + (-2k)$. Krug $x^2 + y^2 = 1$ je specijalni slučaj elipse $x^2/a_0^2 + y^2/b_0^2 = 1$ sa poluosama $a_0 = b_0 = 1$. Uslov dodira prave $y = kx + n$ i elipse $x^2/a_0^2 + y^2/b_0^2 = 1$ je: $a_0^2k^2 + b_0^2 = n^2$. Na osnovu prethodnog, konkretno za $a_0 = b_0 = 1$ i $n = -2k$, nalazimo:

$$a_0^2k^2 + b_0^2 = n^2 \iff k^2 + 1 = 4k^2 \implies 3k^2 = 1 \implies k_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Samim tim za $a = k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $c = k_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ sleduje $ac = -\frac{1}{3}$.

18. (B) Rotacijom posmatranog trougla nastaje valjak zapremine V_0 iz koga su izvađene kupe zapremina V_1 i V_2. Zapremina posmatranog tela je:

$$V = V_0 - V_1 - V_2.$$



Neka je H visina valjka tada: $H = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$ (cm). Dalje, neka je r visina posmatranog trougla koja odgovara stranici H tj. temenu kod pravog ugla. Iz površine trugla $P_\triangle = \frac{ab}{2} = \frac{Hr}{2}$ sleduje $\frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{\sqrt{13}r}{2}$, odnosno $r = \frac{6}{\sqrt{13}}$ (cm).

Odatle zapremina valjka je:

$$V_0 = r^2 H\pi = \frac{36}{\sqrt{13}}\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Označimo sa x i y odsečke na stranici H koje gradi visina r. Duži x i y su redom visine kupa zapremina V_1 i V_2. Njihove dužine su:

$$x = \sqrt{b^2 - r^2} = 9/\sqrt{13} \text{ (cm)} \ \text{ i } \ y = H - x = 4/\sqrt{13} \text{ (cm)}.$$

Zapremine odgovarajućih kupa su:

$$V_1 = \frac{1}{3}r^2 x\pi = \frac{108}{13\sqrt{13}}\pi\,(\text{cm}^3) \quad \text{i} \quad V_2 = \frac{1}{3}r^2 y\pi = \frac{48}{13\sqrt{13}}\pi\,(\text{cm}^3).$$

Samim tim, zapremina obrtnog tela je:

$$V = V_0 - V_1 - V_2 = \frac{24}{\sqrt{13}}\pi\,(\text{cm}^3).$$

19. (D) Smenom $\sqrt{x+2} = u$, tj. $x + 2 = u^2$, dobijamo:

$$\sqrt{u^2+1+2u} + \sqrt{u^2+1-2u} = 2 \implies \sqrt{(u+1)^2} + \sqrt{(u-1)^2} = 2$$
$$\implies |u+1| + |u-1| = 2.$$

Odatle, na osnovu $u \geq 0$, dobijamo jednostavnu jednačinu:

$$u + 1 + |u - 1| = 2.$$

Posmatrajmo sledeća dva slučaja:

1°. $u > 1$. Tada imamo jednačinu $u + 1 + u - 1 = 2$, odakle je $u = 1$. Zbog uslova $u > 1$, u ovoj oblasti nema rešenja.

2°. $0 \leq u \leq 1$. Jednačina postaje $u + 1 - u + 1 = 2 \iff 2 = 2$ i zadovoljena je za svako u koje pripada segmentu $[0,1]$. Pošto je $x = u^2 - 2$, datu jednačinu zadovoljava svako x koje pripada segmentu $[-2,-1]$ (samo tada $u = \sqrt{x+2}$ pripada segmentu $[0,1]$). Prema tome, jednačina ima beskonačno mnogo rešenja.

20. (A) Nejednačina ima smisla ako je $\sin x > 0$ i $\cos x > 0$, pri čemu je $\sin x \neq 1$ i $\cos x \neq 1$. S obzirom da je u zadatku dato $x \in (0,\pi)$, tada na osnovu prethodnog, $x \in (0, \pi/2)$. Iz:

$$2\log_{\cos x}\sin x \leq \log_{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x}$$

zaključujemo:

$$2\log_{\cos x}\sin x \leq \log_{\sin x}\cos x - 1. \tag{1}$$

Uvedimo smenu $t = \log_{\cos x}\sin x$. Tada je $\log_{\sin x}\cos x = \frac{1}{t}$, čime nejednačina (1) se svodi na nejednačinu:

$$2t \leq \frac{1}{t} - 1 \iff \frac{2t^2+t-1}{t} \leq 0$$

sa rešenjem:

$$t \in (-\infty, -1] \cup (0, 1/2].$$

Posmatrajmo sledeća dva slučaja:

1°. $t \in (-\infty,-1]$. Iz $t = \log_{\cos x}\sin x \leq -1$ sleduje $\sin x \geq \frac{1}{\cos x}$ (osnova $\sin x \in (0,1)$). Tako dobijena nejednačina nema rešenja za $x \in (0, \pi/2)$.

2°. $t \in (0, 1/2]$. Tada iz $t = \log_{\cos x}\sin x \in (0,1/2]$ sleduje $0 < \log_{\cos x}\sin x \leq 1/2$. Samim tim:

$$\sqrt{\cos x} \leq \sin x < 1,$$

što kvadriranjem dovodi do nejednačine:

$$\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0.$$

Vodeći računa da polazna nejednačina ima smisla ako je $\cos x > 0$, prethodna nejednačina je tačna za:

$$0 < \cos x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \iff \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Konačan odgovor: $x \in [a, b)$, za $a = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ i $b = \frac{\pi}{2}$.