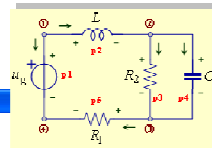


# Теорија електричних кола



```
ugMIR2LC.nb
In[1]- $Version
Out[1]- 7.0 for Microsoft Windows (32-bit) (February 18, 2009)
In[2]- resenje =
  DSolve[{i1[t] + i2[t] == 0, -i2[t] + i3[t] + i4[t] == 0,
    -i3[t] - i4[t] + i5[t] == 0, -u1[t] + u2[t] + u3[t] + u5[t] == 0,
    -u3[t] + u4[t] == 0, u1[t] == 12, u2'[t] == 1/2 * i2[t], u3[t] == 20 * i3[t],
    i4'[t] == 1/1000 * u4[t], u5[t] == 10 * i5[t]},
    {i1[t], i2[t], i3[t], i4[t], i5[t], u1[t], u2[t], u3[t], u4[t],
    u5[t]}, t] // Flatten;
In[3]- {u3[t] /. resenje // Expand} /. {x_?NumberQ} + T_ -> N[x] + T // Simplify //
  TraditionalForm
Out[3]/ TraditionalForm=
  72/600 (0.570024 c2 - 15.2125 c1) sin(sqrt(71) t / 600) + (-8.11371 c1 - 0.519208 c2) cos(sqrt(71) t / 600)
```



Користите само материјале које вам достави и препоручи предметни наставник у текућој школској години.

Дејан Тошић

# Једначине електричног кола

Постављање и решавање

# Једначине електричног кола

- *Математички модел кола* су једначине које пресликавају повезивање елемената (КЗ) и врсту елемената (ЈЕ)
- *Променљиве кола* су напони и струје грана (приступа)
- *Систем једначина кола* (СЈК) је скуп најмањег броја независних једначина из кога се могу одредити променљиве кола

# Број једначина кола

- Коло са  $b$  грана има  $2b$  променљивих:  
 $b$  струја и  $b$  напона
- Систем једначина кола има  $2b$  једначина
- Једначине елемената (ЈЕ) чине  $b$  једначина СЈК
- Кирхофови закони (КЗ) образују  $b$  једначина СЈК

# Једначине КЗ

- Једначина по Кирхофовим законима за струје (КЗС) има  $n$
- Једначина по Кирхофовим законима за напоне (КЗН) има  $m$
- Број грана стабла,  $n$ , је једнак броју једначина по КЗС
- Број спојница,  $m$ , је једнак броју једначина по КЗН

## Како постављамо КЗ?

- КЗС постављамо, обично, за све чворове осим једног
- КЗН обично постављамо за сва окца или за све главне (фундаменталне) контуре
- Постављању КЗ претходи усвајање смерова струја приступа (грана)
- Смерове напона усвајамо као стандардне

# Какав је састав једначина? (1)

- Посматраћемо временски-непроменљиве линеарне елементе
- КЗ су алгебарске једначине са коефицијентима  $+1$  или  $-1$
- Једначине резистивних елемената, као што су отпорник и зависни извори, су линеарне хомогене алгебарске једначине са константним коефицијентима

## Какав је састав једначина? (2)

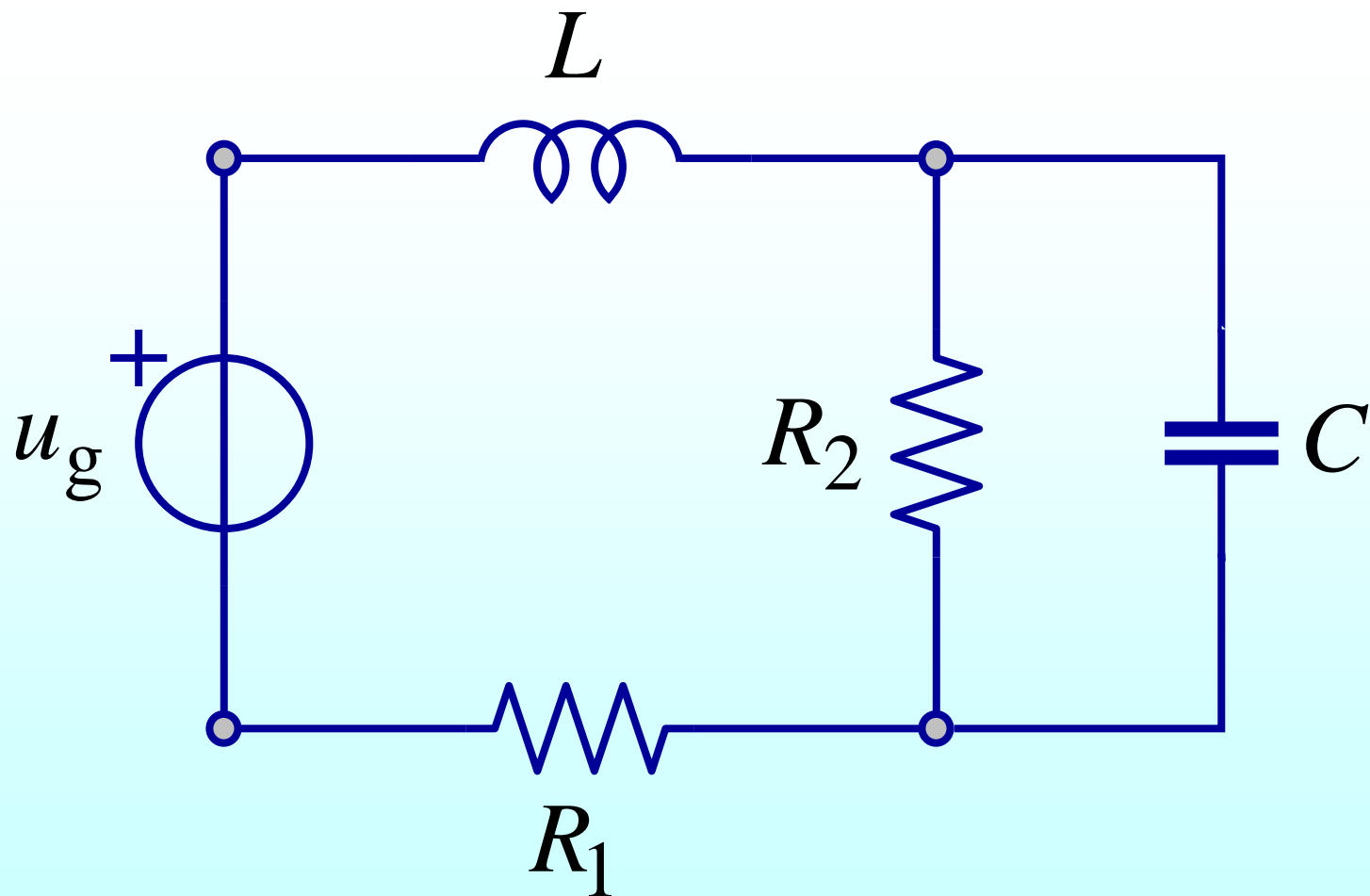
- Једначине кондензатора су линеарне хомогене **диференцијалне** једначине првог реда са константним коефицијентима
- Једначине калемова су линеарне хомогене **диференцијалне** једначине првог реда са константним коефицијентима



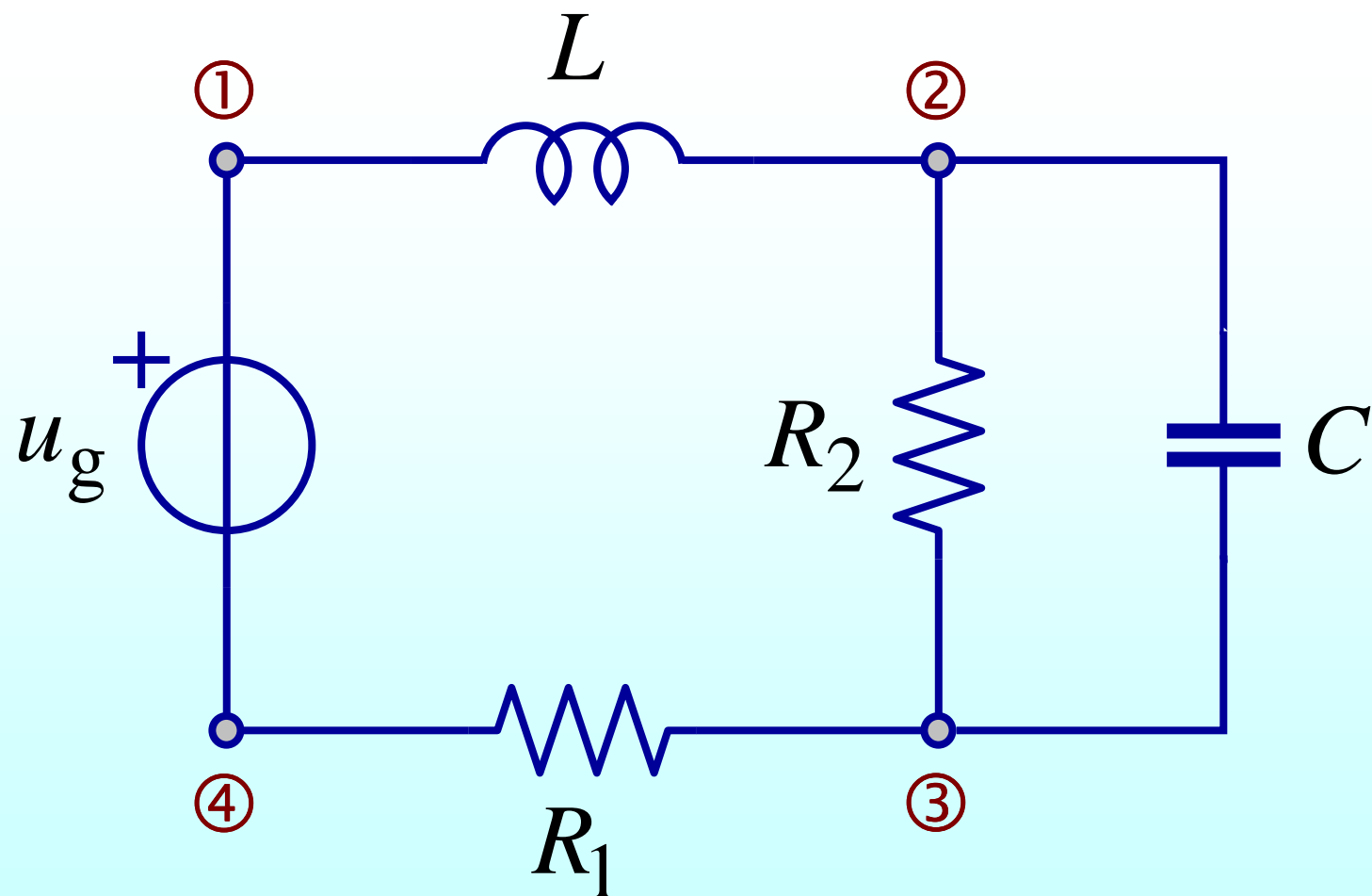
# СЈК је систем АДЈ

- Систем једначина кола (СЈК) је систем *алгебарско-диференцијалних једначина*
- СЈК решавамо на два основна начина:
  - 1) решавањем *система једначина стања*
  - 2) решавањем једне једначине по једној изабраној променљивој – *диференцијалне једначине одзива*
- Обновите решавање диференцијалних једначина из курсева математике!

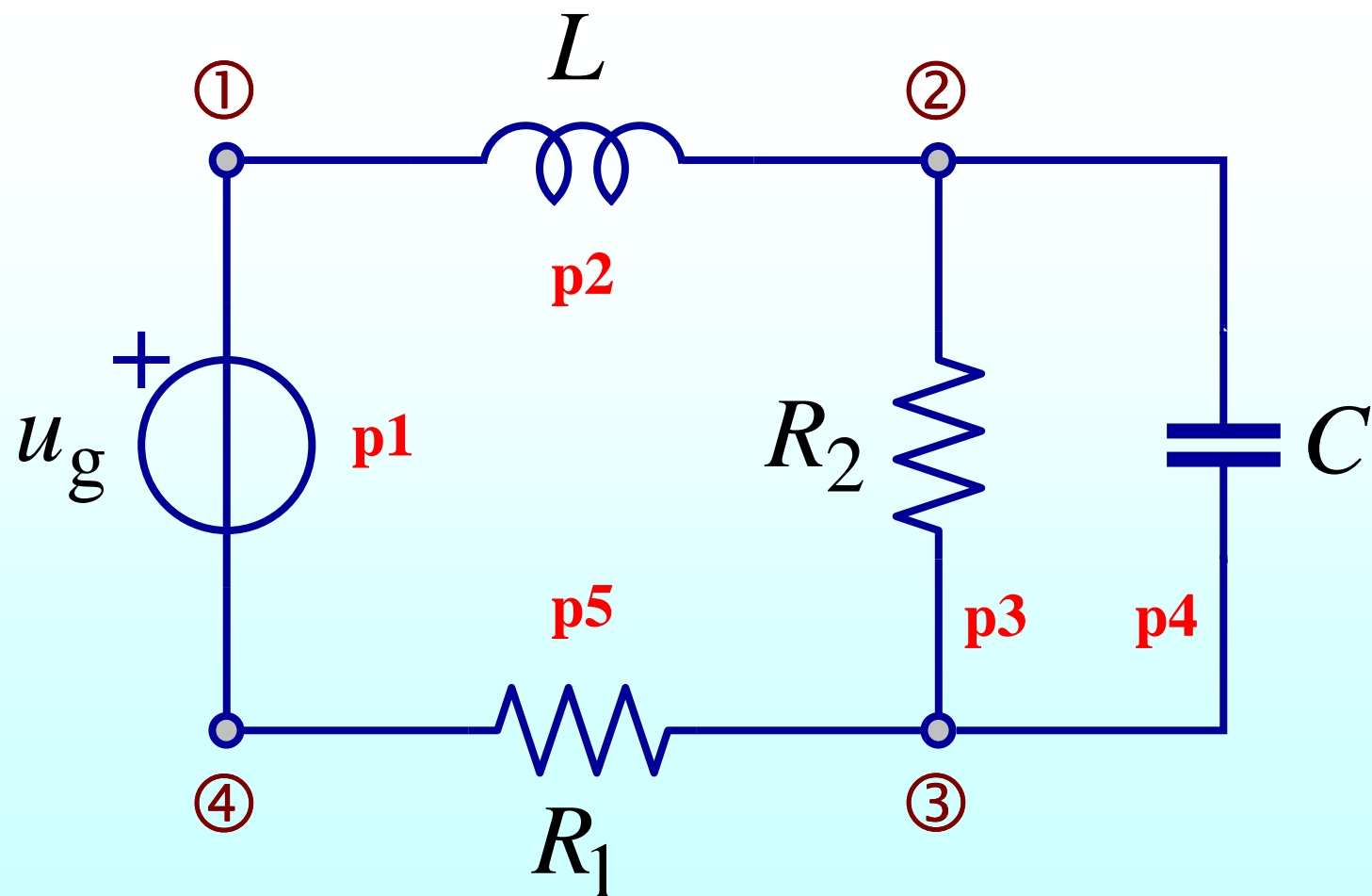
# Пример постављања СЈК



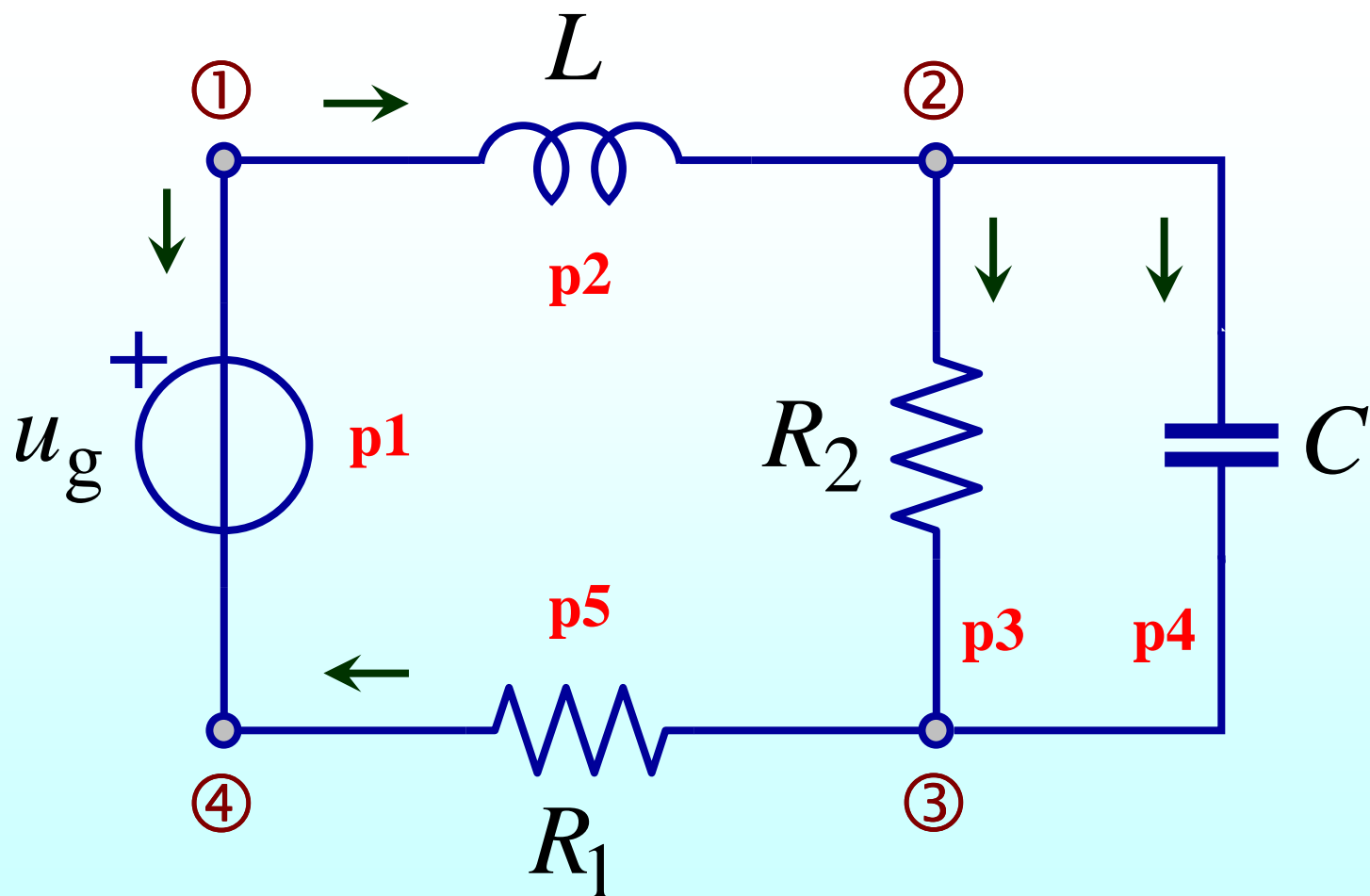
# Обележавање чворова



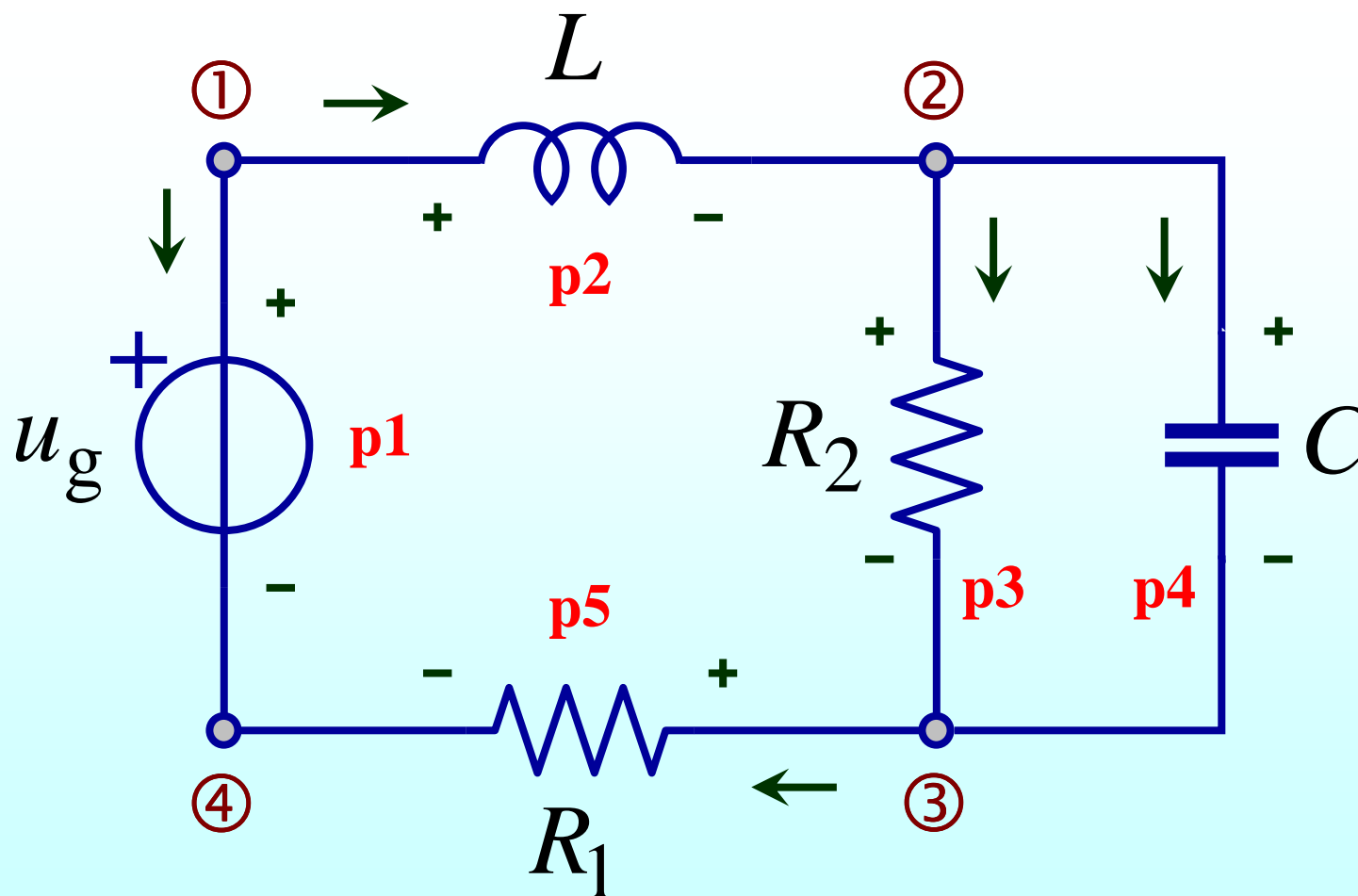
# Обележавање приступа



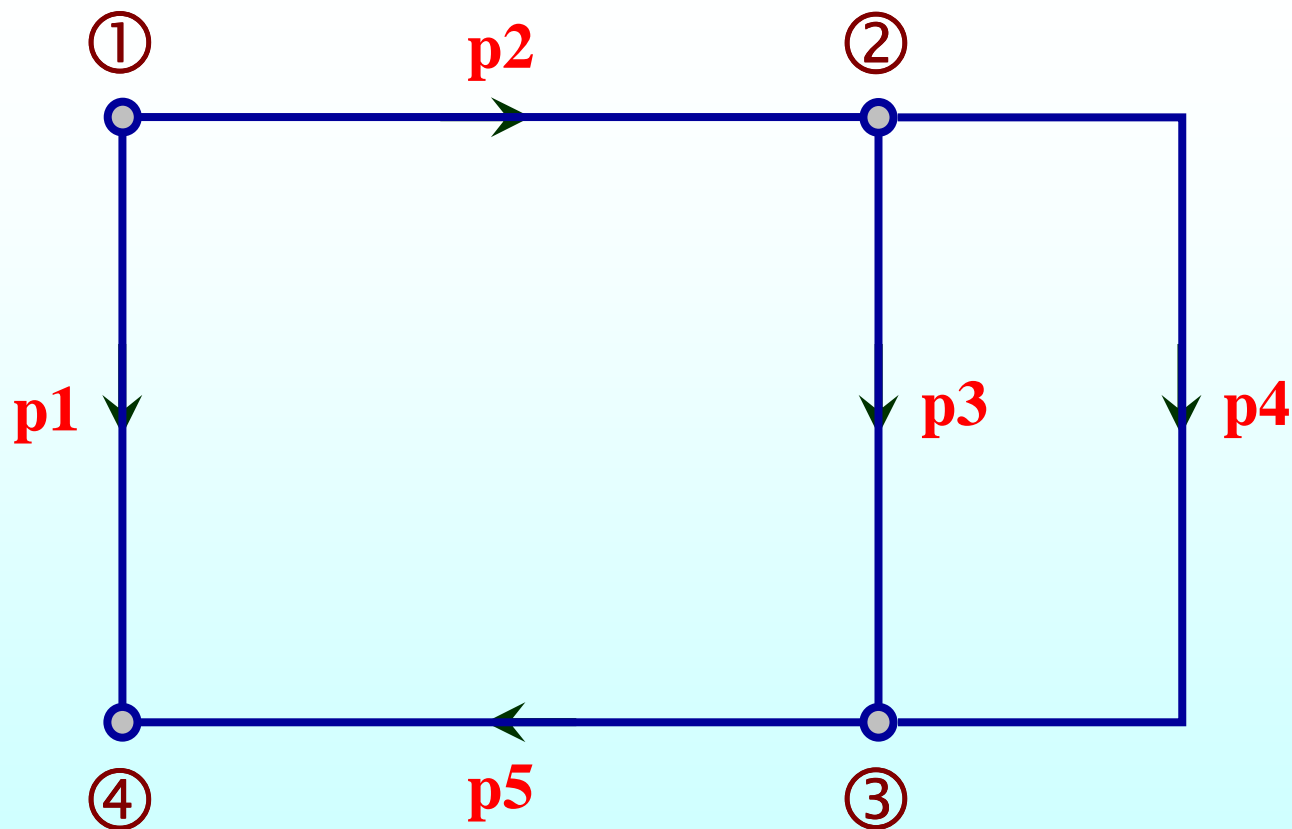
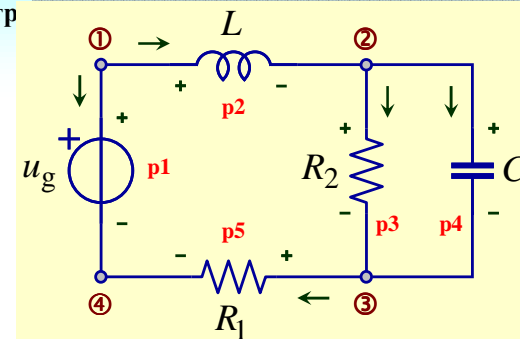
## Усвајање смерова струје



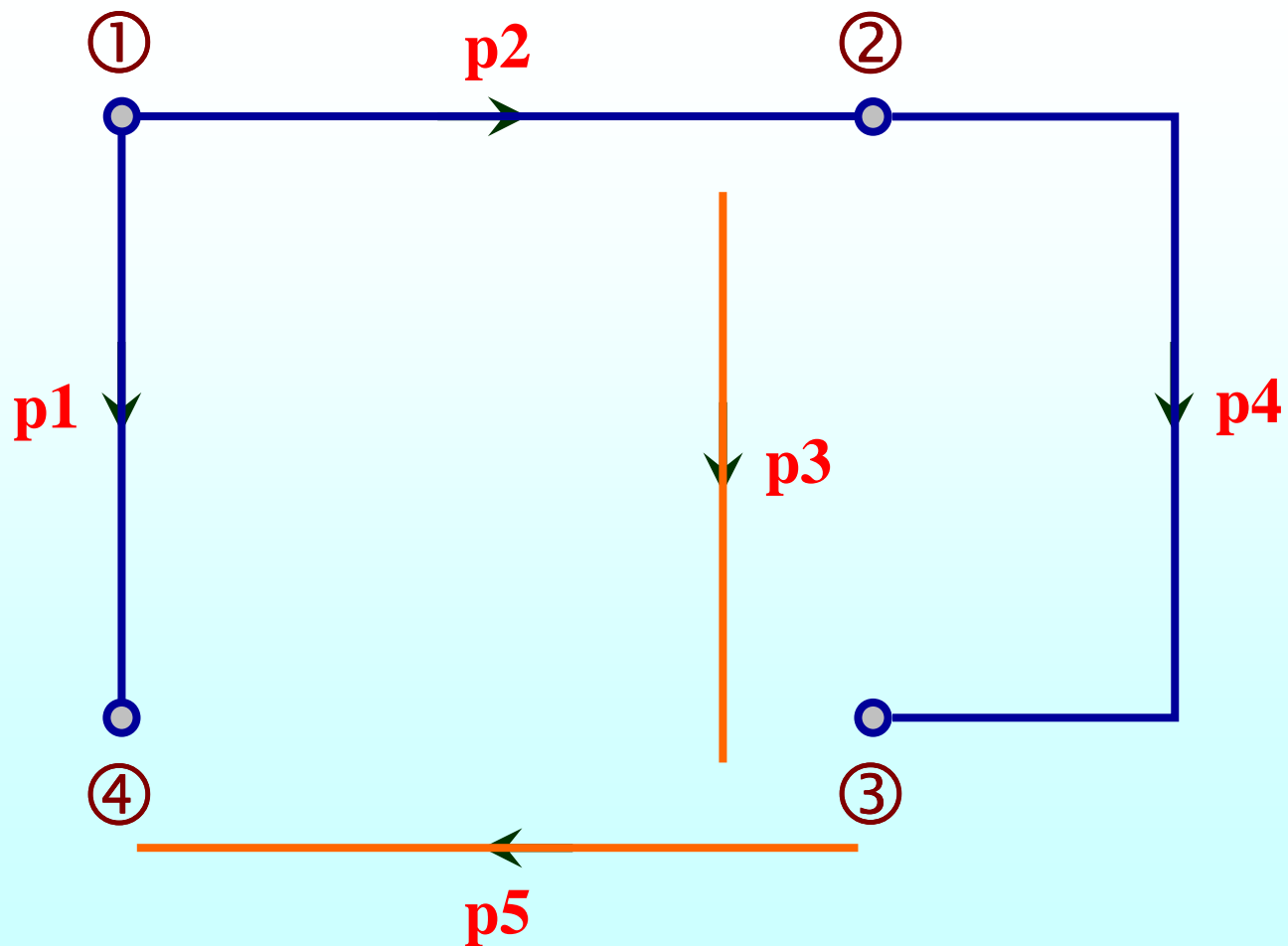
## Усвајање смерова напона



# Граф кола



# Стабло и спојнице



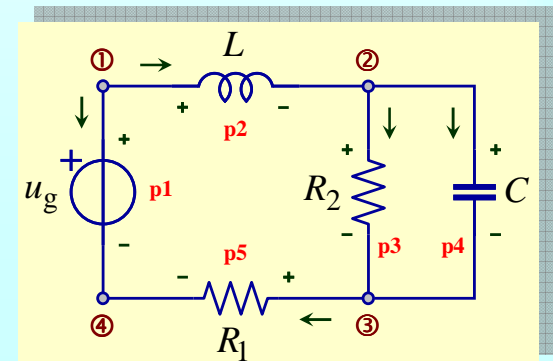


## Који су смерови пресека и контура?

- Чворни пресеци су усмерени од чвора: струја гране са смером од чвора улази у КЗС са плус предзнаком
- Контуре се усмеравају у правцу казаљке на сату: напон гране чији се смер поклапа са смером контуре улази у КЗН са плус предзнаком

# Пребрајање једначина

- Број грана је  $b = 5$
- Број променљивих је  $2b = 10$
- Број чворова је  $c = 4$
- Број грана стабла графа је  $n = c - 1 = 3$
- Број једначина КЗС је  $n = 3$
- Број спојница је  $m = b - n = 2$
- Број једначина КЗН је  $m = 2$



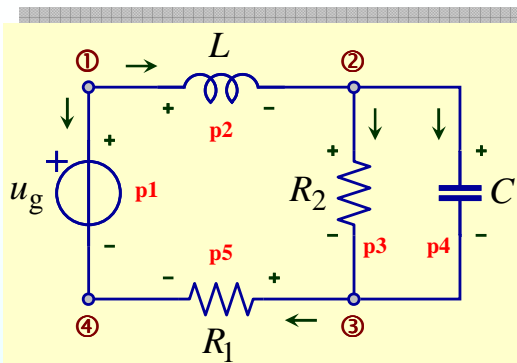
# Систем једначина кола

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$-i_3 - i_4 + i_5 = 0$$

**КЗС**



**КЗН**

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

$$-u_3 + u_4 = 0$$

$$u_1 = u_g$$

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt}$$

$$u_3 = R_2 i_3$$

$$i_4 = C \frac{du_4}{dt}$$

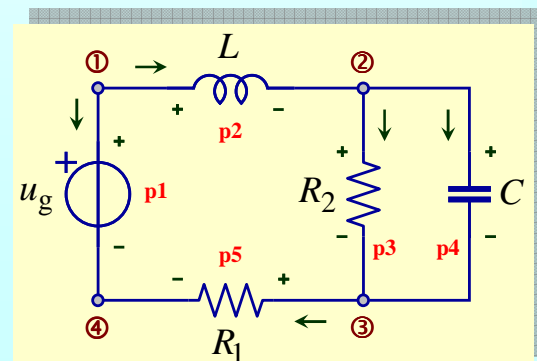
$$u_5 = R_1 i_5$$

**ЈЕ**

# Променљиве кола

$i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$

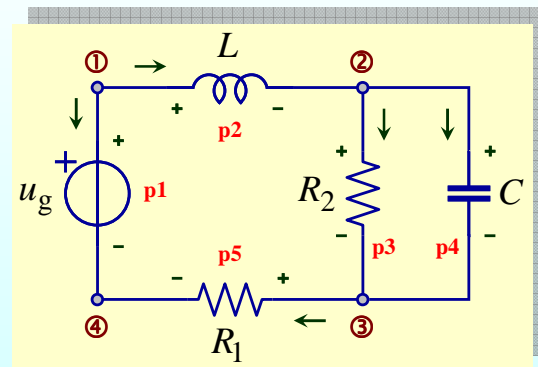
$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$



# Вредности елемената

$u_g$

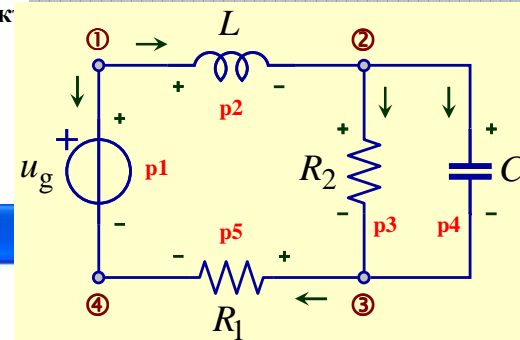
$C, L, R_1, R_2$



Напони и струје независних извора зову се *побуде, екситације, инпути* или *улази кола*

Вредности елемената који нису независни извори зову се *параметри кола*

# Mathematica



ugR1R2LC.nb

In[1]:= `$Version`

Out[1]= 7.0 for Microsoft Windows (32-bit) (February 18, 2009)

In[2]:= `resenje =`

```
DSolve[ { i1[t] + i2[t] == 0, -i2[t] + i3[t] + i4[t] == 0,
        -i3[t] - i4[t] + i5[t] == 0, -u1[t] + u2[t] + u3[t] + u5[t] == 0,
        -u3[t] + u4[t] == 0, u1[t] == 12, u2'[t] == 1/2 * i2[t], u3[t] == 20 * i3[t],
        i4'[t] == 1/1000 * u4[t], u5[t] == 10 * i5[t] },
        { i1[t], i2[t], i3[t], i4[t], i5[t], u1[t], u2[t], u3[t], u4[t],
        u5[t] }, t] // Flatten;
```

In[3]:= `(u3[t] /. resenje // Expand) /. {(x_?NumberQ) * y_ :> N[x] * y} // Simplify // TraditionalForm`

Out[3]//TraditionalForm=

$$e^{-7t/600} \left( (0.570024 c_2 - 15.2125 c_1) \sin\left(\frac{\sqrt{71} t}{600}\right) + (-8.11371 c_1 - 0.519208 c_2) \cos\left(\frac{\sqrt{71} t}{600}\right) \right)$$

# Функције побуде

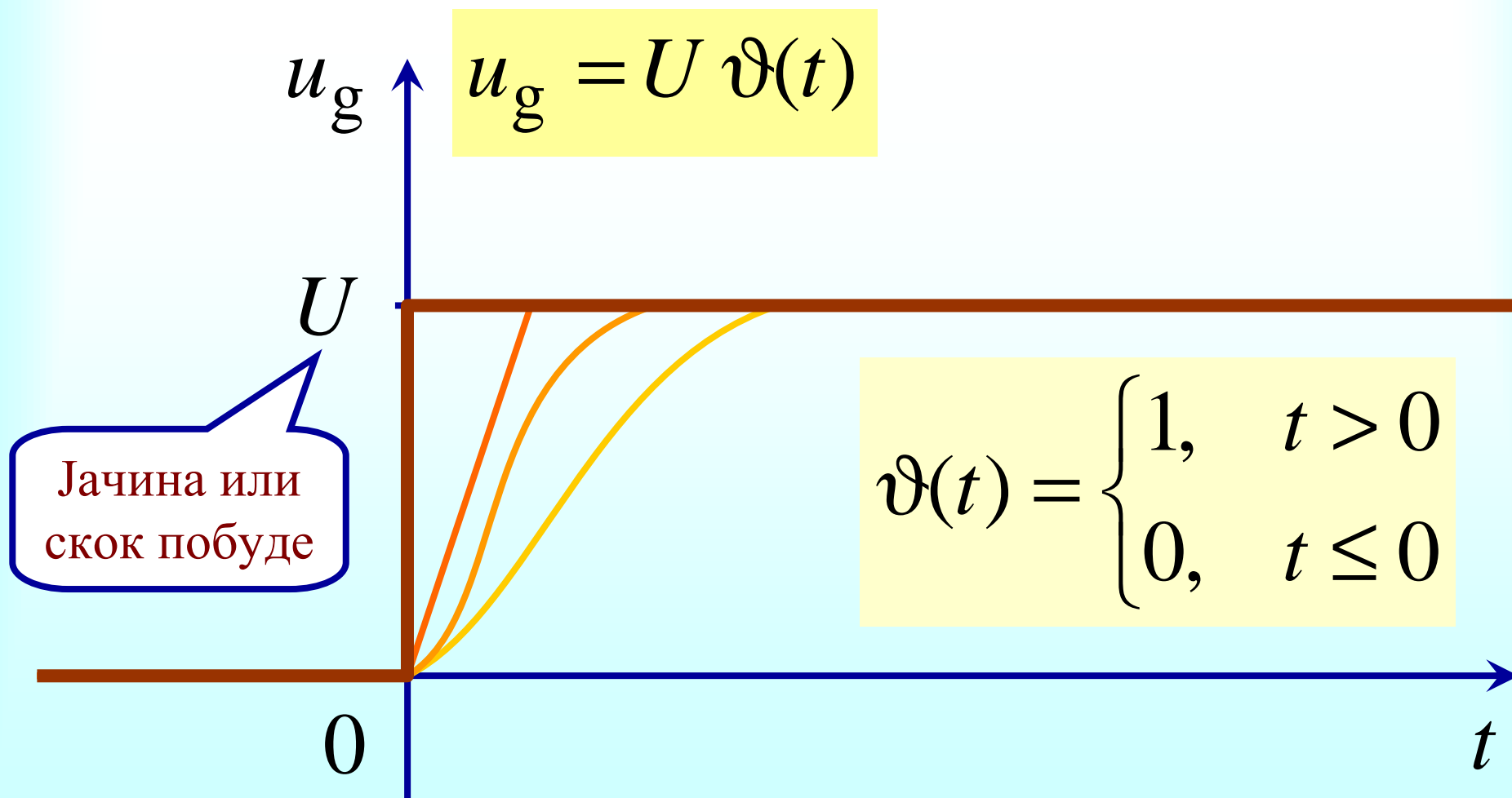
Одскочна и импулсна побуда

# Одскочна побуда

- ***Одскочна*** или ***Хевисајдова побуда*** је напон (или струја) који је константан за позитивно време а једнак нули за остале тренутке времена
- Одскочна побуда описује напон (или струју) који се од вредности нула за бесконачно кратко време успоставља на задату вредност



# Настанак одскочне побуде



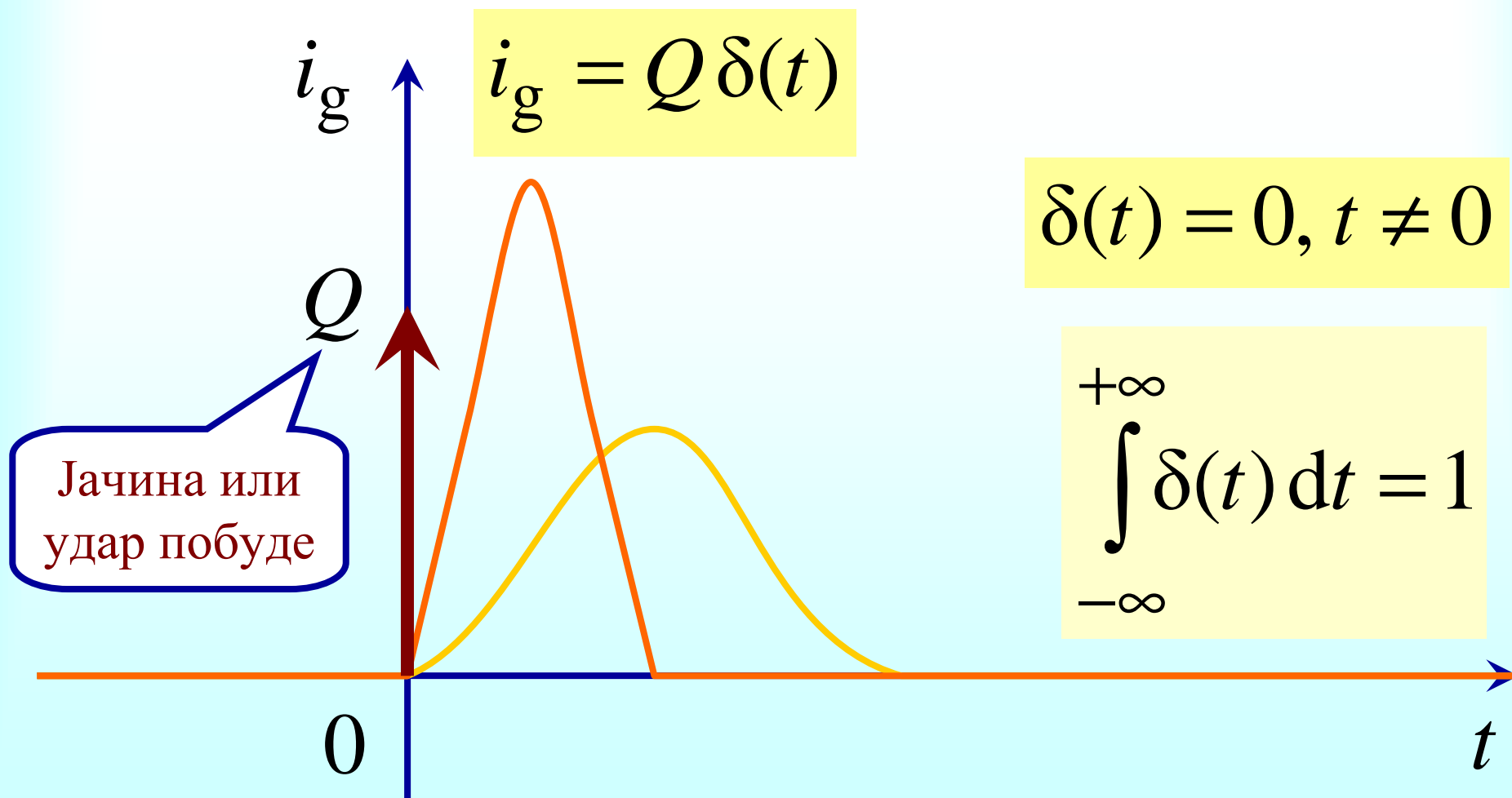
Одскочна побуда се обележава и са  $h(t)$

# Импулсна побуда

- *Импулсна* или *Диракова побуда* је напон (или струја) који бесконачно кратко траје а има коначан интеграл по оси времена
- Импулсна побуда описује процесе који се одигравају у занемарљиво малом интервалу времена у коме се практично тренутно размењује коначна енергија

Механичко тумачење: сила којом треба покренути предмет јединичне масе, који мирује, тако да предмет тренутно почиње да се једнолико креће јединичном брзином (а да важе закони класичне, Њутнове, механике).

# Настанак импулсне побуде



$$i_g = Q \delta(t)$$

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Јачина или удар побуде

# Делта функција као дистрибуција

- Јединична импулсна побуда се још назива и ***делта-функција***
- *Теорија дистрибуција и теорија генерализаних функција* су математичке области које се баве специјалним функцијама као што је импулсна побуда
- Користићемо ставове (теореме) за рад са делта-функцијом не улазећи у доказе

## Својства делта функције

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\int_{-a}^{+a} \delta(t) dt = 1, \quad a > 0$$

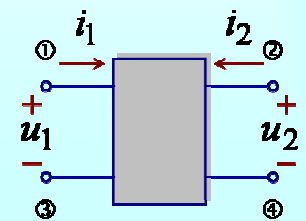
$$0\delta(t) = 0$$

$$f(t)\delta(t) = f(0^+)\delta(t)$$

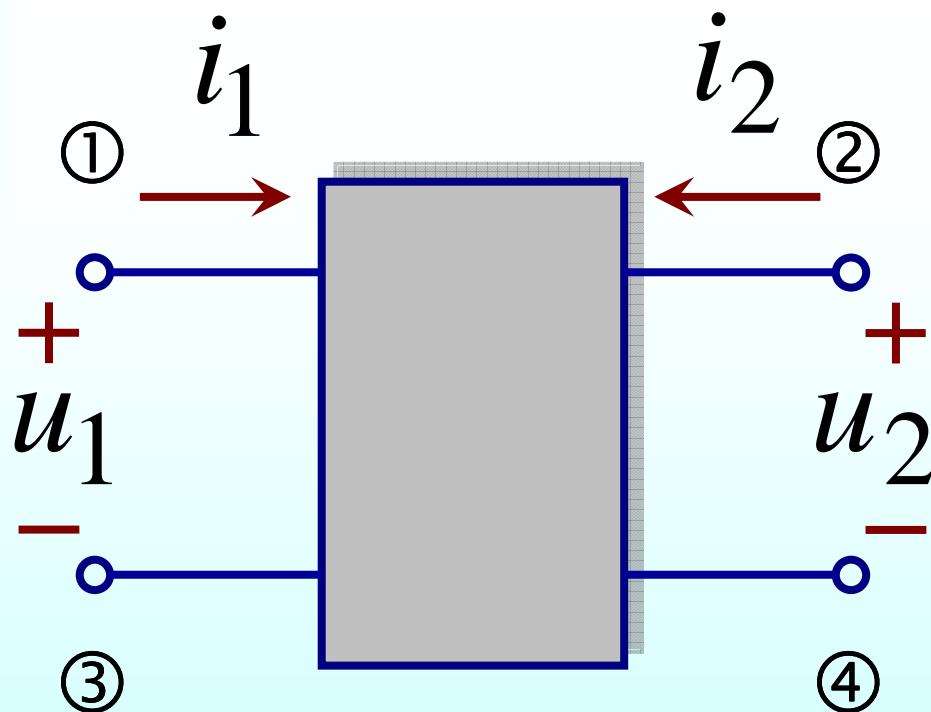
$f(t)$  је елементарна функција као што су полиноми, триг. функције, експ. и слично

# Четворополи

## Једначине и примена

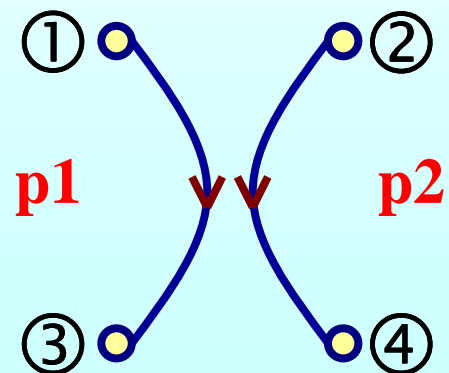


# Четворополи



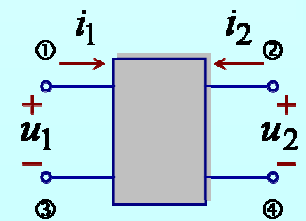
*Четворопол* или *двоприступна мрежа* је мрежа са четири краја који образују два приступа

Граф четворопола



# Отпорнички четворопол

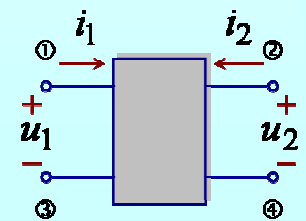
- **Отпорнички** или резистивни четворопол је двопрístupна мрежа сачињена од елемената описаних алгебарском везом напона и струје, као што су отпорници и зависни извори
- Посматраћемо четворополе у којима **нема** независних извора
- Проучићемо једначине четворопола



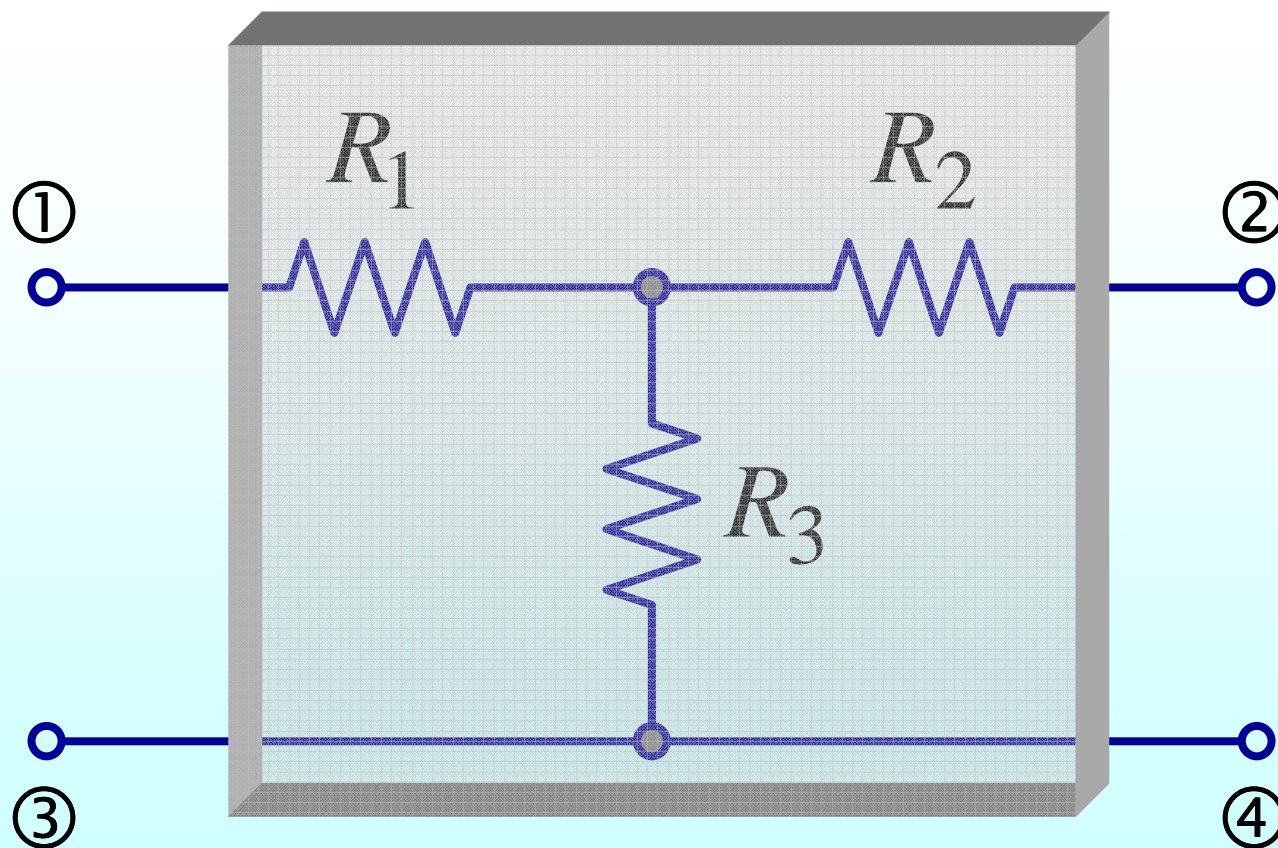


# Једначине четворопола

- На приступима четворопола постоје четири променљиве, 2 напона и 2 струје
- Две променљиве се могу одабрати и изразити преко преостале две
- Постоји шест система од две једначине који описују четворопол
- Посматраћемо отпорнички четворопол



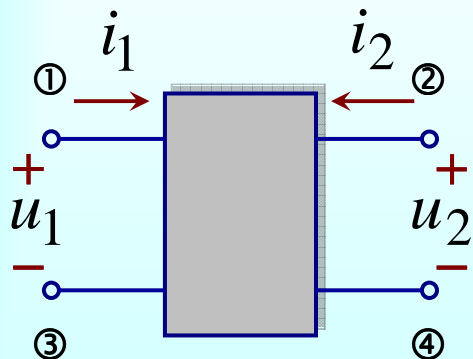
# Пример четворопола: Т-мрежа



## Једначине Т-мреже

$$u_1 = R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + R_3 (i_1 + i_2)$$



$$u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$

$$u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$

$$r_{11} = R_1 + R_3$$

$$r_{12} = R_3$$

$$r_{21} = R_3$$

$$r_{22} = R_2 + R_3$$

Једначине  $r$ -параметара

## Остале једначине четворопола

$$i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2$$

$$i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2$$

**g-параметри**

$$u_1 = a_{11}u_2 + a_{12}(-i_2)$$

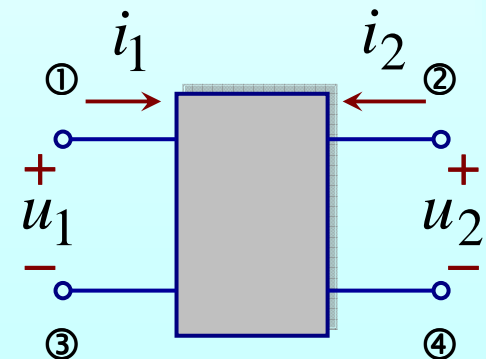
$$i_1 = a_{21}u_2 + a_{22}(-i_2)$$

**Погонски параметри**

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$

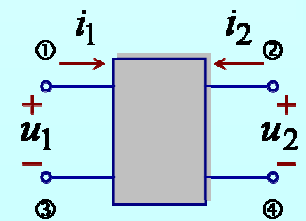
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$$

**Хибридни параметри**

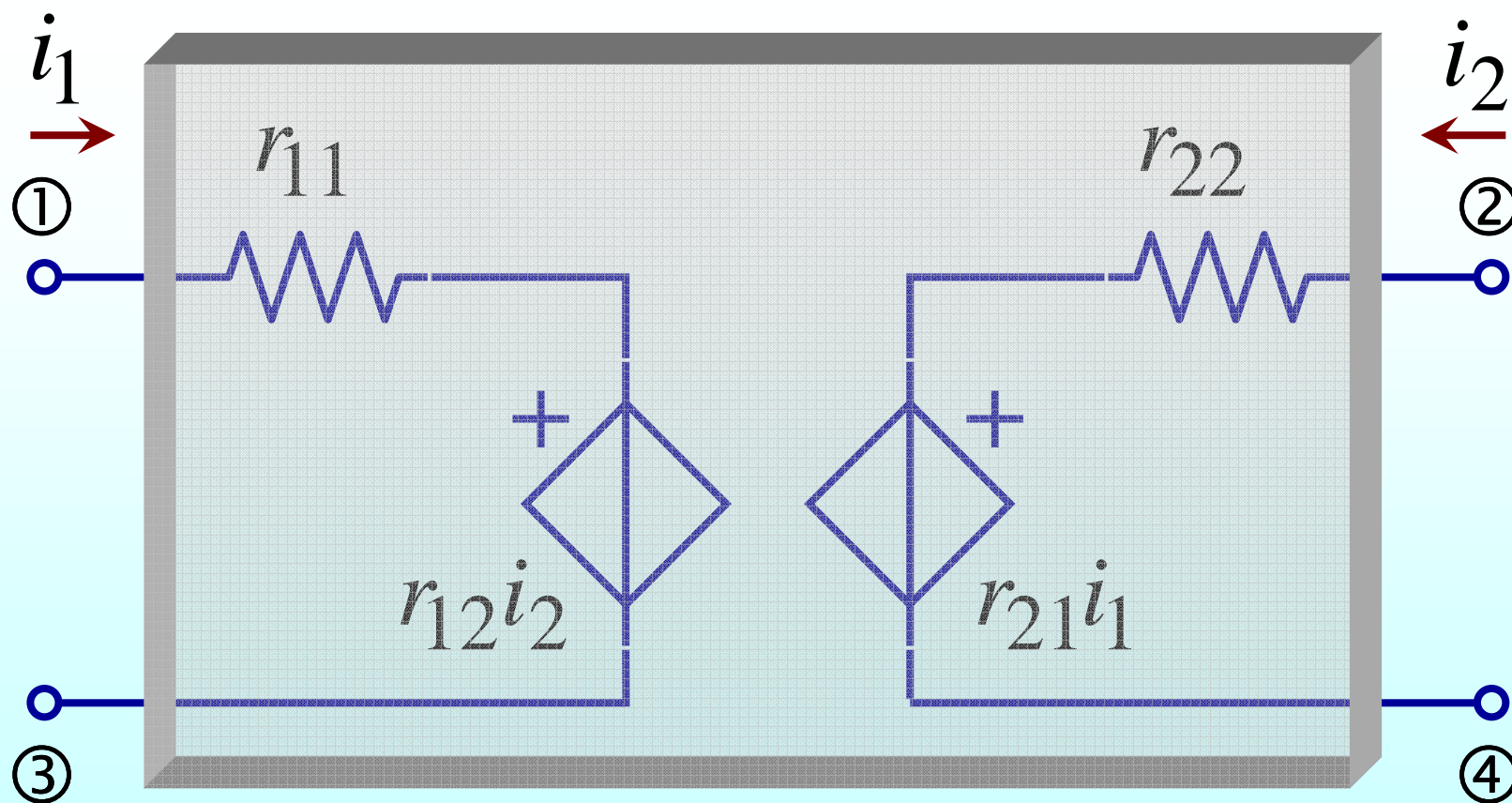


# Како одређујемо параметре четворопола?

- Претпоставимо да на приступима делују **извори** (независни генератори) који стварају напоне и струје приступа (ове изворе не цртамо на шеми)
- Поставимо **СЈК**, а **не** постављамо две једначине за претпостављене изворе
- **Уклонимо** све променљиве осим напона и струја приступа (добивемо две једначине)
- **Преуредимо** две добијене једначине на облик који одговара траженим параметрима
- **Препознамо** тражене параметре као коефицијенте у преуређеним једначинама

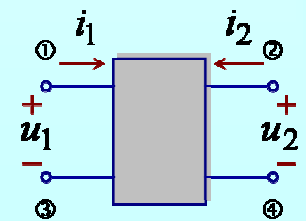


# Представљање четворопола



# Пасивност четворопола

- Отпорнички четворопол је **пасиван** ако је његова улазна снага **ненегативна**
- Из услова пасивности можемо одредити везу параметара, и обрнуто, на основу познатих параметара можемо испитати да ли је четворопол пасиван
- Четворопол сачињен од отпорника је пасиван
- Четворопол је **без губитака** ако је његова улазна снага **једнака нули**



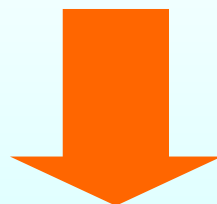
## Пример услова пасивности

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

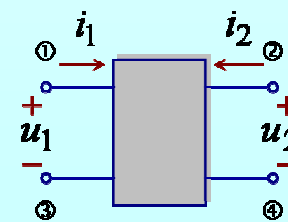
$$p = u_1i_1 + u_2i_2$$

$$p \geq 0$$



$$r_{11} \geq 0, \quad r_{22} \geq 0$$

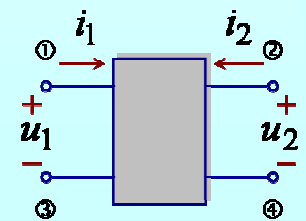
$$4r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2$$



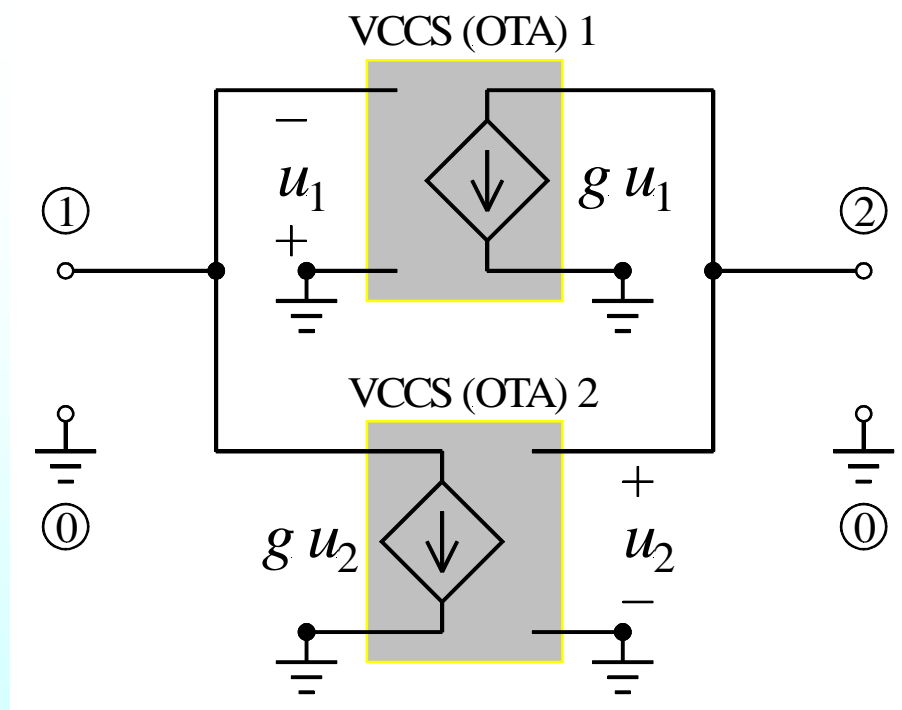


# Примена четворопола

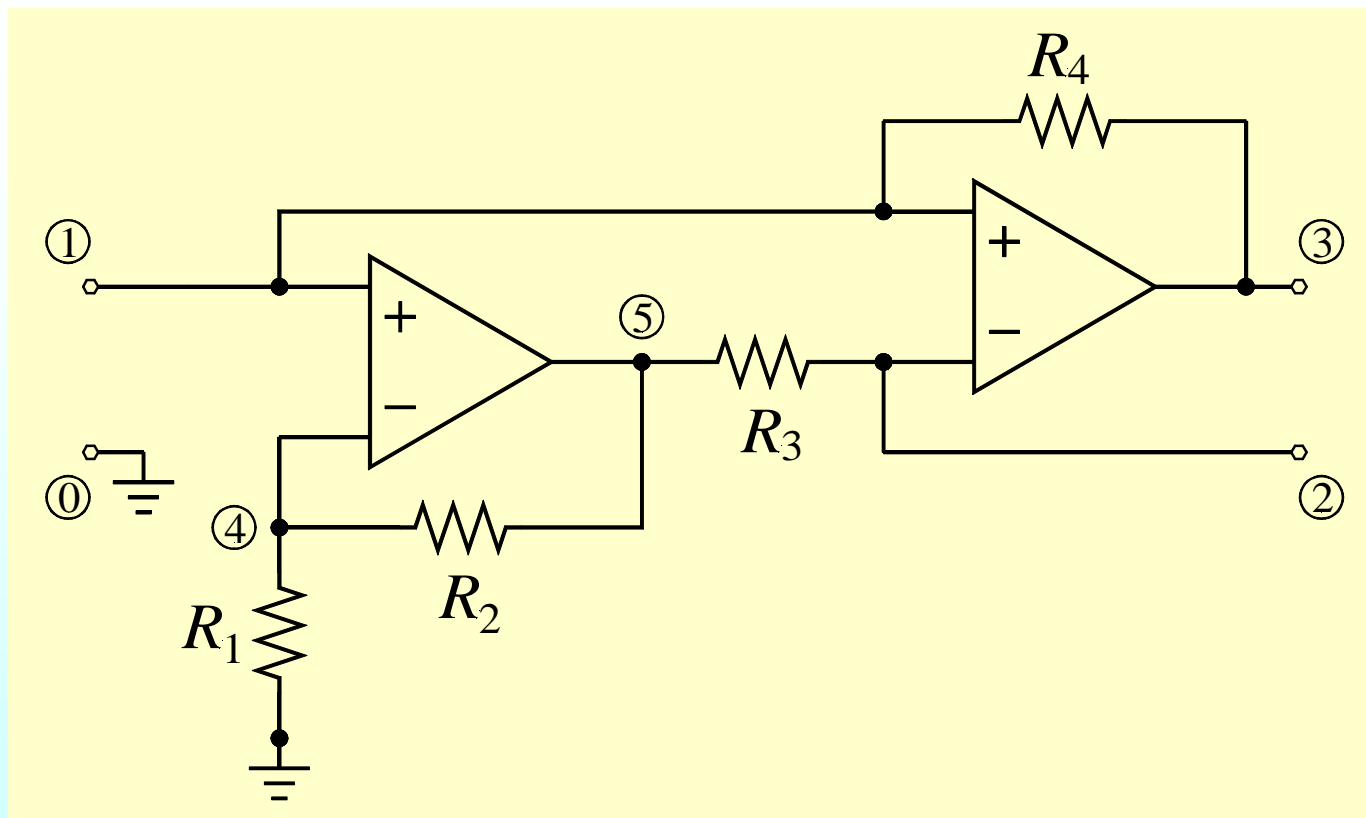
- Четворополе користимо у заменским шемама када део кола представљамо двопрístupном мрежом познатих параметара, на пример погонских
- Заменске шеме са четворополима дају прегледнију слику сложеног кола
- Четворополи обично представљају склопове или функционалне делове кола



# ОТА жиратор



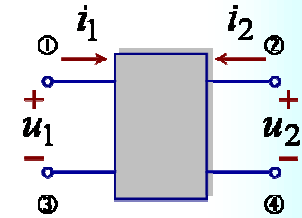
# Риорданов жиратор



# Питања (1)

- Шта су променљиве кола?
- Шта су једначине кола (систем једначина кола)?
- Колико има променљивих кола, једначина кола, једначина елемената, једначина КЗ, једначина КЗС, једначина КЗН?
- Какав је састав једначина кола (ког типа, облика, су једначине кола)?
- Шта је одскочна побуда?
- Шта је Диракова побуда?
- Која су својства делта-побуда?

## Питања (2)



- Шта је четворопол? Којим једначинама (параметрима) се он описује?
- Описати поступак за одређивање  $r$ -параметара четворопола.
- Како се може представити отпорнички четворопол помоћу зависних извора?
- Шта је пасиван четворопол? Извести услов пасивности преко  $r$ -параметара.
- Извести услов пасивности преко  $g$ -параметара.

# Задатак (1)

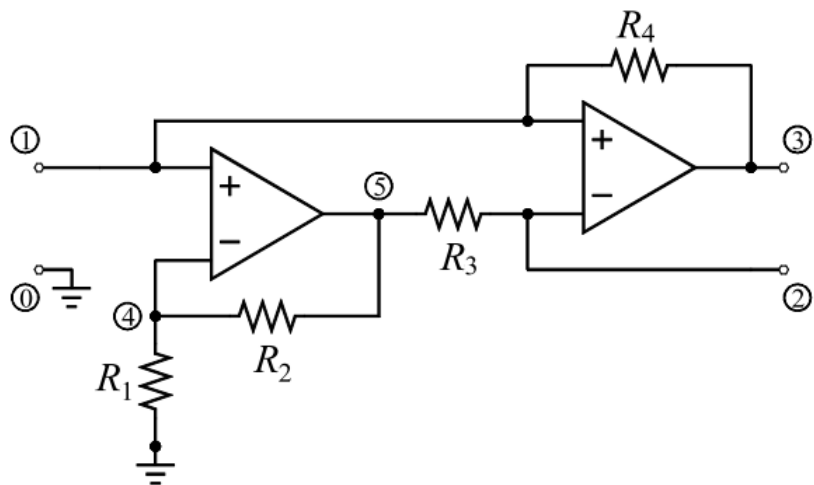
## Задатак 1

Отпорности отпорника електричне мреже са слике су  $R$ . Мрежа има два приступа (порта): први приступ чине крајеви ① и ④, а други приступ чине крајеви ② и ③.

(5) Одредити отпорничке параметре ( $r$ -параметре) мреже.

(5) Испитати да ли је мрежа пасивна.

(5) Испитати да ли је мрежа без губитака.



Отпорнички параметри ( $r$ -параметри) су

Да ли је мрежа пасивна? Образложити.

Да ли је мрежа без губитака? Образложити.

## Задатак (2)

### Задатак 1

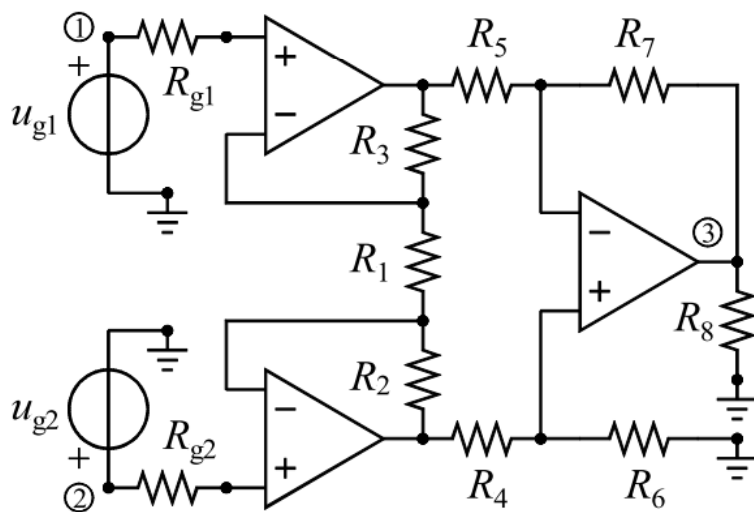
(5) Колико главних (фундаменталних) пресека има електрично коло са слике?

(5) Одредити напон  $v_3$  отпорника  $R_8$ ?

(5) Колика је снага извора?

Вредности елемената су познате.

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R.$$



Главних пресека има

Напон отпорника је

У задатку се анализира **инструментациони појачавач** који се користи у мерним електронским уређајима, као што су медицински апарати (ECG, Electrocardiogram).

Снага извора је

# Задатак (3)

## Задатак 1

(5) Колико главних петљи (фундаменталних контура) има електрично коло са слике?

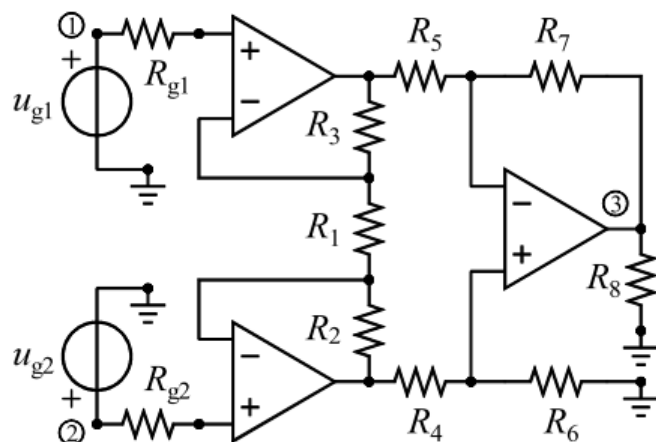
(5) Нацртати график напона  $v_3$  отпорника  $R_8$ ?

(5) Колика је снага отпорника  $R_8$  у тренутку  $t = T/2$ ?

Вредности елемената су познате.

$$u_{g1} = U h(t), \quad u_{g2} = U h(t-T), \quad T > 0, \quad U > 0,$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R.$$



Главних петљи има

График напона отпорника је

Снага отпорника је



## Задатак (4)

### Задатак 2

Поједностављена електрична шема аналогног електронског сабирача је приказана на слици. Вредности елемената су познате. Одредити

(5) број главних пресека и

(5) напон (потенцијал)  $v_4$ .

(5) Нацртати напон  $v_4$  у функцији времена ако су побуде  $u_{g1}(t) = U \vartheta(t)$ ,

$u_{g2}(t) = -2U \vartheta(t - T)$ ,  $u_{g3}(t) = U \vartheta(t - 2T)$ ,

$U > 0$ ,  $T > 0$ , и ако су отпорности свих отпорника једнаке  $R$ .

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Број главних пресека је

Напон (потенцијал)  $v_4$  је

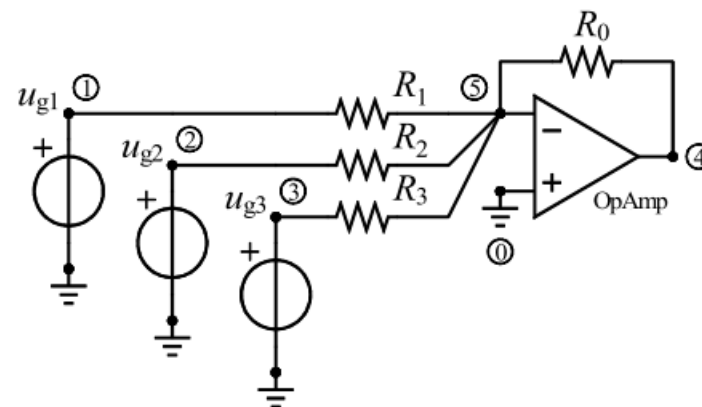


График напона  $v_4$  у функцији времена је

# Oliver Heaviside 1850–1925

"I do not refuse my dinner simply because I do not understand the process of digestion."



Један од највећих прегалаца модерне електротехнике и Теорије електричних кола. Увео је одскочну функцију. Рођен у Лондону, Уједињено Краљевство.

# Paul Dirac 1902–1984

"The aim of science is to make difficult things understandable in a simpler way."



Теоријски физичар. Добитник Нобелове награде.  
Увео је делта функцију. Рођен у Бристолу,  
Уједињено Краљевство.