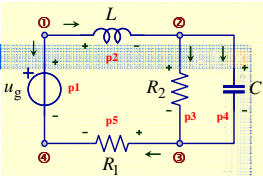


# Теорија електричних кола



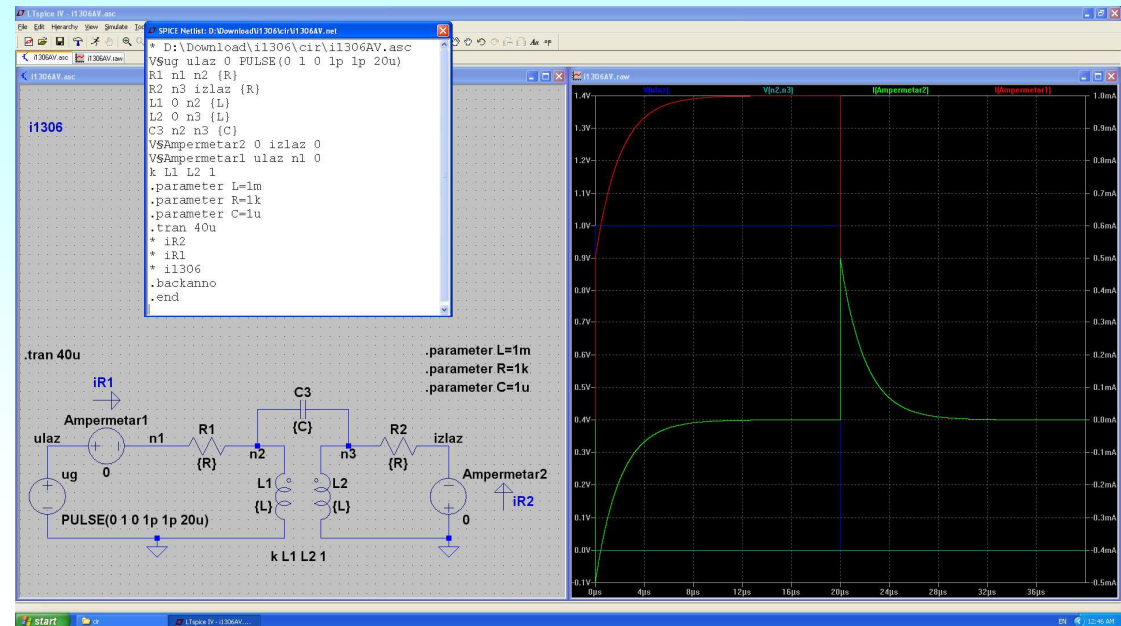
```
In[1]:= $Version
Out[1]= 7.0 for Microsoft Windows
(32-bit) (February 18, 2009)

In[2]:= resenje =
Solve[{i1 + i2 == 0, -i2 + i3 + i4 == 0, -i3 - i4 + i5 == 0,
-u1 + u2 + u3 + u5 == 0, -u3 + u4 == 0, u1 == u_g,
u2 == L * Di2, u3 == R2 * i3, i4 == C * Du4,
u5 == R1 * i5}, {Di2, Du4},
{i1, i3, i4, i5, u1, u2, u3, u5}] // Flatten;

In[3]:= Map[Expand, resenje, 2] // Column
Out[3]=
Di2 -> -i2 R1 / L - u4 / L + u_g / L
Du4 -> i2 / C - u4 / C R2
```

Користите само материјале које вам достави и препоручи предметни наставник у текућој школској години.

Дејан Тошић

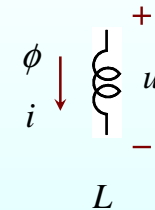
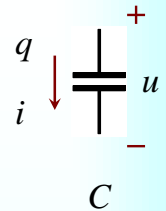


# Решавање у временском домену

Једначине стања и  
једначина одзива  
(Transient Analysis)

# Непрекидност струје калема и напона кондензатора

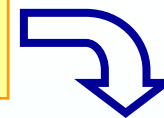
- **Напон кондензатора** је непрекидна функција времена ако је струја кондензатора ограничена функција времена
- **Струја калема** је непрекидна функција времена ако је напон калема ограничена функција времена
- Сва електрична кола која представљају моделе практичних система задовољавају ове ставове



# Напон кондензатора

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\forall t \quad |i_C(t)| < I_{\max}$$

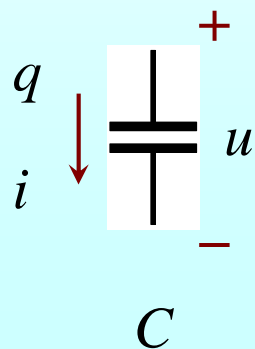


$$u_C(t_0^-) = u_C(t_0) = u_C(t_0^+)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

$$u_C(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} u_C(t)$$

$$u_C(-\infty) = 0$$

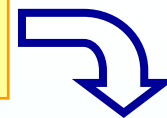


$$u_C(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} u_C(t)$$

# Струја калема

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

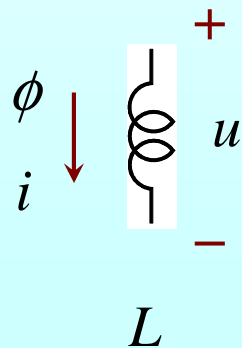
$$\forall t \quad |u_L(t)| < U_{\max}$$



$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0) = i_L(t_0^+)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$i_L(-\infty) = 0$$



Смерови за напоне и  
струје су стандардни  
(усаглашени)

# Сакупљена енергија

- Калем и кондензатор могу да **сакупљају** (акумулишу, нагомилавају) енергију

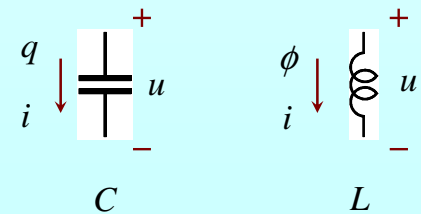
- Енергија калема се може изразити преко струје калема

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

- Енергија кондензатора се може изразити преко напона кондензатора

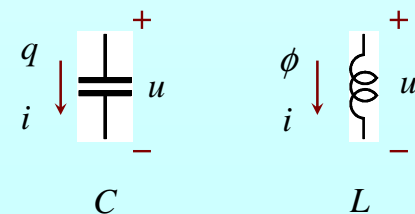
$$w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$$

- Калем и кондензатор се још називају **динамички елементи**



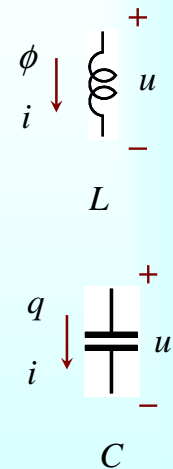
# Стање кола

- Струје калемова и напони кондензатора чине **стање кола**
- Напони кондензатора и струје калемова не могу да се тренутно промене ако у колу нема делта-импулса напона и струја
- Каже се да ове величине памте (меморишу) стање кола



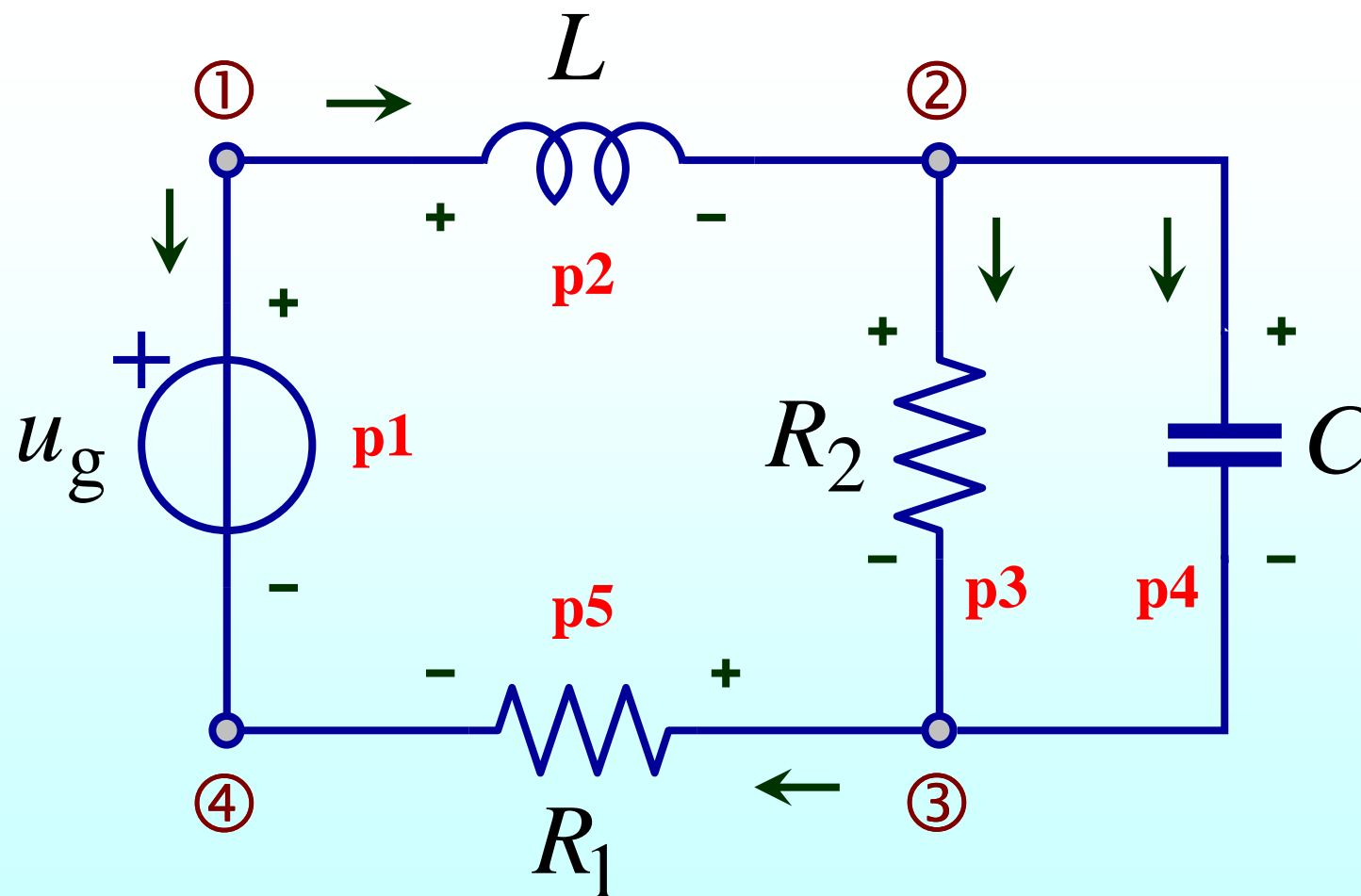
# Једначине стања

- **Једначине стања** су једначине кола по струјама калемова и напонима кондензатора, и побудама, написане у договореном облику (*Кошијева нормална форма*)
- Са **леве** стране једнакости је **први извод** струје калема или напона кондензатора
- Са **десне** стране једнакости су **алгебарски** чланови струја калемова, напона кондензатора и **побуда** (струја и напона извора)





# Пример једначина стања кола

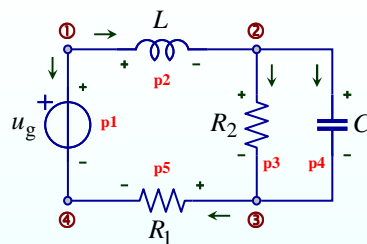


# Систем једначина кола

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$-i_3 - i_4 + i_5 = 0$$



$$u_1 = u_g$$

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt}$$

$$u_3 = R_2 i_3$$

$$i_4 = C \frac{du_4}{dt}$$

$$u_5 = R_1 i_5$$

Уклонимо све променљиве осим струје калема и напона кондензатора

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

$$-u_3 + u_4 = 0$$

ugR1R2LCjs.nb

In[1]:= \$Version

Out[1]= 7.0 for Microsoft Windows  
(32-bit) (February 18, 2009)

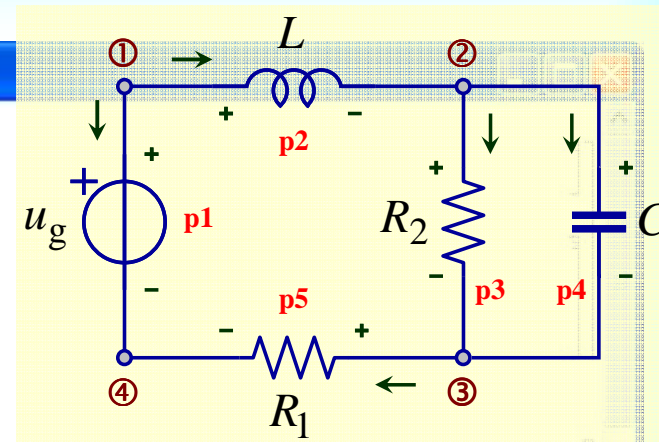
In[2]:= resenje =

```
Solve[{i1 + i2 == 0, -i2 + i3 + i4 == 0, -i3 - i4 + i5 == 0,
      -u1 + u2 + u3 + u5 == 0, -u3 + u4 == 0, u1 == ug,
      u2 == L * Di2, u3 == R2 * i3, i4 == C * Du4,
      u5 == R1 * i5}, {Di2, Du4},
      {i1, i3, i4, i5, u1, u2, u3, u5}] // Flatten;
```

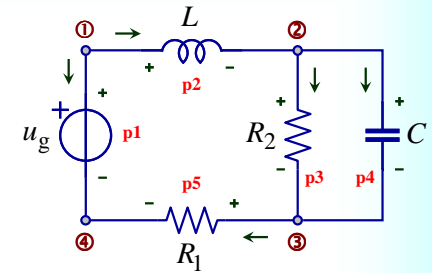
In[3]:= Map[Expand, resenje, 2] // Column

Out[3]=

$$Di2 \rightarrow -\frac{i2 R1}{L} - \frac{u4}{L} + \frac{ug}{L}$$

$$Du4 \rightarrow \frac{i2}{C} - \frac{u4}{C R2}$$


# Једначине стања



$$\begin{cases} \frac{di_2}{dt} = \frac{-R_1}{L} i_2 - \frac{1}{L} u_4 + \frac{1}{L} u_g \\ \frac{du_4}{dt} = \frac{1}{C} i_2 - \frac{1}{CR_2} u_4 \end{cases}$$

Једначине стања у  
матричном облику

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} u_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Ред кола

- Једначине стања у општем случају чине нехомоген систем линеарних диференцијалних једначина првог реда са константним коефицијентима
- *Ред кола* је број диференцијалних једначина у систему једначина стања
- Ред кола је једнак или мањи од броја динамичких елемената

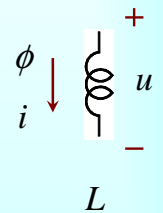
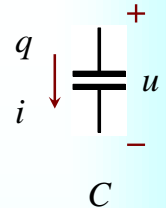
## Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

- Ако постоје алгебарске једначине у којима се појављују само струје калемова, или напони кондензатора, или побуде, ред кола ће бити мањи од броја динамичких елемената
- Ред кола је једнак разлици броја динамичких елемената и броја оваквих алгебарских једначина

$$\sum K_1 i_L + K_2 u_C + K_3 u_g + K_4 i_g = 0$$

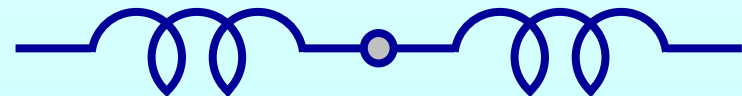
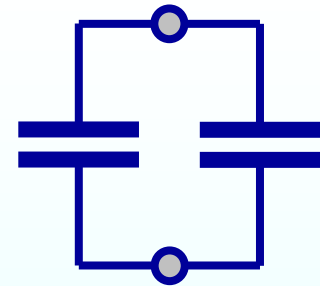
## Кондензаторске контуре и калемски пресеци

- Контуре које садрже кондензаторе, кратке везе и напонске изворе су *кондензаторске контуре* и оне везују почетне услове кроз једначине КЗН
- Пресеци који садрже калемове, отворене везе и струјне изворе су *калемски пресеци* и они везују почетне услове кроз једначине КЗС



## Пример смањеног реда кола

- Краткоспојени кондензатор
- Паралелна веза кондензатора
- Просто редно коло од калема и струјног извора
- Просто редно коло од кондензатора и напонског извора
- Редна веза калемова





# Примена једначина стања

- Одређивање напона и струја кола (решавање кола)
- Анализа својстава кола (понашања) за разне вредности елемената
- Приближно налажење бројчаних вредности напона и струја у програмима за симулацију електричних кола

## Шта се тражи на испиту?

- Да се објасни, кроз пример по избору, **шта су једначине стања** и која је њихова примена
- Да се **поставе једначине стања** за дато коло и одреди **ред кола**
- Да се **матрично** напишу једначине стања за дато коло
- **Не решавамо** једначине стања на испиту

## Једначина одзива

- **Одзив** је напон или струја у колу настао услед енергије динамичких елемената, или побуде, или и једног и другог
- **Једначина одзива** је у општем случају диференцијална једначина по траженом одзиву, коју изводимо из једначина кола, а која је написана у договореном облику

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2} \right) \frac{di_2}{dt} + \left( \frac{1}{CL} + \frac{R_1}{CLR_2} \right) i_2 = \frac{1}{L} \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{CLR_2} u_g$$

## Пример једначине одзива

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

$$u_1 = u_g$$

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt}$$

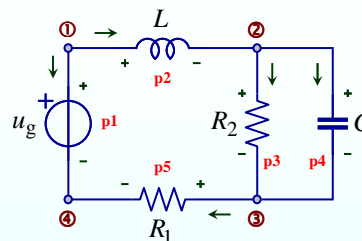
$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$-u_3 + u_4 = 0$$

$$u_3 = R_2 i_3$$

$$i_4 = C \frac{du_4}{dt}$$

$$-i_3 - i_4 + i_5 = 0$$



$$u_5 = R_1 i_5$$

Уклонимо све променљиве осим тражене струје калема (на пример)

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2} \right) \frac{di_2}{dt} + \left( \frac{1}{CL} + \frac{R_1}{CLR_2} \right) i_2 = \frac{1}{L} \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{CLR_2} u_g$$

# Својства једначине одзива

- Линеарна нехомогена диференцијална једначина са константним коефицијентима
- Ред једначине је једнак реду кола
- За коло од пасивних елемената (отпорника, калемова, кондензатора, ...) сви коефицијенти имају исти знак

# Општи облик једначине одзива

$$\frac{d^r i}{dt^r} + a_{r-1} \frac{d^{r-1} i}{dt^{r-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = F(t)$$

Карактеристична једначина

$$s^r + a_{r-1} s^{r-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Нуле (корени) карактеристичне једначине су *сопствене учестаности* (*природне учестаности*, *сопствене вредности*, *својствене вредности*, *eigenvalues*)

# Решење једначине одзива

$$i(t) = \psi(t) \vartheta(t) + H_1 \delta(t) + H_2 \frac{d\delta(t)}{dt} + \dots$$

$$H_1, H_2, \dots = \text{const}$$

Елементарна  
(обична) функција од  
полинома, триг,  
експ, ..., функција

Број импулсних сабирака  
зависи од реда кола и  
нехомогеног дела

# Почетни тренутак кола

- Тренутак времена од кога почињемо да одређујемо напоне и струје приступа је *почетни тренутак кола*  $t_0$
- Једначине кола решавамо за временске тренутке који су **после** почетног тренутка  $t > t_0$
- *Предисторија* кола је временски интервал **пре** почетног тренутка  $t < t_0$



## Почетни тренутак је обично ...

- Тренутак образовања (састављања) кола
- Тренутак промене положаја прекидача:  
укључивање или искључивање приступа
- Тренутак укључења извора (генератора)
- Тренутак скоковите промене побуде  
(напона и струја извора)
- Нулти тренутак на оси времена  $t_0 = 0$

# Природни почетни услови

- Струје калемова и напони кондензатора у почетном тренутку кола су ***природни почетни услови кола***
- Сви остали почетни услови су *изведени почетни услови*
- Природни почетни услови се задају у тренутку непосредно **пре** почетног тренутка

$$i_L(t_0^-) = I_0$$

$$u_C(t_0^-) = U_0$$

Initial conditions, IC, Initial state

## Са којим почетним условима решавамо једначине кола?

- Једначине кола решавачемо за почетне услове непосредно **после** почетног тренутка (у тренутку *t*-нула-плус)
- Диференцијалну једначину одзива решавачемо са почетним условима за променљиву и њене изводе у тренутку ***t*-нула-плус**

$t_0^+$

$$i(t_0^+), \frac{di}{dt}(t_0^+), \frac{d^2i}{dt^2}(t_0^+), \dots, \frac{d^{r-1}i}{dt^{r-1}}(t_0^+)$$

# Описивање укључивања извора

- Стварни извори почињу да обезбеђују потребан напон и струју после неког тренутка времена који је *тренутак укључивања извора*
- Пре тренутка укључивања извора, побуда је једнака нули
- Укључивање описујемо Хевисајдовом функцијом а те изворе зовемо *каузалним*

## Примери каузалних побуда

$$u_g(t) = U \vartheta(t)$$

$$u_g(t) = U e^{-at} \vartheta(t)$$

$$i_g(t) = t \frac{I}{T} \vartheta(t)$$

$$i_g(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t) \vartheta(t)$$

$$u_g(t) = U_m e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) \vartheta(t)$$

# Потпуни одзив

- ***Потпуни одзив*** је напон или струја приступа, за тренутке времена после  $t$ -нула-плус, наста(о)ла услед природних почетних услова и побуда
- Потпуни одзив је збир **два** сабирка: одзива на природне почетне услове (сакупљену енергију) и одзива на побуду

Ово је последица линеарности диференцијалних једначина и константности њихових коефицијената

# Одзив на сакупљену енергију

- ***Одзив на природне почетне услове***  
(одзив на сакупљену енергију, одзив на акумулисану енергију) је напон или струја приступа, за тренутке времена после  $t$ -нула-плус, у колу у коме су
- независни извори **искључени**
- То је одзив настао због почетних услова

Zero-input response

## Одзив на побуду

- *Одзив на побуду* (одзив на екситацију, одзив на укључење извора) је напон или струја приступа, за тренутке времена после  $t$ -нула-плус, у колу у коме су
- почетни услови једнаки **нули**
- То је одзив настао због извора (независних генератора, инпута)

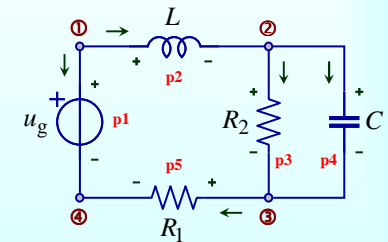


# Суперпозиција одзива

- **Суперпозиција** (преклапање, сабирање) **одзива** је последица линеарности диференцијалних једначина и константности њихових коефицијената
- Потпуни одзив је збир одзива на почетне услове и побуде када делују појединачно
- Одзив је увек **каузалан**, не може почети пре побуде, и једнак је нули када нема сакупљене енергије и побуда

# Пример суперпозиције

- Посматрајмо коло са напонским и струјним извором и калемом и кондензатором који имају енергију (почетни услови нису једнаки нули)
- Потпуни одзив у колу ће бити једнак збиру четири одзива:
- Одзив на енергију калема
- Одзив на енергију кондензатора
- Одзив на напонски извор
- Одзив на струјни извор



У свим  
случајевима је  
исти упоредни  
смер одзива

# Импулсни и одскочни одзив

- Посматрајмо коло **без** енергије (почетни услови једнаки нули) са **једним** извором
- **Импулсни одзив** (*Гринова функција*) је одзив на јединичну импулсну побуду (Диракову делта побуду)  $g(t)$
- **Одскочни одзив** (*индициона функција*) је одзив на јединичну одскочну побуду (Хевисајдову побуду)  $f(t)$

Импулсни одзив се уобичајено обележава и са  $h(t)$ .

# Питања (1)

- Исказати став о непрекидности струје калема и напона кондензатора.
- Шта је сакупљена (акумулисана) енергија? Написати формуле за тренутну енергију калема и кондензатора.
- Шта је стање кола?
- Шта су једначине стања?
- Шта је ред кола?
- Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

## Питања (2)

- Шта је одзив? Шта је једначина одзива?
- Шта су сопствене учестаности (природне учестаности)?
- Какво је опште решење диференцијалне једначине одзива?
- Шта је почетни тренутак кола?
- Који тренутак се најчешће узима за почетни тренутак?
- Шта су природни почетни услови?
- Шта су изведени почетни услови?

## Питања (3)

- Шта су каузални извори?
- Шта је потпуни одзив?
- Шта је одзив на сакупљену енергију? Како се он одређује?
- Шта је одзив на побуду? Како се он одређује?
- Исказати принцип суперпозиције одзива.
- Шта је импулсни одзив (Гринова функција)?
- Шта је одскочни одзив (индициона функција)?

## Питања (4)

(5) Шта је стање електричног кола? Шта су једначине стања електричног кола?

(5) Шта су природни почетни услови електричног кола?

(5) Шта је ред електричног кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

## Питања (5)

(5) Шта су каузални извори?

(5) Шта је импулсни одзив (Гринова функција)? Описати поступак за одређивање импулсног одзива.

(5) Шта је одзив на сакупљену (акумулисану) енергију?  
Како се он одређује?



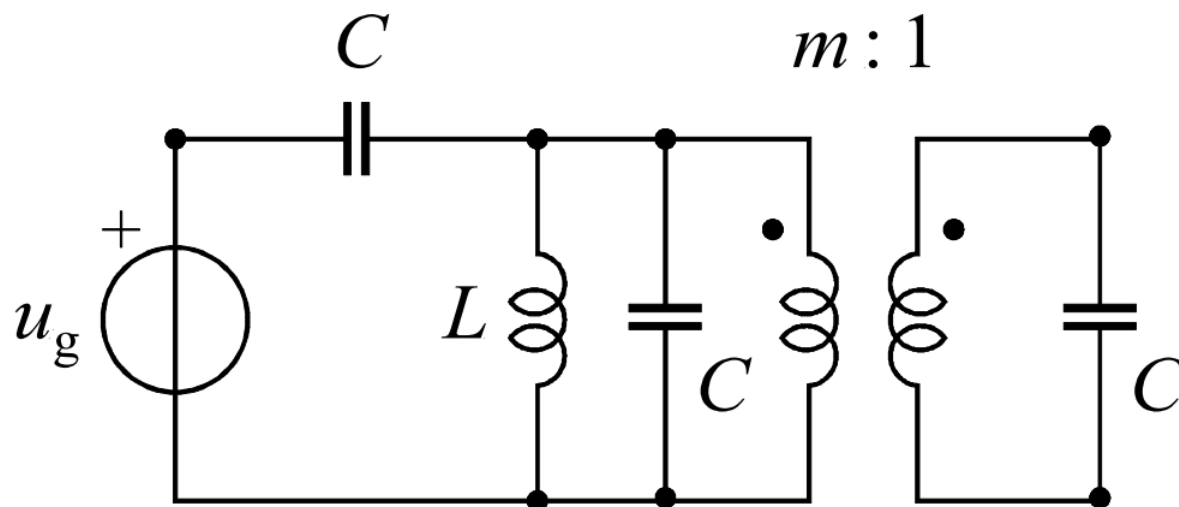
## Питања (6)

(5) Шта је одскочни одзив (индициона функција)? Описати поступак за одређивање одскочног одзива.

(5) Шта је одзив на побуду? Како се он одређује?

## Питања (7)

(5) Ред електричног кола са слике је



- (a) 1,
- (б) 2,
- (в) 3,
- (Г) 4,
- (Д) 5,
- (ђ) 6 ?

# Augustin-Louis Cauchy

## 1789–1857



Један од највећих светских математичара. Дипломирао на *École Polytechnique*, где је био и редовни професор. Његово име је исписано на Ајфеловој кули. Рођен у Паризу, Француска.

# Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz 1821–1894

H. Helmholtz, "Über einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche", *Annalen der Physik und Chemie*, vol. 89, no. 6, pp. 211–233, 1853.



Михајло Пупин, истакнути српски научник, је био Хелмхолцов докторант (заједно са Heinrich Hertz).

Лекар и физичар. Први исказао став о суперпозицији (принцип суперпозиције) у електричним колима 1853. Рођен у Потсдаму, Пруска (Немачка).

# George Green 1793–1841



Математичар и физичар. Први исказао став о потенцијалима и увео (Гринове) функције за језгро решења диференцијалне једначине. Рођен у Нотингему, Уједињено Краљевство.