Електротехнички факултет, Београд Решења

МАТЕМАТИКА 1 – Колоквијум – Задаци *10. децембар 2017. г.*

Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. У загради поред сваког задатка стоји број поена које тај задатак носи. Испит се ради максимално **75** min.	**Име и презиме:**	Сала:
1. | *2.* | *3.* | *Сума:*	**Број индекса:**	Наставна група:

1. [5] Дат је скуп $M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a\neq 0\right\}$. Испитати природу алгебарске структуре $(M,\cdot)$, где је $\cdot$ ознака за множење матрица.

Одговор: $(M,\cdot)$ је група

1) затв. $(\forall A,B\in M)\ A\cdot B\overset{?}{\in} M$

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & 0 \\ bc+d & 1 \end{bmatrix}\in M$, јер $bc+d\in\mathbb{Q}$ и $ac\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow$ $\cdot$ је затв. у M

ако $ac=0 \Rightarrow a=0 \lor c=0$

2) множење матрица је асоцијативно

3) комут. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & 0 \\ bc+d & 1 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} ca & 0 \\ da+b & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\cdot$ није комут.

$\uparrow$ нпр. $a=1, b=2, c=-1, d=0$

4) неутрал. елем. $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in M$, јер $1\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $0\in\mathbb{Q}$, $(\forall A\in M)\ I\cdot A=A=A\cdot I$

5) инверзни елемент. $(\forall A\in M)(\exists B\in M)\ A\cdot B=I=B\cdot A$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & 0 \\ bc+d & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $ac=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{c=\frac{1}{a}}\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}$ је десни инв. ел. за $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

$bc+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}}$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}$ је и леви инв. ел. за $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

па је $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}$ инв. ел. за $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

2. [5] Дат је реалан полином трећег реда $P(x)=x^3-6x^2+\lambda$. Одредити све вредности параметра λ за које нуле x_1, x_2 и x_3 полинома $P(x)$ задовољавају релацију $(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0$. $(*)$

Одговор: $\lambda=-9$

$x_1+x_2+x_3=6$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$

$x_1x_2x_3=-\lambda$

$(*)$: $x_1^3-9x_1^2+27x_1-27+x_2^3-9x_2^2+27x_2-27+x_3^3-9x_3^2+27x_3-27=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+27\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{=6}-3\cdot 27=0$

Како су x_1, x_2 и x_3 нуле пол. $P(x)$, важи:

$x_1^3-6x_1^2+\lambda=0$
$x_2^3-6x_2^2+\lambda=0$
$x_3^3-6x_3^2+\lambda=0$

$\Rightarrow \underline{x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3\lambda+6\cdot(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$, $(**)$

$(**)$ у $(*)$: $-3\lambda-3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+27\cdot 3=0 \ /:3 \Rightarrow \underline{x_1^2+x_2^2+x_3^2=27-\lambda}$

$\underbrace{(x_1+x_2+x_3)^2}_{6^2}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}_{=0}=x_1^2+x_2^2+x_3^2=27-\lambda$

$\boxed{\lambda=-9\in\mathbb{R}}$

3. [5] У зависности од вредности параметра $p\in\mathbb{R}$, одредити граничну вредност низа $x_n=\dfrac{2p^{n+1}+3\cdot 5^n}{2p^n+5^{n+1}}$.

Одговор:
$\frac{3}{5}$, за $\left|\frac{p}{5}\right|<1$
p, за $\left|\frac{p}{5}\right|>1$
$\frac{13}{7}$, за $p=5$
не постоји за $p=-5$

$L=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2p^{n+1}+3\cdot 5^n}{2p^n+5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{5^n}\left(2p\left(\frac{p}{5}\right)^n+3\right)}{\cancel{5^n}\left(2\left(\frac{p}{5}\right)^n+5\right)}$

$\left|\frac{p}{5}\right|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{p}{5}\right)^n=0 \Rightarrow L=\frac{3}{5}$

$\left|\frac{p}{5}\right|>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{p}{5}\right)^n=0 \Rightarrow L=\frac{2p}{2}=p$

$\frac{p}{5}=1 \Leftrightarrow p=5 \Rightarrow L=\frac{2\cdot 5+3}{2+5}=\frac{13}{7}$

$\frac{p}{5}=-1 \Leftrightarrow p=-5 \Rightarrow L=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-10\cdot(-1)^n+3}{2\cdot(-1)^n+5} \Rightarrow L$ не постоји

Електротехнички факултет, Београд Решења

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА

ЈАНУАРСКИ ИСПИТНИ РОК, *14. 1. 2018. год.*	БРОЈ ИНДЕКСА:	САЛА:
Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. *Само потпуно тачан одговор доноси 1 поен.* Тест је положен са бар **6** поена. Тест траје максимално **30** min.	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ:	НАСТАВНА ГРУПА:

1. Одредити све вредности параметра $k \in \mathbb{Z}$ за које је операција $\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $x \circ y = x + \frac{1}{4}k^2 y$ комутативна.

$x + \frac{1}{4}k^2 y = y + \frac{1}{4}k^2 x$

$x - y = \frac{1}{4}k^2 (x - y)$

$\frac{1}{4}k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

Одговор: ± 2

2. На скупу $\{a, b, c\}$ задата је операција * Кејлијевом таблицом

*	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	c	c

а) одредити (ако постоји) неутрални елемент за операцију * :

b

б) одредити (ако постоји) инверзни елемент за елемент c:

a

3. Заокружити слова испред једнакости које важе за регуларне матрице A и B и јединичну матрицу I:

а) $(\mathrm{adj}A) \cdot A = (\det A) \cdot I$; *б)* $\det A = \det(A^{-1})$;

в) $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$; *г)* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

4. За коју вредност реалног параметра a систем линеарних алгебарских једначина

$$ax + ay = 1$$
$$x + ay = 1$$

има јединствено решење?

Заокружити слово поред тачног одговора:

а) за $a = 1$ и $a = 0$; *б)* за $a = 1$ или $a = 0$;

в) за $a \neq 1$ и $a \neq 0$; *г)* за $a \neq 1$;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

5. Одредити реалне бројеве p и q, тако да полином $P(x) = x^3 + px^2 + qx - 2$ буде дељив полиномом $\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{=(x-2)^2}$.

$P(2) = 0 = 8 + 4p + 2q - 2 = 0$

$P'(x) = 3x^2 + 2px + q$

$P'(2) = 0 = 12 + 4p + q = 0$ $\quad p = -\frac{9}{2}$

$-6 + q = 0$

$q = 6$

Одговор: $p = -9/2$ $q = 6$

6. Заокружити слова испред тачних тврђења:

а) Ако је низ a_n конвергентан, а низ b_n дивергентан, онда је низ $a_n \cdot b_n$ дивергентан;

б) Ако је низ a_n конвергентан, а низ b_n дивергентан, онда је низ $a_n + b_n$ дивергентан;

в) Ако низ a_n конвергира ка 0, онда низ $(-1)^n \cdot a_n$ конвергира ка 0;

г) Ако је низ a_n ограничен, онда је низ $\frac{1}{a_n}$ ограничен;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

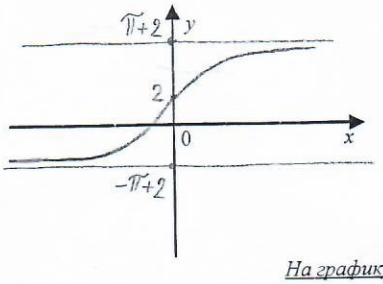
7. Одредити вредност реалних параметара a и b тако да функција $f(x) = \begin{cases} ax + 3, & x > 4 \\ 7, & x = 4 \\ x^2 + bx + 3, & x < 4 \end{cases}$ буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4) \Rightarrow 4a + 3 = 7 \Rightarrow a = 1$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4) \Rightarrow 16 + 4b + 3 = 7 \Rightarrow b = -3$

Одговор: $a = 1$ $b = -3$

8. Скицирати график функције $g(x) = 2\mathrm{arctg}x + 2$.



На графику означити све значајне тачке.

9. Заокружити слова испред функција које имају бар једну хоризонталну асимптоту:

а) $f(x) = 2\sin(x+1)$; *б)* $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}} + 1$;

в) $f(x) = 4\ln|x+5|$; *г)* $f(x) = 6\mathrm{arctg}(7x)$;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

10. Одредити коефицијент уз x^4 у Маклореновом развоју функције $h(x) = x^3 e^{-x^2}$.

$h(x) = x^3(1 - x^2 + o(x^2)), \; x \to 0$

$h(x) = x^3 - x^5 + o(x^5), \; x \to 0$

Одговор: 0

Електротехнички факултет, Београд

МАТЕМАТИКА 1 – Задаци

14. јануар 2018. г.

Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. У загради поред сваког задатка стоји број поена које тај задатак носи. Испит се ради максимално **150** min.	**Име и презиме:**	Сала:
1. *2.* *3.* *4.* *5.* *6.* *Сума:*	**Број индекса:**	Наставна група:

1. **[8]** Нека је $S=(3,+\infty)$ и операција $\circ$ дефинисана на следећи начин: $(\forall x,y\in S)\ x\circ y = xy-3x-3y+12$.
Испитати природу алгебарске структуре $(S,\circ)$.

Одговор:

$x\circ y = (x-3)(y-3)+3$

- затв: $x,y\in S \Rightarrow x>3, y>3 \Rightarrow (x-3)(y-3)+3>3 \Rightarrow x\circ y\in S \Rightarrow$ важи затв.
- асоц: $x\circ(y\circ z) = x\circ((y-3)(z-3)+3) = (x-3)((y-3)(z-3))+3 = ((x-3)(y-3))(z-3)+3$
  $= ((x-3)(y-3)+3)\circ z = (x\circ y)\circ z \Rightarrow$ важи асоц.
- комут: $x\circ y = (x-3)(y-3)+3 = (y-3)(x-3)+3 = y\circ x \Rightarrow$ важи комут.
- неут: $x\circ e = x \Leftrightarrow (x-3)(e-3)+3 = x \Leftrightarrow (x-3)(e-3) = x-3>0 \Leftrightarrow e-3=1 \Leftrightarrow e=4\in S$
- инверз: $x\circ x' = e \Leftrightarrow (x-3)(x'-3)+3=4 \Leftrightarrow (x-3)(x'-3)=1,\ x-3>0 \Leftrightarrow x' = \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{>0}+3\in S$

$(S,\circ)$ је Абелова група

2. **[9]** Израчунати $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$.

Одговор:

$D_n = D_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= D_{n-1}+D_{n-2} \Rightarrow D_n = D_{n-1}+D_{n-2}$. Каракт. ј-на: $t^2 = t+1$ тј $t^2-t-1=0$

$t_{12} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow D_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\left.\begin{array}{l} D_1 = 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 \\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ C_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{array} \Rightarrow D_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

3. **[8]** Дат је полином $P(x)=8x^4+12x^3+10x^2+27x-18$. Ако је једна нула полинома $P(x)$ облика $x_1 = ai$ $(a\in\mathbb{R},\ i^2=-1)$, наћи све нуле полинома $P(x)$.

Одговор:

$x_2 = -ai$ је друга нула $\Rightarrow (x-ai)(x+ai) = x^2+a^2$ дели $P(x)$

$P(x) = (8x^2+12x+10-8a^2)(x^2+a^2) + \underbrace{(27-12a^2)}_{=0}x - (10-8a^2)a^2 - 18$

$\Downarrow$

$a = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}i$

$8x^2+12x+10-8\cdot\frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow 8x^2+12x-8=0 \Rightarrow x_3=-2,\ x_4 = \frac{1}{2}$

4. [2+3] Изачунати:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n - n}$;

I начин:

$$2 = \sqrt[n]{2^n} > \sqrt[n]{2^n - n} > \sqrt[n]{2^n - 2^{n-1}} = 2\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

$$\to 2 \leftarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n - n} = 2$$

II начин:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n - n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n}\,\sqrt[n]{1 - \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to 0}} = 2$$

б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$$

Одговор:

5. [3] Применом Маклоренових развоја израчунати граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - 2x^2 + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{3}}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + 3x^2 + o(x^2)}{x^2} = 3$$

Одговор:
стр. 130.
зад. 290.
Мат. анализа

6. [4] Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = 2x - \sqrt{3x^2 + 6x}$.

Домен: $D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$, f није ни парна, ни непарна, ни периодична

Нуле и знак: за $x < -2$: $f(x) < 0$

за $x > 0$: $\begin{cases} f(x) > 0 \iff 4x^2 > 3x^2 + 6x \iff x(x-6) > 0 \iff x > 6 \\ f(x) < 0 \iff x \in (0,6),\ f(0) = 0,\ f(6) = 0 \end{cases}$

f: $-$ | -2 | 0 | $-$ | 6 | $+$

Монотоност: $f'(x) = 2 - \dfrac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x}}$

		-2		0		1	
f'	$+$				$-$		$+$
f	$\nearrow$				$\searrow$		$\nearrow$

$M(1,1)$ лок. мин.

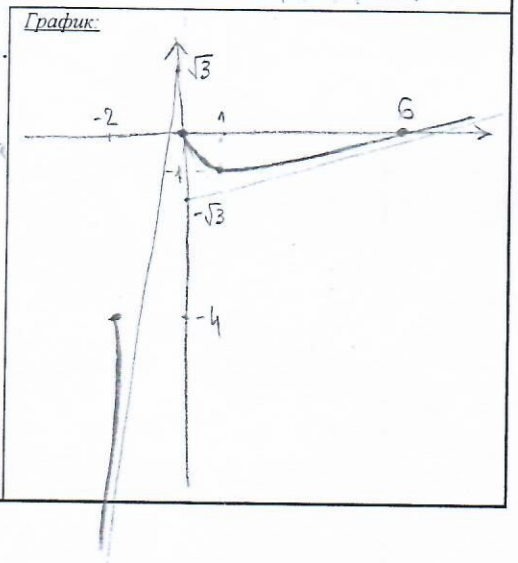
Конвексност: $f''(x) = \dfrac{9}{(3x^2+6x)^{3/2}} > 0 \Rightarrow f$ је увек конвексна и нема превојне т.

Асимптоте: ВА, ХА нема $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

КА: лева: $y = (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3}$

десна: $y = (2-\sqrt{3})x - \sqrt{3}$

График:



Електротехнички факултет, Београд Решења

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА

ФЕБРУАРСКИ ИСПИТНИ РОК, *4. фебруар 2018. г.*	БРОЈ ИНДЕКСА:	САЛА:
Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. *Само потпуно тачан одговор доноси 1 поен.* Тест је положен са бар **6** поена. Тест траје максимално **30** min.	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ:	НАСТАВНА ГРУПА:

1. У пољу $GF(5)=(G,+_5,\cdot_5)$, где је $G=\{0,1,2,3,4\}$, $+_5$ сабирање по модулу 5, а $\cdot_5$ множење по модулу 5, одредити инверзни елемент елемента $(2+_5 4)\cdot_5 3$ у односу на $\cdot_5$.

$(2+_5 4)\cdot_5 3 = 1\cdot_5 3 = 3$

Како је $3\cdot_5 2 = 1$, то је тражени елемент 2

Одговор: 2

2. Дата је матрица $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}$. Израчунати A^{-2}.

$\det A=-2 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}6&-4\\-5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&2\\\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

$A^{-2}=\begin{bmatrix}-3&2\\\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2\\\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-9\\-\frac{45}{4}&\frac{29}{4}\end{bmatrix}$

Одговор: $\begin{bmatrix}14&-9\\-\frac{45}{4}&\frac{29}{4}\end{bmatrix}$

3. Нека су A и B квадратне матрице реда n. Заокружити слова испред тачних тврђења:

а) Ако је $\det\left(AA^{\mathrm{T}}\right)=1$, тада је $\det A=1$;

б) Ако је $AB=BA$, тада је $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

в) Ако су A и B регуларне, онда је и матрица AB регуларна;

г) Ако су A и B регуларне, онда је и матрица $A+B$ регуларна;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

4. Одредити све комплексне бројеве z такве да је $z^4=i$.

$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \Rightarrow z^4=\rho^4(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)$

Како је $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ и $|i|=1$, то је $\boxed{\rho=1}$ и $4\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k=0,1,2,3$, тј.

$\varphi=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$

Одговор: $z_k=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\{0,1,2,3\}$

5. Наћи све нуле полинома $p(x)=x^3+4x^2+x-6$.

Како је $p(1)=0 \Rightarrow x-1 \mid p(x)$

Хорнерова шема:

	1	4	1	-6
1	1	5	6	0

тј. $p(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$

а знамо $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

Одговор: $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=-3$

6. Заокружити слова испред тачних тврђења:

а) Ако је низ a_n конвергентан, тада је низ $|a_n|$ конвергентан;

б) Ако је низ $|a_n|$ конвергентан, тада је низ a_n конвергентан;

в) Низ $b_n=\sin(3^n n^3)$ је ограничен;

г) Низ $b_n=\sin(3^n n^3)$ је конвергентан;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

7. Одредити лимес: $L=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\ln(1+\sin x)}{3\sin^2 x}$.

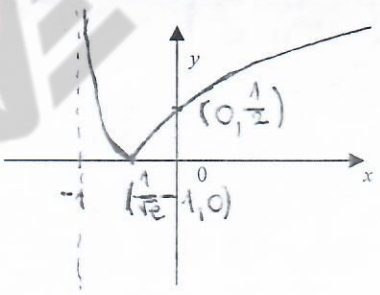
$L \overset{\text{Л.П.}\ \frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cancel{\cos x}}{6\sin x\cdot\cancel{\cos x}}=-\infty$

јер $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\sin x}=1$, а

$\lim\limits_{x\to 0^-}(6\sin x)=0^-$

Одговор: $L=-\infty$

8. Скицирати график функције $g(x)=\left|\ln(x+1)+\frac{1}{2}\right|$.



На графику означити све значајне тачке.

9. Заокружити слова испред функција које имају локални минимум у $x_0=3$:

а) $f_1(x)=(x-3)^3$;

б) $f_2(x)=e^{|x-3|}$;

в) $f_3(x)=\cos(x-3)$;

г) $f_4(x)=\left|x^2-2x-3\right|$;

д) Ниједна од претходно понуђених функција нема локални минимум у $x_0=3$.

10. Одредити Маклоренов полином другог степена функције $h(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

$h(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\binom{\frac{1}{3}}{1}x+\binom{\frac{1}{3}}{2}x^2+o(x^2)$

$\binom{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$; $\binom{\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}=-\frac{1}{9}$

Одговор: $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$

Електротехнички факултет, Београд Решења

МАТЕМАТИКА 1 – Задаци **4. фебруар 2018. год.**

Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. У загради поред сваког задатка стоји број поена које тај задатак носи. Испит се ради максимално **150** min.

Име и презиме:

Сала:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Сума:

Број индекса:

Наставна група:

1. [8] Нека је скуп $S=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$. Испитати природу (све особине) алгебарске структуре $(S,\cdot)$, где је са $\cdot$ означено стандардно множење матрица.

затвореност: $\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 & c \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ac & 0 & 2ac \\ 0 & bd & 0 \\ 2ac & 0 & 2ac \end{bmatrix} \in S \quad (*)$

јер из $a, b, c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow 2ac, bd \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

комутативност: следи из $(*)$ и комутативности множења у $\mathbb{R}$

асоцијативност: следи из асоцијативности множења матрица

Неутрал: $\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 & c \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$. Из $(*)$ следи да је $2ac = a$ и $bd = b \xRightarrow{a,b\neq 0}$ $\boxed{c=\frac{1}{2}}$ и $\boxed{d=1}$ $\Rightarrow$ неутрал је $E=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in S$

инверз: $A \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c' & 0 & c' \\ 0 & d' & 0 \\ c' & 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} 2ac' = \frac{1}{2}$ и $bd' = 1$ $\xRightarrow{\text{тј. } (a,b\neq 0)}$ $c' = \frac{1}{4a}$ и $d' = \frac{1}{b}$ $\Rightarrow$ инверз за A је $A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4a} & 0 & \frac{1}{4a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{4a} & 0 & \frac{1}{4a} \end{bmatrix} \in S$

Одговор: $(S,\cdot)$ је Абелова група!

2. [8] Дата је матрица $A=\begin{bmatrix} p & 0 & q \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$, $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, q\in\mathbb{R}$. Одредити A^m, $m\in\mathbb{Z}$.

За $m=0$: $A^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

За $m>0$: $A = p\cdot I + q\cdot B$, где је $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = 0$

$\Rightarrow A^m = (p\cdot I + q\cdot B)^m = p^m\cdot I + \binom{m}{1}p^{m-1}\cdot q\cdot B = \begin{bmatrix} p^m & 0 & mp^{m-1}q \\ 0 & p^m & 0 \\ 0 & 0 & p^m \end{bmatrix}$

За $m<0$: $m=-k, k>0$. $A^{-1} = \frac{1}{p^3}\begin{bmatrix} p^2 & 0 & -pq \\ 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 & -\frac{q}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix}$

$A^m = A^{-k} = (A^{-1})^k = \left(\frac{1}{p}\cdot I + \left(-\frac{q}{p^2}\right)B\right)^k = \frac{1}{p^k}I + k\cdot\frac{1}{p^{k-1}}\cdot\left(-\frac{q}{p^2}\right)B = \begin{bmatrix} \frac{1}{p^k} & 0 & -k\frac{1}{p^{k+1}}q \\ 0 & \frac{1}{p^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p^k} \end{bmatrix}$

тј. враћањем $m=-k \rightarrow A^m = \begin{bmatrix} p^m & 0 & mp^{m-1}q \\ 0 & p^m & 0 \\ 0 & 0 & p^m \end{bmatrix}$

Одговор: $A^m = \begin{bmatrix} p^m & 0 & mp^{m-1}q \\ 0 & p^m & 0 \\ 0 & 0 & p^m \end{bmatrix}$ $\forall m\in\mathbb{Z}$

3. [5+4] Одредити све вредности $n\in\mathbb{N}$ за које је полином $P(x)=(x+1)^n - x^n - 1$ дељив полиномом:

а) x^2+x+1; *б)* $(x^2+x+1)^2$.

а) Нека је ε нула полинома $x^2+x+1 \Rightarrow \varepsilon^2+\varepsilon+1=0 \,/\cdot(\varepsilon-1)\neq 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon^3=1}$ $(*)$

$P(\varepsilon) = (-\varepsilon^2)^n - \varepsilon^n - 1 \overset{(*)}{=} (-1)^n\varepsilon^{2n} - \varepsilon^n - 1$. Нека $k\in\mathbb{N}_0$. Испитујемо:

за $n=6k\,(k\in\mathbb{N}) \rightarrow P(\varepsilon) = 1-1-1 = -1\neq 0$; за $\boxed{n=6k+1} \rightarrow P(\varepsilon) = -\varepsilon^2-\varepsilon-1 = 0$, па тада $x^2+x+1 \mid P(x)$

за $n=6k+2 \rightarrow P(\varepsilon) = \varepsilon-\varepsilon^2-1\neq 0$; за $n=6k+3 \rightarrow P(\varepsilon) = -1-1-1 = -3\neq 0$

за $n=6k+4 \rightarrow P(\varepsilon) = \varepsilon^2-\varepsilon-1\neq 0$; за $\boxed{n=6k+5} \rightarrow P(\varepsilon) = -\varepsilon-\varepsilon^2-1 = 0 \Rightarrow x^2+x+1 \mid P(x)$

б) За да $(x^2+x+1)^2 \mid P(x)$, мора $(x^2+x+1)\mid P(x)$ и $(x^2+x+1)\mid P'(x)$. Прво знамо из а), а $P'(x) = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}$, тј. $P'(\varepsilon) = n(-1)^{n-1}(\varepsilon^{n-1})^2 - n\varepsilon^{n-1} = n\varepsilon^{n-1}\cdot((-1)^{n-1}\varepsilon^{n-1} - 1)$

За $n=6k+1 \rightarrow P'(\varepsilon) = n\varepsilon^{n-1}\cdot(1-1) = 0$, па $(x^2+x+1)^2 \mid P(x)$

За $n=6k+5 \rightarrow P'(\varepsilon) = n\varepsilon^{n-1}\cdot(\varepsilon-1)\neq 0$, па тада $(x^2+x+1)^2 \nmid P(x)$

Одговор:
а) $n=6k+1$ ✓ $n=6k+5$, $k\in\mathbb{N}_0$
б) $n=6k+1$, $k\in\mathbb{N}_0$

4. **[3+3]** ***а)*** Нека је природан број $k \in \mathbb{N}$ фиксиран. Израчунати граничну вредност низа $L_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{k} n^{-k}$;

б) Применом Штолцове теореме израчунати граничну вредност низа $L_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt[n]{n!}}$.

Одговор:

а) $L_1 = \frac{1}{k!}$

б) $L_2 = 0$

а) $L_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}{n^k} = \frac{1}{k!}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k+1)}{n}$

$= \frac{1}{k!}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) = \frac{1}{k!}$

$L_2 = -2\lim (n!)^{-\frac{1}{n}} = -2\lim e^{-\frac{\ln(n!)}{n}} = -2e^{-\lim\frac{\ln(n!)}{n}} = -2e^{-\lim \ln n} = 0$

б) Радимо најпре $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln 1 - \frac{\ln(n!)}{n}\right) = -\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n!)}{n}$

ШТОЛЦ $-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln((n+1)!)-\ln(n!)}{\cancel{n}+1-\cancel{n}} = -\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

$\Rightarrow L_2 = (-2)\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

5. **[8]** Применом Маклоренових развоја израчунати граничну вредност $L = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}+\ln(\cos 3x)-\sqrt{1+6x}}{(\sin 2x)^2}$.

Одговор:

$L = \frac{9}{8}$

$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$

$\ln(\cos 3x) = \ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$

$\sqrt{1+6x} = (1+6x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 6x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\cdot(6x)^2 + o(x^2) = 1 + 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$

$(\sin 2x)^2 = (2x + o(x^2))^2 = 4x^2 + o(x^2)$

$L = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\cancel{3x}+\cancel{\frac{9x^2}{2}}-\cancel{\frac{9x^2}{2}}-\cancel{1}-\cancel{3x}+\frac{9x^2}{2}+o(x^2)}{4x^2+o(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{4x^2+o(x^2)} = \frac{9}{8}$

6. **[11]** Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \left(x + \frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}}$.

① домен: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

② није ни парна ни непарна

③ није периодична

④ нуле и знак: нема нула

$f(x) > 0$ за $x > 0$

$f(x) < 0$ за $x < 0$

⑤ асимптоте: В.А. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}} = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$ јесте В.А.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+\frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+\frac{1}{2x}}{e^{-\frac{1}{3x}}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{3x^2}e^{-\frac{1}{3x}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3x^2-\frac{3}{2}}{e^{-\frac{1}{3x}}} = 0^-$

К.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left(x+\frac{1}{2x}\right)\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{18x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= x + \frac{1}{3} + \frac{5}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \boxed{y = x + \frac{1}{3}}$ је и лева и десна к.А.

⑥ $f'(x) = \frac{(x-1)(6x^2+4x+1)}{6x^3}e^{\frac{1}{3x}}$ (>0)

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$		$+$	
f		↗	‖	↘		↗	

$\boxed{A\left(1, \frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}\right) \text{ лок. min}}$

$\boxed{f \text{ расте на } (-\infty,0)\cup(1,+\infty)}$

$\boxed{f \text{ опада на } (0,1)}$

⑦ конвексност:

$f''(x) = \frac{20x^2+12x+1}{18x^5}e^{\frac{1}{3x}}$

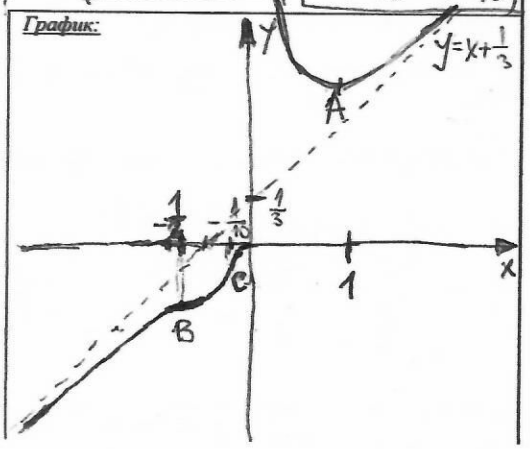
	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{10}$		0		$+\infty$
f''		$-$		$+$		$-$	‖	$+$	
f		∩		∪		∩	‖	∪	

f је конвексна на $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}\right)\cup(0,+\infty)$

f је конкавна на $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{10}, 0\right)$

П.Т. $\boxed{B\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}$ $\boxed{C\left(-\frac{1}{10}, f\left(-\frac{1}{10}\right)\right)}$

График:



Електротехнички факултет, Београд

Решења

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА

ЈУЛСКИ ИСПИТНИ РОК, *25.6. 2018. год.*	БРОЈ ИНДЕКСА:	САЛА:
Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. *Само потпуно тачан одговор доноси 1 поен.* Тест је положен са бар **6** поена. Тест траје максимално **30** min.	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ:	НАСТАВНА ГРУПА:

1. Нека је познато да је $(\{a,b,c,d\},*)$ Абелова група. Допунити Кејлијеву таблицу за операцију $*$:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

2. Заокружити слова испред алгебарских структура које представљају *асоцијативне групоиде*, при чему је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, $\mathbb{Z}$ је скуп целих бројева, $\mathbb{Q}$ је скуп рационалних бројева, i је имагинарна јединица, а операције $+,\cdot$ и $:$ су стандардне операције сабирања, множења и дељења бројева.

а) $(\mathbb{N},:)$;

б) $(\{1,i,-1\},\cdot)$;

в) $(\mathbb{Q},\cdot)$;

г) $(\mathbb{Z},+)$;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

3. Одредити све вредности реалног параметра p за које је $\det\left(M^5\right)=32$, где је матрица $M=\begin{bmatrix}1 & -2\\ p & 0\end{bmatrix}$.

$\det(M^5)=(\det M)^5=(2p)^5$

$32=2^5p^5 \Rightarrow p=1\in\mathbb{R}$

Одговор: $p=1$

4. Нека су A, B, C и D регуларне матрице истог реда. Решити по X матричну једначину $(A\cdot X+B)C=D$. $/C^{-1}$

$AX+B=DC^{-1}$

$A^{-1}\backslash\quad AX=DC^{-1}-B$

$X=A^{-1}(DC^{-1}-B)=A^{-1}DC^{-1}-A^{-1}B$

5. Дат је полином $P(x)=qx^3-qx^2+rx+r$, где су x_1,x_2 и x_3 његови корени, а $q,r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Наћи вредност израза

$L=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)(x_1+x_2+x_3)$?

$L=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}\cdot(x_1+x_2+x_3)$

$L=\frac{\frac{r}{q}}{-\frac{r}{q}}\cdot\frac{q}{q}=-1$

Одговор: $L=-1$

6. Заокружити слова испред низова који су ограничени:

а) $x_n=\frac{(-1)^n}{5n^8}$;

б) $x_n=\ln(2n+6)$;

в) $x_n=\sin(2^n n^3)$;

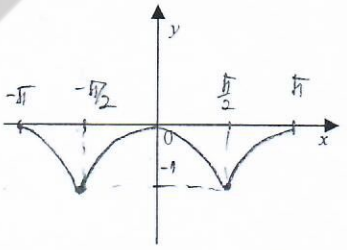
г) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

7. Израчунати граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 2_-}\frac{1}{x^2+e^{\frac{1}{2-x}}}=0$ $\quad \frac{1}{2-x}\to+\infty$, $e^{\frac{1}{2-x}}\to+\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0_+}\ln(1+2^{-\frac{1}{x}})=0$ $\quad -\frac{1}{x}\to-\infty$, $2^{-\frac{1}{x}}\to 0$

8. Скицирати график функције $f(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-1$ на $[-\pi,\pi]$.



На графику означити све значајне тачке.

9. Заокружити слова испред тачних тврђења:

а) Функција $g_1(x)=5\operatorname{arctg}(3x)$ је монотоно опадајућа на целом домену;

б) Функција $g_2(x)=6\ln(1+2x)$ има бар једну вертикалну асимптоту;

в) Функција $g_3(x)=x^2+x+8$ је конвексна на целом домену;

г) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

10. Одредити Маклоренов полином петог степена функције $h(x)=x\cos(2x)$.

$h(x)=x\cdot\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^5)\right),\ x\to 0$

$h(x)=x-2x^3+\frac{2}{3}x^5+o(x^6),\ x\to 0$

$M_5(x)=x-2x^3+\frac{2}{3}x^5$

Одговор: $x-2x^3+\frac{2}{3}x^5$

Електротехнички факултет, Београд

МАТЕМАТИКА 1 – Задаци **25. јун 2018. г.**

Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. У загради поред сваког задатка стоји број поена које тај задатак носи. Испит се ради максимално **150** min.

Име и презиме:

Сала:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Сума:

Број индекса:

Наставна група:

1. **[9]** Испитати природу алгебарске структуре $(\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R},*)$, где је $\mathbb{R}$ скуп реалних бројева, а операција $*$ је дефинисана са $(a,b)*(c,d)=(ac,a^2d+b)$.

Одговор: Група

1° затв. $a,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow ac\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$a,b,c,d\in\mathbb{R}\Rightarrow a^2d+b\in\mathbb{R}$

2° ком. $(c,d)*(a,b)=(ca,\underbrace{c^2b+d}_{a^2d+b})\neq(a,b)*(c,d)$ у општем случају па $*$ није ком.

3° асоц. $\underbrace{((a,b)*(c,d))}_{(ac,a^2d+b)}*(e,f)=(ace,a^2c^2f+a^2d+b)$

$(a,b)*\underbrace{((c,d)*(e,f))}_{(ce,c^2f+d)}=(ace,a^2c^2f+a^2d+b)$

$*$ је асоц.

4° неутр. елем.

$(a,b)=(a,b)*(e_1,e_2)=(ae_1,a^2e_2+b)$

$a=ae_1,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow \underline{e_1=1}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$b=a^2e_2+b\Rightarrow \underline{e_2=0}\in\mathbb{R}$

$(1,0)$ је д. нел.

$(1,0)*(a,b)=(a,b+0)=(a,b)$ $\Big\}$ $\underline{(1,0)\text{ је н. е.}}$

5° инв. ел.

$(1,0)=(ac,a^2d+b)\Rightarrow c=\frac{1}{a},\ d=-\frac{b}{a^2}\in\mathbb{R}$ ($a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$)

$\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2}\right)*(a,b)=\left(1,\frac{b}{a^2}-\frac{b}{a^2}\right)=(1,0)$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2}\right)$ је инв. ел. за (a,b)

2. **[8]** Одредити вредности реалних параметара p и q за које систем $\begin{bmatrix}p&1&1\\1&q&1\\1&2q&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\4\end{bmatrix}$

Одговор:

Збирка зад. из алгебре, Група аутора, II део стр. 143, зад. бр. 13.

а) Има јединствено решење;

б) Има бесконачно много решења;

в) Нема решење;

г) У случају *а)* наћи решење датог система.

$D=\begin{vmatrix}p&1&1\\1&q&1\\1&2q&1\end{vmatrix}=q(1-p)$

а) систем има јед. решење само

I $q\neq0\wedge p\neq1$

$D_x=\begin{vmatrix}4&1&1\\3&q&1\\4&2q&1\end{vmatrix}=1-2q$

$D_y=1-p$

$D_z=-2pq-1+4q$

$\boxed{x=\frac{1-2q}{q(1-p)},\quad y=\frac{1}{q},\quad z=\frac{-2pq-1+4q}{q(1-p)}}$ г)

II за $p=1$: $D=0$, $D_x=1-2q$, $D_y=0$, $D_z=2q-1$

1) $q\neq\frac{1}{2}\Rightarrow D_x\neq0\wedge D_z\neq0\wedge D=0\wedge D_y=0$

$\Downarrow$

систем нема решење (в)

2) $q=\frac{1}{2}$: $D=D_x=D_y=D_z=0$

имамо беск. много решења (б)

III сл. $q=0$:

$D=0$, $D_x=1\neq0$, $D_y=1-p$, $D_z=-1\neq0$

$\Downarrow$

систем нема решење (в)

а) $q\neq0\wedge p\neq1$

б) $p=1\wedge q=\frac{1}{2}$

в) $p=1\wedge q\neq\frac{1}{2}$ или $q=0$

г) →

3. **[8]** Одредити реалан полином $P(x)=a_1x^2+a_2x+a_3$ такав да за сваки природан број n важи $P(1)+P(2)+\ldots+P(n)=n^3$.

Одговор:

$n^3=\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{P(1)}+\underbrace{4a_1+2a_2+a_3}_{P(2)}+\ldots+\underbrace{(a_1n^2+a_2n+a_3)}_{P(n)}=a_1\underbrace{(1+2^2+\ldots+n^2)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+a_2\underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}}+na_3$

$6n^3=(2n^3+3n^2+n)a_1+a_2(3n^2+3n)+6na_3=2a_1n^3+(3a_1+3a_2)n^2+(a_1+3a_2+6a_3)n$

$2a_1=6\Rightarrow\boxed{a_1=3}$

$3a_1+3a_2=0\Rightarrow\boxed{a_2=-3}$

$a_1+3a_2+6a_3=0\Rightarrow\boxed{a_3=1}$

$\boxed{P(x)=3x^2-3x+1}$

4. **[6]** Израчунати $L_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \overbrace{\dfrac{n}{\dfrac{1}{\sqrt{A^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{4}}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}}}}^{H_n}$, где је $A\in\mathbb{R}$.

Одговор: $L_2=|A|$

1. случај $A\neq 0$:

I начин:

Нека је $x_n=\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}>0, \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}=|A|$

II начин: Нека је $w_n=\frac{1}{H_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{A^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}}}{n}$

штолцов т.

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{(n+1)^2}}}=\dfrac{1}{|A|}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=|A|$

I случај: $A\neq 0$

H_n је хармонијска средина од $x_1,\ldots,x_n$ и важи

$\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=|A|$

II случај $A=0\Rightarrow L_2=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{1+2+\ldots+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=0$

5. **[8]** Дата је функција $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x, & |x|\le 1\\ \frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}(x)+\frac{x-1}{2}, & |x|>1\end{cases}$. Испитати:

а) Непрекидност функције $f(x)$;

б) Диференцијабилност функције $f(x)$.

$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}, & x\in(-\infty,-1)\\ \operatorname{arctg}x, & x\in[-1,1]\\ \frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

Одговор:

а) f је непр. на $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

б) f је диф. на $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

а) $\lim\limits_{x\to-1-}-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}=-\frac{\pi}{4}-1$

$\lim\limits_{x\to-1+}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{4}=f(-1)$ $\Rightarrow f$ има прекид I врсте у $x=-1$

$\lim\limits_{x\to1-}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1+}\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow f$ је непр. у $x=1$

f је непр. на $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

б) $\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to1-}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1+}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f$ је диф. у $x=1$

f није диф. у $x=-1$ јер није непр. у $x=1$

$\Downarrow$

f је диф. на $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

6. **[11]** Детаљно испитати функцију $g(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$ и скицирати њен график.

1° $D(g)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

2° g није ни парна, ни непарна, ни периодична

3° $x=1$ је нула фје g

$g(x)>0\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

$g(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)$

4° $\lim\limits_{x\to-2\pm}g(x)=-\infty\Rightarrow$ $\boxed{x=-2 \text{ је обострана в.а.}}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=\pm\infty\Rightarrow$ $\boxed{\text{нема х.а.}}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+2)^2}=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)-x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-4x^2-4x}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-7x^2-x-1}{(x+2)^2}=-7$

$\boxed{y=x-7 \text{ је обострана коса ас.}}$

$g'(x)=\dfrac{3(x-1)^2(x+2)^2-2(x-1)^3(x+2)}{(x+2)^4}=\dfrac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}$

$g'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-8)\cup(-2,+\infty)\Rightarrow g\nearrow$

$g'(x)<0\Leftrightarrow x\in(-8,-2)\Rightarrow g\searrow$

$M\left(-8,-\frac{81}{4}\right)$ је т. макс.

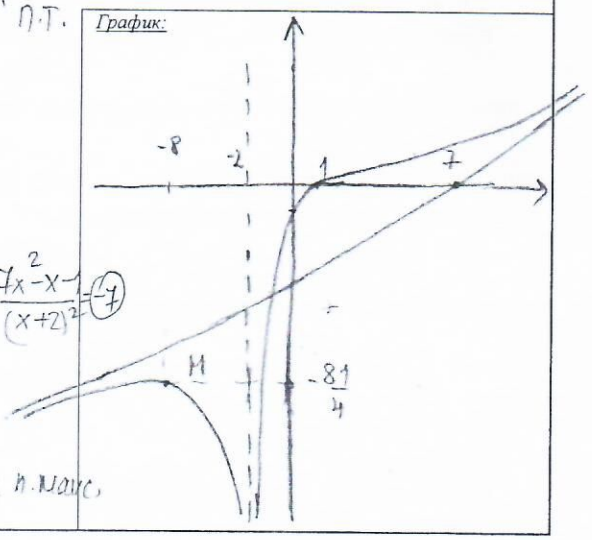
$g''(x)=\dfrac{54(x-1)}{(x+2)^4}$

$g''(x)>0\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)\Rightarrow g$ је конв.

$g''(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)\Rightarrow g$ је конк.

$P(1,0)$ је т.т.

График:



Електротехнички факултет, Београд

Решења

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА

ЈУЛСКИ ИСПИТНИ РОК, *25.6. 2018. год.*	БРОЈ ИНДЕКСА:	САЛА:
Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. *Само потпуно тачан одговор доноси 1 поен.* Тест је положен са бар **6** поена. Тест траје максимално **30** min.	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ:	НАСТАВНА ГРУПА:

1. Нека је познато да је $(\{a,b,c,d\},*)$ Абелова група. Допунити Кејлијеву таблицу за операцију $*$:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

2. Заокружити слова испред алгебарских структура које представљају *асоцијативне групоиде*, при чему је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, $\mathbb{Z}$ је скуп целих бројева, $\mathbb{Q}$ је скуп рационалних бројева, i је имагинарна јединица, а операције $+,\cdot$ и $:$ су стандардне операције сабирања, множења и дељења бројева.

а) $(\mathbb{N},:)$;

б) $(\{1,i,-1\},\cdot)$;

в) $(\mathbb{Q},\cdot)$;

г) $(\mathbb{Z},+)$;

д) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

3. Одредити све вредности реалног параметра p за које је $\det\left(M^5\right)=32$, где је матрица $M=\begin{bmatrix}1 & -2\\ p & 0\end{bmatrix}$.

$\det(M^5)=(\det M)^5=(2p)^5$

$32=2^5p^5 \Rightarrow p=1\in\mathbb{R}$

Одговор: $p=1$

4. Нека су A, B, C и D регуларне матрице истог реда. Решити по X матричну једначину $(A\cdot X+B)C=D$. $/C^{-1}$

$AX+B=DC^{-1}$

$A^{-1}\backslash\quad AX=DC^{-1}-B$

$X=A^{-1}(DC^{-1}-B)=A^{-1}DC^{-1}-A^{-1}B$

5. Дат је полином $P(x)=qx^3-qx^2+rx+r$, где су x_1,x_2 и x_3 његови корени, а $q,r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Наћи вредност израза

$L=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)(x_1+x_2+x_3)$?

$L=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}\cdot(x_1+x_2+x_3)$

$L=\frac{\frac{r}{q}}{-\frac{r}{q}}\cdot\frac{q}{q}=-1$

Одговор: $L=-1$

6. Заокружити слова испред низова који су ограничени:

а) $x_n=\frac{(-1)^n}{5n^8}$;

б) $x_n=\ln(2n+6)$;

в) $x_n=\sin(2^n n^3)$;

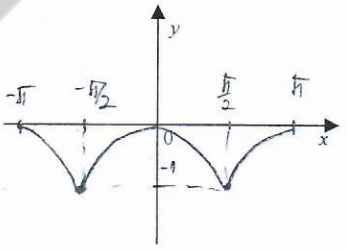
г) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

7. Израчунати граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 2_-}\frac{1}{x^2+e^{\frac{1}{2-x}}}=0$ $\quad \frac{1}{2-x}\to+\infty$, $e^{\frac{1}{2-x}}\to+\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0_+}\ln(1+2^{-\frac{1}{x}})=0$ $\quad -\frac{1}{x}\to-\infty$, $2^{-\frac{1}{x}}\to 0$

8. Скицирати график функције $f(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-1$ на $[-\pi,\pi]$.



На графику означити све значајне тачке.

9. Заокружити слова испред тачних тврђења:

а) Функција $g_1(x)=5\operatorname{arctg}(3x)$ је монотоно опадајућа на целом домену;

б) Функција $g_2(x)=6\ln(1+2x)$ има бар једну вертикалну асимптоту;

в) Функција $g_3(x)=x^2+x+8$ је конвексна на целом домену;

г) Ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

10. Одредити Маклоренов полином петог степена функције $h(x)=x\cos(2x)$.

$h(x)=x\cdot\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^5)\right),\ x\to 0$

$h(x)=x-2x^3+\frac{2}{3}x^5+o(x^6),\ x\to 0$

$M_5(x)=x-2x^3+\frac{2}{3}x^5$

Одговор: $x-2x^3+\frac{2}{3}x^5$

Електротехнички факултет, Београд

МАТЕМАТИКА 1 – Задаци **25. јун 2018. г.**

Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. У загради поред сваког задатка стоји број поена које тај задатак носи. Испит се ради максимално **150** min.

Име и презиме:

Сала:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Сума:

Број индекса:

Наставна група:

1. **[9]** Испитати природу алгебарске структуре $(\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R},*)$, где је $\mathbb{R}$ скуп реалних бројева, а операција $*$ је дефинисана са $(a,b)*(c,d)=(ac,a^2d+b)$.

Одговор: Група

1° затв. $a,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow ac\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$a,b,c,d\in\mathbb{R}\Rightarrow a^2d+b\in\mathbb{R}$

2° ком. $(c,d)*(a,b)=(ca,\underbrace{c^2b+d}_{a^2d+b})\neq(a,b)*(c,d)$ у општем случају па $*$ није ком.

3° асоц. $\underbrace{((a,b)*(c,d))}_{(ac,a^2d+b)}*(e,f)=(ace,a^2c^2f+a^2d+b)$

$(a,b)*\underbrace{((c,d)*(e,f))}_{(ce,c^2f+d)}=(ace,a^2c^2f+a^2d+b)$

$*$ је асоц.

4° неутр. елем.

$(a,b)=(a,b)*(e_1,e_2)=(ae_1,a^2e_2+b)$

$a=ae_1,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow \underline{e_1=1}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$b=a^2e_2+b\Rightarrow \underline{e_2=0}\in\mathbb{R}$

$(1,0)$ је д. нел.

$(1,0)*(a,b)=(a,b+0)=(a,b)$ $\Big\}$ $\underline{(1,0)\text{ је н. е.}}$

5° инв. ел.

$(1,0)=(ac,a^2d+b)\Rightarrow c=\frac{1}{a},\ d=-\frac{b}{a^2}\in\mathbb{R}$ ($a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$)

$\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2}\right)*(a,b)=\left(1,\frac{b}{a^2}-\frac{b}{a^2}\right)=(1,0)$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2}\right)$ је инв. ел. за (a,b)

2. **[8]** Одредити вредности реалних параметара p и q за које систем $\begin{bmatrix}p&1&1\\1&q&1\\1&2q&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\4\end{bmatrix}$

Одговор:

Збирка зад. из алгебре, Група аутора, II део стр. 143, зад. бр. 13.

а) Има јединствено решење;

б) Има бесконачно много решења;

в) Нема решење;

г) У случају *а)* наћи решење датог система.

$D=\begin{vmatrix}p&1&1\\1&q&1\\1&2q&1\end{vmatrix}=q(1-p)$

а) систем има јед. решење само

I $q\neq0\wedge p\neq1$

$D_x=\begin{vmatrix}4&1&1\\3&q&1\\4&2q&1\end{vmatrix}=1-2q$

$D_y=1-p$

$D_z=-2pq-1+4q$

$\boxed{x=\frac{1-2q}{q(1-p)},\quad y=\frac{1}{q},\quad z=\frac{-2pq-1+4q}{q(1-p)}}$ г)

II за $p=1$: $D=0$, $D_x=1-2q$, $D_y=0$, $D_z=2q-1$

1) $q\neq\frac{1}{2}\Rightarrow D_x\neq0\wedge D_z\neq0\wedge D=0\wedge D_y=0$

$\Downarrow$

систем нема решење (в)

2) $q=\frac{1}{2}$: $D=D_x=D_y=D_z=0$

имамо беск. много решења (б)

III сл. $q=0$:

$D=0$, $D_x=1\neq0$, $D_y=1-p$, $D_z=-1\neq0$

$\Downarrow$

систем нема решење (в)

а) $q\neq0\wedge p\neq1$

б) $p=1\wedge q=\frac{1}{2}$

в) $p=1\wedge q\neq\frac{1}{2}$ или $q=0$

г) →

3. **[8]** Одредити реалан полином $P(x)=a_1x^2+a_2x+a_3$ такав да за сваки природан број n важи $P(1)+P(2)+\ldots+P(n)=n^3$.

Одговор:

$n^3=\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{P(1)}+\underbrace{4a_1+2a_2+a_3}_{P(2)}+\ldots+\underbrace{(a_1n^2+a_2n+a_3)}_{P(n)}=a_1\underbrace{(1+2^2+\ldots+n^2)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+a_2\underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}}+na_3$

$6n^3=(2n^3+3n^2+n)a_1+a_2(3n^2+3n)+6na_3=2a_1n^3+(3a_1+3a_2)n^2+(a_1+3a_2+6a_3)n$

$2a_1=6\Rightarrow\boxed{a_1=3}$

$3a_1+3a_2=0\Rightarrow\boxed{a_2=-3}$

$a_1+3a_2+6a_3=0\Rightarrow\boxed{a_3=1}$

$\boxed{P(x)=3x^2-3x+1}$

4. **[6]** Израчунати $L_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \overbrace{\dfrac{n}{\dfrac{1}{\sqrt{A^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{4}}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}}}}^{H_n}$, где је $A\in\mathbb{R}$.

Одговор: $L_2=|A|$

1. случај $A\neq 0$:

I начин:

Нека је $x_n=\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}>0, \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}=|A|$

II начин: Нека је $w_n=\frac{1}{H_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{A^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{n^2}}}}{n}$

штолцов т.

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{A^2+\frac{1}{(n+1)^2}}}=\dfrac{1}{|A|}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=|A|$

I случај: $A\neq 0$

H_n је хармонијска средина од $x_1,\ldots,x_n$ и важи

$\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=|A|$

II случај $A=0\Rightarrow L_2=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{1+2+\ldots+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=0$

5. **[8]** Дата је функција $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x, & |x|\le 1\\ \frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}(x)+\frac{x-1}{2}, & |x|>1\end{cases}$. Испитати:

а) Непрекидност функције $f(x)$;

б) Диференцијабилност функције $f(x)$.

$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}, & x\in(-\infty,-1)\\ \operatorname{arctg}x, & x\in[-1,1]\\ \frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

Одговор:

а) f је непр. на $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

б) f је диф. на $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

а) $\lim\limits_{x\to-1-}-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}=-\frac{\pi}{4}-1$

$\lim\limits_{x\to-1+}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{4}=f(-1)$ $\Rightarrow f$ има прекид I врсте у $x=-1$

$\lim\limits_{x\to1-}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1+}\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow f$ је непр. у $x=1$

f је непр. на $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

б) $\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to1-}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1+}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f$ је диф. у $x=1$

f није диф. у $x=-1$ јер није непр. у $x=1$

$\Downarrow$

f је диф. на $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

6. **[11]** Детаљно испитати функцију $g(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$ и скицирати њен график.

1° $D(g)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

2° g није ни парна, ни непарна, ни периодична

3° $x=1$ је нула фје g

$g(x)>0\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

$g(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)$

4° $\lim\limits_{x\to-2\pm}g(x)=-\infty\Rightarrow$ $\boxed{x=-2 \text{ је обострана в.а.}}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=\pm\infty\Rightarrow$ $\boxed{\text{нема х.а.}}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+2)^2}=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)-x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-4x^2-4x}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-7x^2-x-1}{(x+2)^2}=-7$

$\boxed{y=x-7 \text{ је обострана коса ас.}}$

$g'(x)=\dfrac{3(x-1)^2(x+2)^2-2(x-1)^3(x+2)}{(x+2)^4}=\dfrac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}$

$g'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-8)\cup(-2,+\infty)\Rightarrow g\nearrow$

$g'(x)<0\Leftrightarrow x\in(-8,-2)\Rightarrow g\searrow$

$M\left(-8,-\frac{81}{4}\right)$ је т. макс.

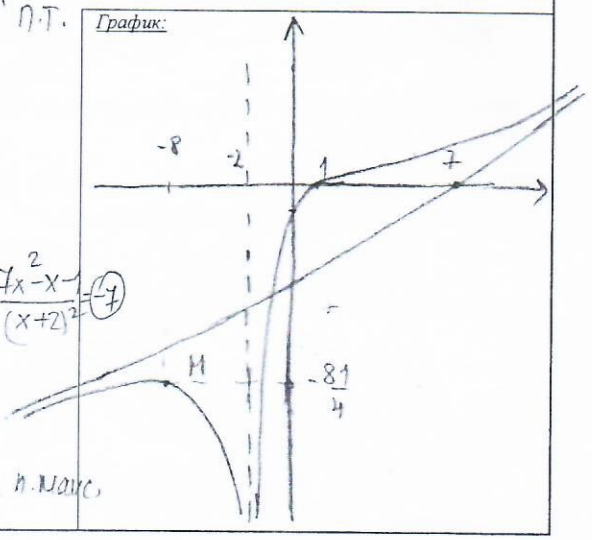
$g''(x)=\dfrac{54(x-1)}{(x+2)^4}$

$g''(x)>0\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)\Rightarrow g$ је конв.

$g''(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)\Rightarrow g$ је конк.

$P(1,0)$ је т.т.

График:



Електротехнички факултет, Београд

МАТЕМАТИКА 1 – Поправни колоквијум – Задаци *14. 1. 2018. г.*

Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. У загради поред сваког задатка стоји број поена које тај задатак носи. Испит се ради максимално **75** min.

Име и презиме:

Сала:

1.	*2.*	*3.*	*Сума:*

Број индекса:

Наставна група:

Одговор:

1. **[5]** Нека је p прост број, $G=\{1,2,\dots,p-1\}$ и операција $\circ$ дефинисана као множење по модулу p на скупу A. Испитати природу алгебарске структуре $(G,\circ)$.

- затв: $a,b\in G \Rightarrow a\circ b\in G\cup\{0\}$ јер је $a\circ b$ остатак при дељењу са p. Пошто је p прост број, онда он није једнак производу два броја, па остатак при дељењу $a\cdot b$ са p никад није $0 \Rightarrow a\circ b\neq 0$
- асоц: $a\cdot(b\cdot c)=a\cdot(k_1p+b\circ c)=ak_1p+a\cdot(b\circ c)=\underbrace{ak_1p+k_2p}_{kp}+a\circ(b\circ c)=kp+a\circ(b\circ c)$

  $(a\cdot b)\cdot c=(g_1p+a\circ b)\cdot c=g_1pc+(a\circ b)\cdot c=\underbrace{g_1pc+g_2p}_{gp}+(a\circ b)\circ c=gp+(a\circ b)\circ c$ $\Rightarrow$ важи асоц.

  стр 206 зад. 25 збирка задатака из алгебре (I део)
- комут: $a\cdot b=kp+a\circ b$, $b\cdot a=gp+b\circ a \Rightarrow k=g$, $a\circ b=b\circ a \Rightarrow$ важи комут.
- неут: $(\exists e\in G)(\forall a\in G)\ e\circ a=a$ тј. остатак при дељењу ea са p је a, па је $e=1$
- инверз: $(\forall a\in G)(\exists a_1\in G)\ a\circ a_1=1$. Треба да покажемо да је неки од бројева $a\circ 1, a\circ 2,\dots,a\circ(p-1)$ једнак 1. Бројеви $a\circ 1, a\circ 2,\dots,a\circ(p-1)$ су различити, јер у супротном, када би за неке i,j важило $a\circ i=a\circ j$, онда би важило $ai\equiv aj \pmod p$ тј $i=j$. Значи $a\circ 1,\dots,a\circ(p-1)$ су различити, па је неки од њих једнак 1. $\Rightarrow$ сваки елемент има инверз. $(G,\circ)$ је Абелова група

Одговор:

2. **[5]** Нека је $a\in\mathbb{R}$ и $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\a&-2&0\\0&a&-2\end{bmatrix}$. За свако $n\in\mathbb{N}$ одредити A^n.

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\0&a&0\end{bmatrix}=-2I+B,\ \text{где је } B=\begin{bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\0&a&0\end{bmatrix}.\quad B^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\a^2&0&0\end{bmatrix}$$

$B^k=0$ за $k\geq 3$

$B^k=0,\ k\geq 3$

$$A^n=(-2I+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2I)^{n-k}B^k=\binom{n}{0}(-2I)^nB^0+\binom{n}{1}(-2I)^{n-1}B+\binom{n}{2}(-2I)^{n-2}B^2=$$

$$=(-2)^nI+n(-2)^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}(-2)^{n-2}B^2=(-2)^n\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+n(-2)^{n-1}\begin{bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\0&a&0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}(-2)^{n-2}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\a^2&0&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(-2)^n&0&0\\n(-2)^{n-1}a&(-2)^n&0\\\frac{n(n-1)}{2}(-2)^{n-2}a^2&n(-2)^{n-1}a&(-2)^n\end{bmatrix},\ n\in\mathbb{N}$$

Одговор:

3. **[5]** Израчунати: ***а)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[k]{x}-1}{x-1}$, $k\in\mathbb{N}$; ***б)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[10]{x}-1)}{(x-1)^9}$.

(а) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[k]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[k]{x}-1}{(\sqrt[k]{x}-1)(\sqrt[k]{x^{k-1}}+\sqrt[k]{x^{k-2}}+\dots+\sqrt[k]{x}+1)}=\frac{1}{k}$$

(б) $$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[10]{x}-1)}{(x-1)^9}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\cdots\frac{\sqrt[10]{x}-1}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{10}=\frac{1}{10!}$$