



Математика 1 – Теорија	Име, презиме, број индекса		Група:	Сала:
	1.	2.		
ЈАНУАРСКИ ИСПИТНИ РОК 14. јануар 2018. г. <u>Напомена:</u> Није дозвољена употреба графитне оловке.				Сума:

1. [25] Дефинисати следеће појмове:

1) **Изоморфизам** два поља

2) **Моноид** (детаљна дефиниција)

Допунити следећу теорему, а затим је доказати:

Теорема: У сваком _____ сваки елемент има _____ инверзни елемент.

Доказ:

Допунити исказе следећих теорема:

1) Нека је F _____ поље карактеристике m . Тада је број m _____.

2) Посматрајмо скупове $GF(m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$, при чему је $m \in \mathbb{N}$, и нека је $m < 11$.

Тада је оно $(GF(m))$ _____ поље за следеће вредности $m =$ _____.

Нека је M скуп свих квадратних матрица другог реда облика $A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $c \in \mathbb{R}$. Коју врсту алгебарске структуре представља уређена тројка $(M, +, \cdot)$, где су наведене операције стандардно сабирање и множење матрица? Одговор образложити.

2. [25] (1.1) Допунити исказ Лагранжове теореме.

Теорема. Нека је f дефинисана на и нека важи:

1) f је ...

2) f

Тада

(1.2) Приказати геометријску интерпретацију **Лагранжове теореме** на примеру функције $f(x)=3x^2+18x-21$ на интервалу $[-6, 2]$.

Скица:	Рачун:	Објашњење:

(2) Дата је функција: $f(x)=\begin{cases} \ln(-x)-1, & x \in [-e, -1] \\ x^3, & x \in (-1, 1) \\ \sin(\pi x/2), & x \in [1, 2] \end{cases}$. Скицирати график ове функције и одредити (ако их има) све тачке локалних екстремума ове функције и све превојне тачке.

Скица:	Рачун и објашњење:

Тачке локалних екстремума су:	Превојне тачке су:

(3) Навести дефиницију локалног максимума функције f .

Дефиниција.



Математика 1 – Теорија

ЈУЛСКИ ИСПИТНИ РОК – 24. јул 2017. г.

ИНТЕГРАЛНИ ИСПИТ

Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.

Име, презиме, број индекса

Група: _____ Сала: _____

1.

2.

Сума:

1. [25] Написати дефиниције следећих појмова:

1) *Групoid*

2) *Подгрупа* дате групе

3) *Абелова група* (детаљна дефиниција)

4) *Изоморфизам* два поља

Допунити следећу теорему, а затим је доказати:

Теорема: У сваком групoidу постоји _____ неутрални елемент.

Доказ:

Допунити следећу теорему, а затим је доказати:

Теорема: У сваком _____ сваки елемент има _____ инверзни елемент.

Доказ:

Нека је M скуп свих квадратних матрица другог реда облика $A = \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix}$, где $a \in \mathbb{R}$. Коју врсту алгебарске структуре представља уређена тројка $(M, +, \cdot)$, где су наведене операције стандардно сабирање и множење матрица? Одговор образложити.

2. [25] (1) Навести дефиницију конвексне функције на интервалу (a, b) .

Дефиниција.

(2.1) По дефиницији, функција је диференцијабилна у тачки a ако

(2.2) Исказати и доказати теорему која повезује појмове непрекидности и диференцијабилности функције у датој тачки a .

Теорема.

Доказ.

(2) Допунити следеће примере (или навести да одговарајући примери не постоје):

Функција $f(x) = \dots$ има локални минимум у тачки $x_0 = -4$, а важи $f'(x_0) = 0$.	График:
Функција $f(x) = \dots$ има локални максимум у тачки $x_0 = 5$, а у тачки x_0 нема извод.	График:
Функција $f(x) = \dots$ нема локални екстремум у тачки $x_0 = 7$, а важи $f'(x_0) = 0$.	График:

Математика 1 - теорија

26. 8. 2017.

Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.

Име, презиме, број индекса

Група:

Сала:

1.

2.

Сума:

1. [25] (1) Допунити исказ следеће теореме, а затим је доказати.

Теорема: Полином $x - b$ је фактор полинома P

Доказ.

- (2) Навести теорему о броју нула полинома над пољем F .

Теорема.

- (3) Навести дефиницију корена реда a комплексног полинома.

Дефиниција.

- (4.1) Нека је дат реалан полином $P(x)$. Ако зnamо да је $x_0 = 5$ корен реда 4 полинома $P'(x)$, шта можемо рећи о томе да ли је $x_0 = 5$ корен, и евентуално ког реда, полинома $P(x)$?

- (4.2) Навести исказ одговарајуће теореме.

Теорема.

2. [25] За дате реченице заокружити да ли представљају дефиниције, аксиоме или теореме и дописати на које исказно слово се односе, тј. о ком појму се ради:

1. $(\forall E > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n > E$ дефиниција аксиома теорема _____

2. $(\exists C \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) |x_n - x| < C\varepsilon$ дефиниција аксиома теорема _____

Дефинисати појмове:

Скупови А и В имају исти кардинални број _____

Проширен скуп реалних бројева _____

Низ рационалних бројева _____

Тачка нагомилавања низа реалних бројева _____

Исказати две **аксиоме** (и њихова имена) које се односе на скуп реалних бројева.

1.

2.

Објаснити појам *неодређени облик*.

Навести три неодређена облика.

1.

2.

3.

Навести пример низа који има *три* тачке нагомилавања (ако постоји) И одредити те тачке нагомилавања.

За скуп $I = [e, \pi)$ наћи:

$\min I =$

$\max I =$

Скуп коме припадају све мајоранте скупа I

Скуп коме припадају све миноранте скупа I

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕОРИЈА
Парцијални испит, 07.02.2016. год.

Име и презиме, број индекса	Група	Сала
1.	2.	Сума

Напомена: није дозвољена употреба графитне оловке.

1. [25]

- 1) Написати дефиниције следећих појмова:
а) Низ $\{x_n\}$ је Кошијев низ.

б) Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Гранична вредност функције f када $x \rightarrow -\infty$ је $+\infty$.

2) Допунити исказ следеће теореме:

Ако је функција φ дефинисана и непрекидна на $[c, d]$ и ако је $\varphi(c) \neq \varphi(d)$ тада

Доказати наведену теорему.

3) Да ли функција $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x) - x^2 + 3$ достиже вредност 2 на интервалу $(0, 1)$?
Одговор детаљно образложити.

4) Навести пример и скицирати график функције h дефинисане на одсечку $[-3, 3]$ која:
на крајевима тог одсечка има вредности различитог знака, нема прекид прве врсте
и за коју је $h(x) \neq 0$ за свако $x \in [-3, 3]$.

График функције $h(x)$

$h(x) =$

5) Одредити тачност следећег тврђења и у случају тачног тврђења навести одговарајућу теорему (теореме) а у случају нетачног тврђења навести контрапример.

Ако су функције f и g дефинисане и непрекидне на \mathbb{R} , тада је функција

$F(x) = e^{f(x)} - 5g^2(x) - 3$ ограничена на $[0, 1]$.

Тачно, на основу:

Нетачно, на основу контрапримера:

2. [25] (1) Навести дефиницију конвексне функције на интервалу (a, b) .

Дефиниција.

(2) Навести Лажбницову формулу за n -ти извод производа две функције, па користећи је израчунати 28. извод функције $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

(3.1) Допунити исказ Кошијеве теореме.

Теорема. Нека су f и g функције дефинисане на и нека важи :

1)

2)

3)

Тада

(3.2) Доказати ову теорему.

Доказ.

(4) Навести теорему о јединствености Тейлоровог полинома.



Математика 1 – Теорија

СЕПТЕМБАРСКИ ИСПИТНИ РОК

27. август 2016. год.

Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.

Име, презиме, број индекса

Група:

Сала:

1.

2.

Сума:

1. [25] Написати дефиниције следећих појмова:

1) *Изоморфизам* два групоида

2) *Подгрупа* дате групе

3) *Поље* (детаљна дефиниција)

4) *Изоморфизам* два поља

У скупу комплексних бројева \mathbb{C} дефинисана је бинарна операција \circ :

$$z_1 \circ z_2 = z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - (1+i).$$

a) Испитати природу алгебарске структуре (\mathbb{C}, \circ) .

б) Уколико је то могућно, одредити скуп K тако да алгебарска структура $(\mathbb{C} \setminus K, \circ)$ буде Абелова група.

Дати детаљно обrazloženje.

Навести пример једне праве подгрупе $(H, *)$ групе $(G, *)$.

$$H = \{ \quad \}$$

Допунити исказ следеће теореме:

Нека је \mathbb{F} _____ поље карактеристике m . Тада је број m облика _____.

2. [25] (1) Допунити дефиницију Маклореновог полинома.

Дефиниција. Ако функција f у околини има....., тада се

$$M_n(x) =$$

назива

(2) Навести дефиницију конвексне функције на интервалу (a, b) .

Дефиниција.

(3) Навести Лajбницову формулу за n -ти извод производа две функције, па користећи је израчунати 18. извод функције $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

(4) Исказати и доказати теорему о изводу количника две функције.

Теорема.

Доказ.



Математика 1 – Теорија

ОКТОБАРСКИ ИСПИТНИ РОК

9. септембар 2017. г.

Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.

Име, презиме, број индекса

Група: _____ Сала:

1.

2.

Сума:

1. [25] Дефинисати следеће појмове:

1) **Изоморфизам** два групоида

2) **Квазигрупа**

3) **Подгрупа**

Допунити следећу теорему, а затим је доказати:

Теорема: У сваком _____ сваки елемент има _____ инверзни елемент.

Доказ:

Исказати Lagrange-ову теорему (за подгрупе):

Допунити исказе следећих теорема:

1) Нека је F _____ поље карактеристике m . Тада је број m

2) Посматрајмо скупове $GF(m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$, при чему је $m \in \mathbb{N}$, и нека је $m < 11$.

Тада је оно ($GF(m)$) _____ поље за следеће вредности $m =$

Нека је M скуп свих квадратних матрица другог реда облика $A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $c \in \mathbb{R}$. Коју врсту алгебарске структуре представља уређена тројка $(M, +, \cdot)$, где су наведене операције стандардно сабирање и множење матрица? Одговор образложити.

2. [25] (1) Испитати конвергенцију низа чији је општи члан $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Наведите исказ теореме коју сте користили за испитивање конвергенције низа (a_n).

Доказати наведену теорему.

(2) Да ли једначина $|x \cos x - x^2 \sin x| = -1$ има бар једно реално решење?
Одговор детаљно обrazложити.

(3) Навести пример и скицирати график функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која има следеће особине:
(3.1) Функција f није непрекидна и није ограничена и $f(0) > 5$;

График функције $f(x)$

$$f(x) =$$

(3.2) Функција f је парна и ограничена функција и нема граничну вредност када x тежи 3.

График функције $f(x)$

$$f(x) =$$

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕОРИЈА
17.09.2016.

Име и презиме, број индекса	Група	Сала

Напомена: није дозвољена употреба графитне оловке.

1.	2.	Сума

1. [25]

1) Испитати тачност следећих тврђења и одговор детаљно образложити.

a) Ако за произвољне матрице A и B важи $A \cdot B = I$ (где је I јединична матрица) тада је B инверзна матрица матрици A .

Тачно

Нетачно

б) Ако су C и D регуларне матрице реда n и I јединична матрица реда n , тада је $\det(C^{-1} \cdot C^T \cdot I \cdot D^2) = 0$.

Тачно

Нетачно

ц) Ако су P и Q дате регуларне матрице истог реда тада матрична једначина $P \cdot X^{-1} - Q = P + Q \cdot X^{-1}$ има јединствено решење.

Тачно

Нетачно

д) У семигрупи $\left(\left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \cdot \right)$, где је · множење матрица, за елемент $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ постоји инверзни елемент.

Тачно

Нетачно

2) Дата је једначина $x + y + z = 0$ где су x, y, z непознате. Навести пример квадратног система линеарних једначина који садржи дату једначину и који нема решења и доказати да нема решења.

2. [25] Нека је дат реалан низ (c_n) . Дефинисати појам коначне граничне вредности с низа (c_n) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \Leftrightarrow \dots$$

За сваки од следећа два исказа заокруживањем одредити тачност, а одговоре поткрепити или доказом, или контрапримером:

Сваки конвергентан низ је ограничен.

- 1. нетачно – контрапример:
- 2. тачно – доказ:

Сваки ограничен низ је конвергентан.

- 1. нетачно – контрапример:
- 2. тачно – доказ:

Навести, уколико постоји, пример:

- 1) једног неодређено дивергентног реалног низа чија бар једна тачка нагомилавања није коначна;
- 2) једне праве несводљиве рационалне функције:

Исказати теорему о уметнутом низу.

У случају када су константе поменуте у исказу претходне теореме коначне, доказати терему о уметнутом низу.

Навести исказ Stolz-ове теореме за низове:

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕОРИЈСКА ПИТАЊА

11.06.2016.

Име и презиме, број индекса	Група	Сала

Напомена: није дозвољена употреба графитне оловке.

1.	2.	Сума

1. [25]

1) Дефинисати следеће појмове:

1⁰ инверзна матрица дате квадратне матице $A_{n \times n}$

2⁰ решење система n линеарних алгебарских једначина са n непознатих.

2) Допунити следеће реченице тако да се добију тачна тврђења, а затим доказати наведена тврђења.

а) Потребан услов за постојање инверзне матрице за дату матицу $A_{n \times n}$ је: _____.

Доказ:

б) Довољан услов да систем n линеарних алгебарских једначина са n непознатих нема решења је: _____.

Доказ:

3) Одредити тачност следећих тврђења. Свако тачно тврђење доказати, а за нетачно тврђење навести детаљно обrazloženje.

а) Ако су A , B и C дате регуларне матрице истог реда тада матична једначина $A \cdot X^{-1} \cdot B - C = A \cdot X^{-1}$ има јединствено решење.

Нетачно

Тачно

(б) У семигрупи $\left(\left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \cdot \right)$, где је \cdot множење матрица, за елемент $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ постоји инверзни елемент.

Нетачно

Тачно

2. [25] Дефинисати следеће појмове, а затим навести по један пример за сваки:

a) ограничен низ:

Пример:

б) конвергентан низ:

Пример:

в) неодређено дивергентан низ:

Пример:

г) нула-низ:

Пример:

За сваки од следећа два исказа заокруживањем одредити тачност, а одговоре поткрепити или доказом, или контрапримером:

Сваки конвергентан низ је ограничен.

- нетачно – контрапример:
- тачно – доказ:

Сваки ограничен низ је конвергентан.

- нетачно – контрапример:
- тачно – доказ:

Навести, уколико постоји, пример:

- 1) једног одређено дивергентног негативног реалног низа:
- 2) једног неодређено дивергентног реалног низа чија бар једна тачка нагомилавања није коначна:
- 3) једног неодређено дивергентног реалног низа који има више од две тачке нагомилавања и који има подниз који је нула-низ:

Навести исказ Stolz-ове теореме за граничне вредности низова:

МАТЕМАТИКА 1 - ТЕОРИЈА
Интегрални испит, 17.01.2016.год.

Ime i prezime, broj indeksa	Grupa	Sala

Напомена: није дозвољена употреба графитне оловке.

1.	2.	Сума

1. [25]

1) Испитати тачност следећих тврђења. Свако тачно тврђење доказати, а за нетачно тврђење навести контрапример.

a) Ако за произвољне матрице A и B важи $A \cdot B = I$ (где је I јединична матрица) тада је B инверзна матрица матрице A .

Тачно, на основу доказа:

Нетачно на основу контрапримера:

б) Ако је A^{-3} регуларна матрица, тада је A^T регуларна матрица.

Тачно, на основу доказа:

Нетачно, на основу контрапримера:

ц) Регуларна матрица има јединствену инверзну матрицу.

Тачно, на основу доказа:

Нетачно, на основу контрапримера:

д) Не постоји неутрални елемент у групoidу $\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & q \end{bmatrix} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}, \cdot \right)$, где је · операција множења матрица.

Тачно, на основу доказа:

Нетачно, на основу контрапримера:

2) Дата је једначина $x + y + z = 0$ где су x, y, z непознате. Навести пример квадратног система линеарних једначина који садржи дату једначину и који нема решења и доказати да нема решења.

2. [25] За дате реченице заокружити да ли представљају дефиниције, аксиоме или теореме и дописати на које исказно слово се односе, тј. о ком појму се ради:

1. $(\forall E > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n < -E$ дефиниција аксиома теорема _____
2. $(\exists C \in \mathbb{R}^+)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) |x_n - x| < C\varepsilon$ дефиниција аксиома теорема _____

Нека је дат реалан низ $a_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. Исказати теорему на основу које се показује да је тај низ конвергентан и да му је гранична вредност нула.

Теорема:

Доказати ту теорему.

Доказ:

Нека је дат реалан низ $nb_n = \frac{\cos 1}{\sqrt{n}} + \frac{\cos 2}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. Исказати теорему на основу које се показује

да је тај низ конвергентан.

Теорема:

Доказати ту теорему.

Доказ:

Уколико је потпуно тачно дат исказ теореме, израчунати граничну вредност низа b_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =$$



Математика 1 – Теорија

ФЕБРУАРСКИ ИСПИТНИ РОК – 7. фебруар 2016. г.
ИНТЕГРАЛНИ ИСПИТ

Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.

Име, презиме, број индекса

Група: _____ Сала: _____

1.

2.

Сума: _____

1. [25] Написати дефиниције следећих појмова:

1) *Бинарна операција* \circ у скупу A .

2) *Изоморфизам* два групоида.

3) *Група.*

4) *Подгрупа* дате групе.

5) *Поље.*

.....За алгебарску структуру (S, \cdot) из задатка 1. навести пример неке њој изоморфне структуре и показати да су оне изоморфне.

Пример:

Изоморфизам:

Доказ изоморфности:

Навести исказ Lagrange-ове теореме (за подгрупе).

Допунити исказе следећих теорема:

- 1) Нека је F _____ поље карактеристике m . Тада је број $m \leq$ _____.
- 2) Посматрајмо скупове $GF(m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$, при чему је $m \in \mathbb{N}$, и нека је $m < 11$.

Тада је оно $(GF(m))$ _____ поље за следеће вредности $m =$ _____

2. [25] (1) Навести дефиницију конвексне функције на интервалу (a, b) .

Дефиниција.

(2) Навести Лажбницову формулу за n -ти извод производа две функције, па користећи је израчунати 28. извод

$$\text{функције } f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

(3.1) Допунити исказ Кошијеве теореме.

Теорема. Нека су f и g функције дефинисане на и нека важи :

1)

2)

3)

Тада

(3.2) Доказати ову теорему.

Доказ.

(4) Навести теорему о јединствености Тейлоровог полинома.