Napomena: U materijalu koji sledi date su samo definicije, iskazi teorema i algoritama a *izostavljeni su primeri i dokazi teorema* **koji su radjeni na časovima predavanja.**

(Literatura:
D.Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić: "Matematika I - Algebra")

Kombinatorika

Kombinatorika je matematička disciplina koja se bavi problemima postojanja, prebrojavanja i konstrukcije elemenata sa zadatim osobinama u konačnim skupovima.

Osnovni kombinatorni principi na kojima se zasnivaju skoro sva prebrojavanja su:

- princip jednakosti: Za konačne skupove A i B i bijekciju $f : A \to B$, važi $|A| = |B|$,
- princip zbira: za disjunktne i konačne skupove A i B važi $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- princip proizvoda: Za konačne skupove A i B važi $|A \otimes B| = |A| \cdot |B|$.

Osnovni kombinatorni objekti

Neka je $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Definicija 1. Permutacija skupa X_n je bilo koja uredjena n-torka različitih elemenata iz tog skupa.

Definicija $1'$. Permutacija skupa X_n je proizvoljno bijektivno preslikavanje skupa $\{1, 2, ...n\}$ na skup X_n.

Primer (...).

Teorema 1. Broj permutacija skupa od n elemenata je $P_n = n!$.

Dokaz (...)

Definicija 2. Varijacija k-te klase skupa X_n je bilo koja uredjena k-torka različitih elemenata is tog skupa.

Definicija $2'$. Varijacija k-te klase skupa X_n je proizvoljno injektivno (1-1) preslikavanje skupa $\{1, 2, ...k\}$ u skup X_n.

Primer (...).

Teorema 2. Broj varijacija k-te klase skupa od n elemenata je $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$.

Dokaz (...)

Definicija 3. Kombinacija k-te klase skupa X_n je bilo koji njegov podskup od k elemenata.

Definicija $3'$. Kombinacija skupa X_n je bilo koje preslikavanje (u oznaci f) tog skupa u skup $\{0, 1\}$. Klasa kombinacije jednaka je $|f^{-1}(1)|$.

Primer (...).

Teorema 3. Broj kombinacija k-te klase skupa od n elemenata je $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)....(n-k+1)}{k!}$.

Dokaz (...)

Definicija 4. Varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa X_n je bilo koja uredjena k-torka njegovih elemenata.

Definicija $4'$. Varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa X_n je bilo koje preslikavanje skupa $\{1, 2, ...k\}$ u skup X_n.

Primer (...).

Teorema 4. Broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata je $\overline{V}_n^k = n^k$.

Dokaz (...).

Definicija 5. (Varijacija sa ponavljanjem datog tipa)
Varijacija sa ponavljanjem k-te klase u kojoj se elementi $x_1, x_2, ...x_n$ skupa X_n pojavljuju redom $m_1, m_2, ...m_n$ puta $(m_1 + m_2 + ... + m_n = k)$ je bilo koja uredjena k-torka njegovih elemenata u kojoj se za svako $i \in \{1, ...n\}$ element x_i pojavljuje m_i puta.

Primer (...).

Teorema 5. Broj varijacija k-te klase sa ponavljanjem datog tipa, skupa od n elemenata je

$$\overline{V}_{m_1, m_2, ...m_n} = \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_n!}.$$

Dokaz (...).

Definicija 6. Kombinacije k-te klase sa ponavljanjem skupa X_n je bilo koji *multiskup* sastavljen od tačno k ne obavezno različitih elemenata skupa X_n.

Definicija $6'$. Kombinacije sa ponavljanjem skupa X_n je bilo koje preslikavanje (u oznaci f) tog skupa u skup $\{0, 1, ...\}$. Klasa kombinacije data je sumom $k = |f^{-1}(1)| + 2|f^{-1}(2)| + ...$

Primer (...).

Teorema 6. Broj kombinacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata je
$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Dokaz (...).

Definicija 7. Neka je n prirodan broj, a $a_1, a_2, ...a_r$ prirodni brojevi takvi da važi $a_1 + a_2 + ... + a_r = n$. Reprezentacija broja n u obliku $a_1 + a_2 + ... + a_r = n$ naziva sa podela (ili razbijanje) tog broja, ili preciznije r-podela.

Definicija 8. *Kompozicija broja* n je bilo koja uredjena podela, tj. podela kod koje je poredak bitan. *Particija broja* n je bilo koja neuredjena podela, tj. podela kod koje je poredak sabiraka nebitan.

Primeri (...)

Teorema 7. 1) Broj kompozicija broja n koje imaju r sabiraka je $\binom{n-1}{r-1}$.

2) Broj svih kompozicija broja n bez ograničenja na broj sabiraka jednak je 2^{n-1}.

Dokaz. (...)

Princip uključenja-isključenja

Ovo je još jedan (specifični) princip kombinatornog prebrojavanja.

Teorema 8. *(princip uključenja-isključenja)* Za konačne skupove $A_1, A_2, ...A_n$ važi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Dokaz (...).