

1. VEKTORSKI PROSTORI

1.1. Polja skalara

Polazni pojam u definisanju pojma vektorskog prostora je pojam polja $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ kao algebarske strukture sa od ranije poznatom aksiomatikom. Napomenimo da neutralni element za sabiranje označavamo sa 0_F i neutralni element za množenje označavamo sa 1_F . Elemente polja \mathbf{F} nazivamo *skalarima*.

Primer 1.1.1. Primeri polja: \mathbf{Z}_p (p -prost broj), \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} .

1.2. Definicija vektorskog prostora

Definicija 1.2.1 Neka je V neprazan skup čije elemente zovemo *vektorima* i neka je $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ polje skalara. Algebarska struktura:

$$\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$$

naziva se *vektorski prostor \mathbf{V} nad poljem \mathbf{F}* ako za binarnu operaciju sabiranja vektora $+ : V^2 \rightarrow V$ i spoljnu operaciju množenja skalara i vektora $\cdot : F \times V \rightarrow V$ važe aksiome:

- (V₁) $(V, +)$ jeste ABELova grupa,
- (V₂) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ za svako $\alpha \in F$ i $x, y \in V$,
- (V₃) $(\alpha +_F \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ za svako $\alpha, \beta \in F$ i $x \in V$,
- (V₄) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot_F \beta) \cdot x$ za svako $\alpha, \beta \in F$ i $x \in V$,
- (V₅) $1_F \cdot x = x$ za svaki $x \in V$.

Drugim rečima, vektorski prostor \mathbf{V} možemo odrediti uređenim parom (V, \mathbf{F}) tako da važi:

- (i) V neprazan skup (njegove elemente zovemo vektorima).
- (ii) \mathbf{F} je polje (njegove elemente zovemo skalarima).
- (iii) U skupu V je definisana binarna operacija $+ : V^2 \rightarrow V$, koju nazivamo sabiranje vektora, takva da važi aksioma (V₁).
- (iv) Definisana je spoljna operacija $\cdot : F \times V \rightarrow V$, koju zovemo množenje vektora skalarom (tj. elementom) polja F za koju važe aksiome (V₂) – (V₅).

Napomena 1.2.1. Uobičajeno je da skalare označavamo malim slovima grčkog alfabeta: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ i da vektore označavamo malim slovima abecede: a, b, c, \dots . Dalje, $\alpha +_F \beta$ označavaćemo sa $\alpha + \beta$, odnosno $\alpha \cdot_F \beta$ označavaćemo sa $\alpha\beta$. U daljem razmatranju nulu polja 0_F i jedinicu polja 1_F označavaćemo sa 0 i 1 respektivno.

Napomena 1.2.2. Neka je \mathbf{V} vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} . Ukoliko je $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, tada vektorski prostor nazivamo *realnim vektorskim prostorom*, dok za $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ nazivamo *kompleksnim vektorskim prostorom*.

1.3. Primeri vektorskih prostora

Primer 1.3.1. Vektorski prostor uređenih n -torki: $\mathbf{F}^n = (F^n, +, \cdot) \dots$

Primer 1.3.2. Vektorski prostor polinoma stepena ne većeg od n : $\mathbf{F}^n[x] = (F^n[x], +, \cdot) \dots$

Primer 1.3.3. Vektorski prostor funkcija: $\mathbf{V} = (F^F, +, \cdot) \dots$

Primer 1.3.4. Opšti funkcijski prostor¹ $\mathbf{W} = (V^X, +, \cdot)$ i specijalni funkcijski vektorski prostori neprekidnih funkcija $C[a, b]$, diferencijabilnih funkcija $D[a, b] \dots$

1.4. Osnovne osobine vektorskih prostora

Teorema 1.4.1. Ako je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} , tada za svaki skalar $\lambda \in F$ i svaki vektor $a \in V$ važi:

1° $\lambda \cdot 0 = 0$,

2° $0 \cdot a = 0$,

3° $\lambda \cdot a = 0 \implies \lambda = 0 \vee a = 0$.

Dokaz.

Teorema 1.4.2. Ako je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} , tada za svaki vektor $a \in V$ važi:

4° $-a = (-1) \cdot a$.

Dokaz.

1.5. Vektorski potprostori

Definicija 1.5.1. Neka je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} . Tada podskup $W \subseteq V$ određuje *vektorski potprostor* \mathbf{W} vektorskog prostora \mathbf{V} ako važi:

1° $W \neq \emptyset$.

2° Za skup W restrikcije operacija $+ = +|_W : W^2 \rightarrow W$ i $\cdot = \cdot|_W : F \times W \rightarrow W$ određuju vektorski prostor $\mathbf{W} = (W, +, \cdot)$.

Drugim rečima, skup $W \subseteq V$ ($W \neq \emptyset$), za vektorski prostor $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$, određuje vektorski potprostor \mathbf{W} vektorskog prostora \mathbf{V} ako je $\mathbf{W} = (W, \mathbf{F})$ vektorski prostor. Prema aksiomatici vektorskih prostora proizvoljni vektorski prostor sadrži nula vektor 0 . Samim tim svaki vektorski prostor \mathbf{V} za koji postoje i ne-nula vektori ($V \neq \{0\}$) ima bar dva tzv. *trivijalna potprostora* ($\{0\}, +, \cdot$) i $(V, +, \cdot)$, svi ostali potprostori nazivaju se *pravi potprostori*.

Teorema 1.5.1. Neprazan podskup $W \subseteq V$ određuje vektorski potprostor \mathbf{W} vektorskog prostora \mathbf{V} nad poljem skalara \mathbf{F} akko važi

$$(\forall x, y \in W)(\forall \alpha, \beta \in F) \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W.$$

Dokaz.

¹gde je V dati vektorski prostor i X dati skup

1.6. Linearna zavisnost

Definicija 1.6.1. Neka je \mathbf{V} vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} . Za $v_1, \dots, v_n \in V$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ vektor

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

predstavlja *linearnu kombinaciju vektora* v_1, v_2, \dots, v_n .

Definicija 1.6.2. Skup svih linearnih kombinacija vektora v_1, \dots, v_n vektorskog prostora \mathbf{V} nad poljem skalara \mathbf{F} određuje skup

$$L(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F\}$$

koji nazivamo *lineal vektora* v_1, \dots, v_n .

Teorema 1.6.1. Neka je \mathbf{V} vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} i neka su $v_1, \dots, v_n \in V$ fiksirani vektori. Tada lineal $L(\{v_1, \dots, v_n\})$ određuje vektorski potprostor vektorskog prostora \mathbf{V} .

Dokaz. ...

Definicija 1.6.3. Neka je \mathbf{V} vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} . Za vektore $v_1, \dots, v_n \in V$ kažemo da su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takvi da je bar jedan različit od nule i pri tom važi:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0.$$

Za vektore $v_1, \dots, v_n \in V$ kažemo da su *linearno nezavisni* ukoliko nisu linearno zavisni.

Napomena 1.6.1. Važi:

$$v_1, \dots, v_n - \text{linearno zavisni} \quad \text{akko} \quad (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n) \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \wedge \neg(\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0)$$

i odatle zaključujemo²:

$$v_1, \dots, v_n - \text{linearno nezavisni} \quad \text{akko} \quad (\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n) \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Teorema 1.6.2. Neka je \mathbf{V} vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} . Vektori $v_1, \dots, v_n \in V$ su linearno zavisni akko je bar jedan od njih linearna kombinacija preostalih vektora.

Primer 1.6.1. ...

Primer 1.6.2. ...

1.7. Baza i dimenzija

Definicija 1.7.1. Neka je \mathbf{V} vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} . Skup vektora $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ jeste *generatorski skup* za vektorski prostor \mathbf{V} ako važi $L(\{x_1, \dots, x_n\}) = V$.

²linearna zavisnost je ekvivalentna sa formulom oblika $(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n) P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge \neg Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$;
linearna nezavisnost je ekvivalentna sa formulom oblika $(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n) \neg P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vee Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,
pri čemu važi tautologija: $\models (\neg P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vee Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \iff (P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \implies Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$

Definicija 1.7.2. Neka je \mathbf{V} vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} . Skup vektora $B = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ jeste *bazni skup* (*baza*) za vektorski prostor \mathbf{V} ako važi:

- 1°. Skup $\{x_1, \dots, x_n\}$ jeste generatortski, tj. $L(\{x_1, \dots, x_n\}) = V$.
- 2°. Skup $\{x_1, \dots, x_n\}$ jeste linearno nezavisan skup vektora u V .

Primer 1.7.1. ...

Primer 1.7.2. ...

Definicija 1.7.3. Ako vektorski prostor ima bar jednu bazu koja sadrži konačno mnogo elemenata, tada se prostor naziva *konačno-dimenzionalni vektorski prostor*.

Teorema 1.7.1. Ako je \mathbf{V} konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} , tada sve baze imaju isti broj elemenata.

Definicija 1.7.4. Ako vektorski prostor \mathbf{V} , takav da $V \neq \{0\}$, nad poljem skalara \mathbf{F} ima bazu sa n elemenata, tada se prirodan broj n naziva *dimenzija konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora*. Koristimo oznaku $n = \dim(V)$.

Napomena 1.7.1. U slučaju trivijalnog vektorskog prostora \mathbf{V} , kada je $V = \{0\}$, smatramo da je nulte dimenzije, tj. $\dim(V) = 0$.

Primer 1.7.3. ...

Napomena 1.7.2. Ako vektorski prostor nema konačnu bazu, tada za takve vektorske prostore pojam baze takođe može uvesti na odgovarajući način. Takvi prostori se nazivaju *beskonačno-dimenzionalni vektorski prostori*.

Primer 1.7.4. ...

Teorema 1.7.2. Neka je \mathbf{V} konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} sa baznim skupom $B = \{x_1, \dots, x_n\}$. Svaki vektor $x \in V$ može se na tačno jedan način izraziti kao linearna kombinacija u odnosu na poredak baznih vektora x_1, \dots, x_n .

Dokaz. ...

Napomena 1.7.3. Neka je \mathbf{V} konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara \mathbf{F} sa baznim skupom $B = \{x_1, \dots, x_n\}$. Za vektor $x \in V$ predstavljanje $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_n \cdot x_n$, u odnosu na poredak baznih vektora x_1, \dots, x_n , određuje *koordinate* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vektora x u bazi B .

1.8. Izomorfizmi vektorskih prostora

Definicija 1.8.1. Dva vektorska prostora $\mathbf{V}_1 = (V_1, +_1, \cdot_1)$ i $\mathbf{V}_2 = (V_2, +_2, \cdot_2)$ nad istim poljem skalara \mathbf{F} su *homomorfni prostori* ako postoji preslikavanje $f : V_1 \rightarrow V_2$ takvo da važi:

$$(\forall x, y \in V_1)(\forall \alpha, \beta \in F) f(\alpha \cdot_1 x +_1 \beta \cdot_1 y) = \alpha \cdot_2 f(x) +_2 \beta \cdot_2 f(y).$$

Preslikavanje f nazivamo *linearni operator ili homomorfizam vektorskog prostora \mathbf{V}_1 u vektorski prostor \mathbf{V}_2* . Posebno, ako je homomorfizam f bijekcija tada ga nazivamo *izomorfizam vektorskog prostora \mathbf{V}_1 u vektorski prostor \mathbf{V}_2* . Same vektorske prostore \mathbf{V}_1 i \mathbf{V}_2 smatramo *izomorfnim prostorima*, što označavamo $\mathbf{V}_1 \cong \mathbf{V}_2$.

Teorema 1.8.2. Svaki n -dimenzionalni vektorski prostor \mathbf{V} nad poljem skalara \mathbf{F} izomorfan je vektorskom prostoru uređenih n -torki \mathbf{F}^n .

2. UNITARNI PROSTORI I ANALITIČKA GEOMETRIJA U \mathbf{R}^3

2.1. Unitarni prostori

Definicija 2.1.1. Vektorski prostor \mathbf{V} nad poljem \mathbf{F} realnih ili kompleksnih skalara ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ili $\mathbf{F} = \mathbf{C}$) naziva se *unitarni* ili *pred-HILBERTov prostor* ako za *skalarni* ili *unutrašnji proizvod* $(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow F$ važe aksiome:

$$(S_1) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \text{ za svako } x, y, z \in V,$$

$$(S_2) \quad (\alpha \cdot x, y) = \alpha(x, y) \text{ za svako } \alpha \in F \text{ i } x, y \in V,$$

$$(S_3) \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \text{ za svako } x, y \in V,$$

$$(S_4) \quad (x, x) \geq 0 \text{ za svako } x \in V,$$

$$(S_5) \quad (x, x) = 0 \iff x = 0 \text{ za svako } x \in V.$$

Na osnovu (S_3) , primetimo da i u slučaju kompleksnog unitarnog prostora vrednosti (x, x) , za $x \in V$, jesu realni brojevi i dotano na osnovu (S_4) jesu nenegativni realni brojevi.

Definicija 2.1.2. *Norma (intezitet) vektora* x iz unitarnog prostora \mathbf{V} je nenegativan broj $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Za tako određenu normu kažemo da je *norma indukovana skalarnim proizvodom*.

Primer 2.1.1. Uvođenje skalarnog proizvoda i norme u vektorski prostor $\mathbf{R}^n \dots$

Primer 2.1.2. Uvođenje skalarnog proizvoda i norme u vektorski prostor $\mathbf{C}^n \dots$

Primer 2.1.3. Uvođenje skalarnog proizvoda i norme u vektorski prostor $C[a, b] \dots$

2.2. Osnovne osobine norme

Teorema 2.2.1. (CAUCHY, БУНЯКОВСКИЙ, SCHWARZ) Neka je \mathbf{V} unitaran prostor nad poljem skalara \mathbf{F} i sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow F$. Tada za normu indukovanu skalarnim proizvodom važi:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in V)$$

sa jednakošću akko su x i y linearno zavisni vektori.

Teorema 2.2.2. Neka je \mathbf{V} unitaran prostor nad poljem skalara \mathbf{F} i sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow F$. Tada za normu indukovanu skalarnim proizvodom važi:

$$1^\circ. \|x\| \geq 0 \quad (x \in V),$$

$$2^\circ. \|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (x \in V),$$

$$3^\circ. \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\alpha \in F, x \in V),$$

$$4^\circ. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{nejednakost}^3 \text{ trougla za } x, y \in V).$$

Dokaz. ...

³jednakost važi akko je $y=0$ ili $x=\alpha y$ za $\alpha \geq 0$

Definicija 2.2.1. Vektorski prostor \mathbf{V} nad poljem skalara \mathbf{F} naziva se *normiran vektorski prostor* ako za normu $\| \cdot \| : V \rightarrow R$ važe aksiome:

- (N₁) $\|x\| \geq 0$ za svako $x \in V$,
- (N₂) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ za svako $x \in V$,
- (N₃) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ za svako $\alpha \in F, x \in V$,
- (N₄) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za svako $x, y \in V$.

Primer 2.2.1. ...

Primer 2.2.2. ...

Definicija 2.2.2. Neka je vektorski prostor \mathbf{V} normiran sa normom $\| \cdot \|$, tada funkcija:

$$d = d(x, y) = \|x - y\| : V^2 \rightarrow R$$

se naziva *metrika na V*.

2.3. Geometrija unitarnih prostora

U ovom delu razmatramo slučaj realnog unitarnog prostora \mathbf{V} i geometriju takvih prostora zasnovanu na nejednakosti CAUCHY–БУННЯКОВСКИЙ–SCHWARZ-a:

$$\left| \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \quad (x, y \neq 0).$$

Definicija 2.3.1. Neka je \mathbf{V} realni unitarni vektorski prostor, tada *ugao između dva ne-nula vektora x i y* određujemo kao realan broj $\varphi = \angle(x, y) \in [0, \pi]$ takav da važi:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (x, y \neq 0).$$

Definicija 2.3.2. Za ne-nula vektore x i y kažemo da su *ortogonalni vektori* u unitarnom prostoru \mathbf{V} ako je $(x, y) = 0$, navedeno označavamo $x \perp y$.

Napomena 2.3.1. Dodatno smatraćemo da je nula vektor ortogonalan na svaki vektor iz unitarnog prostora \mathbf{V} .

Definicija 2.3.3. Za dva vektora x i y kažemo da su *paralelni (kolinearni) vektori* u unitarnom prostoru \mathbf{V} ako su linearno zavisni, navedeno označavamo $x \parallel y$.

Teorema 2.3.2. Neka su x i y međusobno ortogonalni vektori unitarnog prostora \mathbf{V} , tada važi:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

Dokaz. ...

Teorema 2.3.1. Neka su x i y vektori unitarnog prostora \mathbf{V} , tada važi:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Definicija 2.3.4. Skup vektora $\{x_1, \dots, x_n\}$ unitarnog prostora \mathbf{V} je *ortogonalan skup vektora* ako za svaka dva različita indeksa $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi $(x_i, x_j) = 0$. Ukoliko, pored prethodnog, važi i $\|x_i\| = 1$ za svaki indeks $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tada taj skup vektora je *ortonormiran skup vektora*.

Teorema 2.3.3. U unitarnom prostoru svaki ortogonalni skup ne-nula vektora jeste linearno nezavisan.

Dokaz. ...

2.4. Vektori u R^3

Za realni vektorski prostor R^3 uređeni par (P, Q) određuje *usmerenu duž* \overrightarrow{PQ} za $P, Q \in R^3$. U ovom delu definišemo pojam vektora u R^3 polazeći od skupa svih usmerenih duži nad kojima razmatramo jednakost usmerenih duži na način koji sleduje. Usmerene duži \overrightarrow{PQ} i \overrightarrow{XY} su jednake, u oznaci $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{XY}$, ako su ispunjeni sledeći geometrijski uslovi: (i) prave $p(P, Q)$ i $p(X, Y)$ su paralelne; (ii) poluprave $p[P, Q)$ i $p[X, Y)$ su isto usmerene i (iii) duži PQ i XY su podudarne. Relacija jednakosti usmerenih duži jeste jedna relacija ekvivalencije skupa svih usmerenih duži. Vektor \vec{a} u R^3 definišemo kao klasu ekvivalencije:

$$\vec{a} \stackrel{def}{=} \{ \overrightarrow{XY} \mid \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} \}_{\overrightarrow{PQ}}$$

gde je \overrightarrow{PQ} fiksiran predstavnik klase ekvivalencije. Nula vektor $\vec{0}$ je klasa ekvivalencije za koju se prva i druga koordinata usmerene duži podudaraju. Uobičajeno je da oznaku predstavnika klase poistovećujemo sa oznakom klase.

Teorema 4.1.1. Za vektor \vec{a} u R^3 postoji tačno jedna tačka $D \in R^3$ takva da je $\vec{a} = \overrightarrow{OD}$, gde je $O = O(0, 0, 0)$ (koordinatni početak).

Napomena 4.1.1. Tačka $D = D(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ određuje *koordinate vektora* \vec{a} , što zapisujemo $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Skup vektora u R^3 jeste skup:

$$V \stackrel{def}{=} \{ \vec{a} \mid \vec{a} - \text{vektor u } R^3 \},$$

koji predstavlja količinski skup polaznog skupa usmerenih duži po relaciji ekvivalencije jednakosti usmerenih duži. Za vektor $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma) \in V$ *intezitet vektora u R^3* određen je sa $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$. Nad skupom vektora V definišemo dve operacije:

1^o. *Sabiranje vektora* $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \in V$ određeno je vektorom $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$, gde je $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RS}$.

2^o. *Množenje skalara* $\alpha \in R$ i vektora $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} \in V$ određeno je sa vektorom $\alpha \cdot \vec{a}$ tako da:

a) Ako je $\alpha \neq 0$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$ tada (i) pravac vektora $\alpha \cdot \vec{a}$ je paralelan sa pravcem vektora \vec{a} ; (ii) smer vektora $\alpha \cdot \vec{a}$ je isti sa smerom vektora \vec{a} ukoliko je $\alpha > 0$, inače je suprotnog smera ukoliko je $\alpha < 0$ i (iii) $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

b) Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ tada $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Teorema 2.4.2. Skup vektora V u odnosu na sabiranje vektora $+$: $V^2 \rightarrow V$ i množenje realnog skalara i vektora \cdot : $R \times V \rightarrow V$ određuje jedan realan vektorski prostor $\mathbb{V} = (V, +, \cdot)$.

2.5. Skalarni proizvod vektora u R^3

Definicija 2.5.1. Neka su dati vektori $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \in V$, tada *skalarni proizvod vektora* \vec{a} i \vec{b} u R^3 , u oznaci $\vec{a} \circ \vec{b}$, jeste realan broj:

$$\vec{a} \circ \vec{b} \stackrel{def}{=} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Teorema 2.5.1. Realni vektorski prostor \mathbb{V} vektora u R^3 određuje unitaran prostor u odnosu na skalarni proizvod $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \circ \vec{b}$ za $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Tada, norma indukovana skalarnim proizvodom je $\|\vec{a}\| = |\vec{a}|$ za $\vec{a} \in V$.

Na osnovu geometrije unitarnih prostora za dva ne-nula vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V$ važi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

gde je $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ugao između dva posmatrana vektora. Odatle sleduje:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b} \quad (\vec{a}, \vec{b} \in V).$$

Definicija 2.5.2. Neka je V unitarni prostor vektora u R^3 i neka je $\vec{a} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ fiksiran ne-nula vektor. *Algebarska vrednost ortogonalne projekcije vektora $\vec{v} \in V$ na vektor \vec{a}* jeste broj $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{a})$. *Ortogonalna projekcija vektora $\vec{v} \in V$ na vektor \vec{a}* jeste vektor $\vec{v}' \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_{\vec{a}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

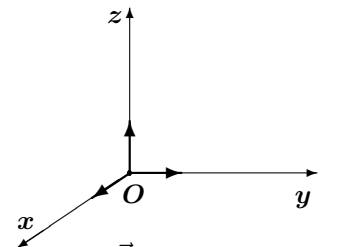
Napomena 2.5.1. Važi: $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{v}) = \begin{cases} |\vec{v}'| & : \text{ ako su } \vec{v}' \text{ i } \vec{a} \text{ istog smera,} \\ -|\vec{v}'| & : \text{ inače.} \end{cases}$

Teorema 2.5.2. Za ne-nula vektore \vec{a}, \vec{b} važi: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{pr}_{\vec{b}}(\vec{a})$.

Dokaz. ...

2.6. Vektorski proizvod vektora u R^3

Neka je V unitarni prostor vektora u R^3 . Posmatrajmo pravaougli koordinatni sistem $Oxyz$, gde je $\vec{i} = (1, 0, 0)$ sa $[Ox]$ -poluose, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ sa $[Oy]$ -poluose i $\vec{k} = (0, 0, 1)$ sa $[Oz]$ -poluose. Smatramo da uređena trojka vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ određuje *desni trijedarski* ako je smer poluose $[Oz]$ tako određen da rotacija poluose $[Ox]$ ka poluosi $[Oy]$, u smeru suprotnom od kretanja kazaljke sata, ima najkraći put gledano sa tačaka poluose $[Oz]$. Dalja razmatranja odnosiće se na prethodno određen koordinatni sistem, sa fiksiranim trijedrom desne orijentacije⁴ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Za tri vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ smatramo da uređena trojka vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ određuje u koordinatnom sistemu $Oxyz$:



(i) *desni trijedarski* ako: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0,$

(ii) *levi trijedarski* ako: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} < 0;$

u suprotnom ne određuju trijedarski ako je ispunjeno: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

Definicija 2.6.2. Za dva vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \in V$ *vektorski proizvod vektora \vec{a} i \vec{b}* određen je kao vektor:

$$\vec{a} \times \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(1, 0, 0)}_{\vec{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(0, 1, 0)}_{\vec{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{k}},$$

tj.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

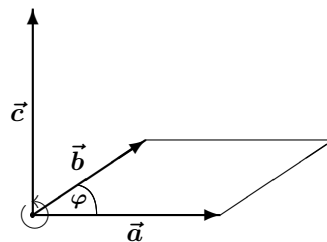
⁴druga mogućnost je da je fiksiran trijedarski leve orijentacije

Teorema 2.6.1 Za dva ne-nula vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \in V$, koji nisu paralelnih pravaca, vektorski proizvod $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ima sledeće osobine:

1⁰. Pravac vektora \vec{c} je normalan na ravan koju određuju vektori \vec{a} i \vec{b} .

2⁰. Smer vektora \vec{c} je određen tako da uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bude desni trijedar.

3⁰. Intezitet vektora \vec{c} je određen veličinom površine paralelograma koji je formiran nad vektorima \vec{a} i \vec{b} , tj. važi $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, za ugao $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.



Dokaz. 1⁰. ... 2⁰. ...

Napomena 2.6.1. Smer vektora \vec{c} je takav da rotacija vektora \vec{a} ka vektoru \vec{b} , u smeru suprotnom od kretanja kazaljke sata, ima najkraći put gledano sa završne tačke vektora \vec{c} .

Teorema 2.6.2. Za skalar $\lambda \in R$ i vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V$ važi:

- (i) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \parallel \vec{b}$,
- (ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
- (iii) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$,
- (iv) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$.

2.7. Mešoviti vektorski proizvod vektora u R^3

Definicija 2.7.1. Za tri vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ mešoviti vektorski proizvod vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} određen je kao realan broj:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Teorema 2.7.1. Mešoviti vektorski proizvod vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ može se predstaviti kao determinanta:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. ...

Posledica 2.7.1. Važi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}].$$

Teorema 2.7.2. Ako vektori $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ nisu koplanarni u R^3 , tada apsolutna vrednost njihovog mešovitog proizvoda jednaka je zapremini V paralelopipeda konstruisanog nad ta tri vektora dovedena na zajednički početak, tj. $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.

Dokaz. ...

Napomena 2.7.1. Za vektore $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ važi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - koplanarni u } R^3 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - linearno zavisni u } R^3,$$

odnosno:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - nekoplanarni u } R^3 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - linearno nezavisni u } R^3.$$

2.8. Tačka, prava i ravan u R^3

(i) **Tačka u R^3 .** Rastojanje između tačaka $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2) \in R^3$ dato je formulom:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Tačka $M = M(x, y, z) \in R^3$ sa koordinatama:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \quad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \quad (m, n > 0)$$

deli duž M_1M_2 u razmeri $|M_1M| : |MM_2| = m : n$.

(ii) **Prava u R^3 .** Za tačku $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ i ne-nula vektor $\vec{p} = (a, b, c) \in V$ postoji tačno jedna prava p u R^3 koja sadrži tačku M_0 i ima vektor pravca \vec{p} . Neka je $\vec{r} = (x, y, z)$ vektor položaja proizvoljne tačke $M = M(x, y, z) \in p$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$), tada *vektorski oblik jednačine prave* p je dat sa:

$$(*) \quad \vec{r} = \vec{r}_{M_0} + t \cdot \vec{p} \quad (t \in R).$$

Prethodna formula kojom se određuje skup tačaka M u R^3 , u zavisnosti od $t \in R$, može se uzeti za definiciju prave p . Na osnovu vektorskog oblika jednačine prave izvode se razni oblici jednačine prave koje navodimo.

Parametarske jednačine prave:

$$x = x_0 + t \cdot a, \quad y = y_0 + t \cdot b, \quad z = z_0 + t \cdot c \quad (t \in R).$$

Kanonske jednačine prave:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t \quad (t \in R).$$

Ako je $a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0$ u prethodnoj jednakosti članovi koji dovode do deljenja sa nulom se izostavljaju. Pri tom, dodatno, ako je $a = 0$ pišemo $x = x_0$, ako je $b = 0$ pišemo $y = y_0$, ako je $c = 0$ pišemo $z = z_0$.

Jednačina prave kroz dve tačke $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2) \in R^3$ je data u obliku kanonske jednačine:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t \quad (t \in R).$$

Prethodna formula kojom se određuje skup tačaka M u R^3 , u zavisnosti samo od $t \in [0, 1]$, može se uzeti za definiciju duži M_1M_2 .

Formula za rastojanje proizvoljne tačke $M = M(x_M, y_M, z_M) \in R^3$ *do prave* p , koja je određena⁵ sa tačkom $M_0 = M(x_0, y_0, z_0) \in p$ i vektorom $\vec{p} = (a, b, c) \in V$, je data sa:

$$d(M, p) = \frac{|(\vec{r}_M - \vec{r}_{M_0}) \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}.$$

Formula za rastojanje između dve prave (p) $\vec{r} = \vec{r}_{M_1} + t \cdot \vec{p}$ ($t \in R$) i (q) $\vec{r} = \vec{r}_{M_2} + s \cdot \vec{q}$ ($s \in R$) je data sa:

$$d(p, q) = \frac{|(\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1}) \circ (\vec{p} \times \vec{q})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|} \quad (\vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0}).$$

⁵ $\vec{r} = \vec{r}_{M_0} + t \cdot \vec{p} \quad (t \in R)$

(iii) Ravan u R^3 . Za tačku $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ i ne-nula vektor $\vec{n} = (A, B, C) \in V$ postoji tačno jedna ravan π u R^3 koja sadrži tačku M_0 i ima vektor normale \vec{n} . Neka je $\vec{r} = (x, y, z)$ vektor položaja proizvoljne tačke $M = M(x, y, z) \in \pi$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$), tada *vektorski oblik jednačine ravni* π je dat sa:

$$(**) \quad (\vec{r} - \vec{r}_{M_0}) \circ \vec{n} = 0.$$

Prethodna formula kojom se određuje skup tačaka M u R^3 može se uzeti za definiciju ravni π . Odatle se izvode razni oblici jednačine ravni koje navodimo.

Jednačina ravni kroz datu tačku:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Opšti oblik jednačine ravni:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0).$$

Segmentni oblik jednačine ravni:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \left(a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C} \right),$$

određujemo za $D \neq 0$. Za tačke $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = M_3(x_3, y_3, z_3) \in R^3$ jednačina ravni π kroz tri tačke određena je iz $[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}] = \vec{0}$, tj.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (M = M(x, y, z) \in \pi).$$

Rastojanje tačke $T = T(x_T, y_T, z_T) \in R^3$ do ravni π date u opštem obliku $Ax + By + Cz + D = 0$ je dato sa:

$$d(T, \pi) = \frac{|Ax_T + By_T + Cz_T + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Na kraju napomenimo da se prava može zadati i kao presek dve ravni:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

pri čemu $(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) \neq \vec{0}$.

3. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

1⁰. *Sistem linearnih jednačina*, nad poljem \mathbf{F} , za n -torku nepoznatih (x_1, \dots, x_n) nad poljem i konstante $a_{ij}, b_i \in F$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$ i $j \in \{1, 2, \dots, n\}$), jeste konjukcija jednačina:

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Ako je $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, tada sistem linearnih jednačina (S) se naziva *homogeni sistem*. U suprotom ako postoji $b_i \neq 0$, sistem linearnih jednačina (S) se naziva *nehomogeni sistem*. Skalare $b_1, b_2, \dots, b_m \in F$ nazivamo slobodnim članovima sistema.

Sistem linearnih jednačina (S) se može napisati u matričnom obliku:

$$(S) \quad Ax = b \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

pri čemu je $A = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$ – *matrica koeficijenata*, $x = [x_i]$ – *matrica kolona nepoznatih* nad $F^{n \times 1}$ i $b = [b_i] \in F^{m \times 1}$ – *matrica kolona slobodnih članova*. Sistem linearnih jednačina (S) naziva se *saglasan sistem* (neprotivurečan, moguć) ako postoji matrica kolona $\alpha = [\alpha_i] \in F^{n \times 1}$ takva da za $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ konjukcija jednačina iz (S) jeste tačna. Matrica kolona α se naziva *rešenje sistema linearnih jednačina (S)*. U suprotnom ako za sistem (S) ne postoji rešenje, tada sistem linearnih jednačina (S) se naziva *nesaglasan sistem* (protivurečan, nemoguć).

2⁰. U cilju diskusije saglasnosti – nesaglasnosti sistema linearnih jednačina (S) razmatra se pojam ranga.

Definicija 3.1. Neka je data matrica A formata $m \times n$ nad poljem \mathbf{F} , tj. $A \in F^{m \times n}$. *Rang matrice* A jeste broj r , u oznaci $\text{rang}(A) = r$, takav da u matrici A postoji kvadratna regularna submatrica M reda r tako da su sve kvadratne submatrice većeg reda od r singularne. Matricu M nazivamo *glavnom submatricom*.

Napomena 3.1. Ako matrica $A = [0] \in F^{m \times n}$ jeste nula matrica ($A = 0$), tada $r = 0$. U suprotnom, ako matrica $A = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$ nije nula matrica, tada $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Sveukupno za matricu $A \in F^{m \times n}$ važi: $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Primer 3.1. ...

Teorema 3.1. Za matricu $A \in F^{m \times n}$ važi $\text{rang}(A^T) = \text{rang}(A)$.

Dokaz. ...

Definicija 3.2. Za matricu $A \in F^{m \times n}$ elementarne transformacije matrice A su sledeće transformacije:

(i) Zamena mesta dve vrste (ili kolone).

(ii) Množenje jedne vrste (ili kolone) skalarom $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje elemenata jedne vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim skalarom α odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone).

Definicija 3.3. Matrice $A, B \in F^{m \times n}$ su ekvivalentne matrice, što označavamo $A \cong B$, ako se mogu dobiti jedna iz druge pomoću konačnog broja elementarnih transformacija.

Teorema 3.2. Neka je data matrica $A \in F^{m \times n}$ i neka je matrica $A' \in F^{m \times n}$ nastala zamenom i -te i j -te vrste (kolone). Tada važi:

$$\text{rang}(A') = \text{rang}(A).$$

Teorema 3.3. Neka je data matrica $A \in F^{m \times n}$ i neka je $\alpha \in F \setminus \{0\}$ proizvoljan ne-nula skalar. Tada:

$$\text{rang}(\alpha A) = \text{rang}(A).$$

Teorema 3.4. Neka je data matrica $A \in F^{m \times n}$ i neka su izdvojeni vektori vrste $v_i = [a_{i1} \dots a_{in}] \in F^{1 \times n}$ ($i = 1, \dots, m$). Ako je $\text{rang}(A) = r$, tada među vektor vrstama v_i postoji tačno r linearno nezavisnih vektora tako da preostalih $m - r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Posledica 3.1. Važi $\text{rang}(A) = \dim(V_v)$, gde $V_v = L(\{v_1, \dots, v_m\})$ određuje vektorski prostor vrsta \mathbf{V}_v .

Teorema 3.4'. Neka je data matrica $A \in F^{m \times n}$ i neka su izdvojeni vektori kolone $w_j = [a_{1j} \dots a_{mj}]^T \in F^{m \times 1}$ ($j = 1, \dots, n$). Ako je $\text{rang}(A) = r$, tada među vektor kolonama w_j postoji tačno r linearno nezavisnih vektora tako da preostalih $n - r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Posledica 3.1'. Važi $\text{rang}(A) = \dim(V_k)$, gde $V_k = L(\{w_1, \dots, w_n\})$ određuje vektorski prostor kolona \mathbf{V}_k .

Teorema 3.5. Neka je data matrica $A \in F^{m \times n}$ i neka je matrica $B \in F^{m \times n}$ dobijena od matrice A tako što su elementima jedne vrste (kolone) matrice A dodati elementi neke druge vrste (kolone) pomnoženi skalarom $\alpha \in F$. Tada važi:

$$\text{rang}(B) = \text{rang}(A).$$

Teorema 3.6. Elementarne transformacije ne menjaju rang matrice.

3⁰. Neka je dat sistem linearnih jednačina (\mathcal{S}). Elementarne transformacije sistema (\mathcal{S}) su određene kao sledeće transformacije:

(i) Zamena mesta dve jednačine.

(ii) Množenje jedne jednačine skalarom $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje jedne jednačine, prethodno pomnožene nekim skalarom α odgovarajućoj drugoj jednačini.

Napomena 3.2. Za elementarnu transformaciju sistema linearnih jednačina (\mathcal{S}) možemo uzeti i zamenu dva sabiraka u jednoj jednačini samo ako se odgovarajuće zamene izvrše u svim jednačinama sistema tako da se iste nepoznate pišu jedne ispod drugih. Ovom transformacijom se vrši zamena redosleda u nizu nepoznatih!

Teorema 3.7. Elementarnim transformacijama skup rešenja sistema (\mathcal{S}) se ne menja.

Za sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S}) Ax = b$ matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m \times n} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in F^{m \times (n+1)}$$

nazivaju se *matrica sistema* i *proširena matrica sistema* respektivno. Tada važi sledeće tvrđenje:

Teorema 8. (KRONECKER – CAPELLI) Sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S}) Ax = b$ jeste saglasan akko važi:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(B).$$

Dokaz. ...

4⁰. Za matricu koeficijenta $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ i matricu kolonu nepoznatih $x = [x_i]$ nad $F^{n \times 1}$ neka je dat homogeni sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \quad Ax = 0 \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Saglasno KRONECKER – CAPELLIjevoj teoremi linearan sistem (\mathcal{S}_0) je uvek saglasan i ima rešenje. Jedno takvo rešenje je matrica kolona $\mathbf{0} = [0, \dots, 0]^T \in F^{n \times 1}$ koju nazivamo *trivijalno rešenje*. Sa sledećom teoremom određujemo kada homogeni sistem ima i druga, takozvana *netrivijalna rešenja*.

Teorema 3.9. Homogeni sistem (\mathcal{S}_0) od m -linearnih jednačina sa n -nepoznatih ima jedinstveno trivijalno rešenje akko je $\text{rang}(A) = n$ (tada je $m \geq n$). Inače, homogeni sistem (\mathcal{S}_0) ima i netrivijalna rešenja akko je $\text{rang}(A) = r < n$, pri čemu je moguće $n - r$ nepoznatih izabrati proizvoljno.

Posledica 3.2. (i) Svaki homogeni sistem kod koga je $m < n$ ima i netrivijalna rešenja.

(ii) Svaki homogeni sistem kod koga je⁶ $m = n$ ima netrivijalna rešenja akko je $|A| = 0$ (tada je $\text{rang}(A) < n$).

(iii) Svaki homogeni sistem kod koga je $m > n$ ekvivalentan je, primenom GAUSSovog algoritma, sa homogenim sistemom sa tačno $r \leq n$ jednačina ($r = \text{rang}(A)$). Dakle, ovaj slučaj se svodi na jedan od prethodna dva slučaja.

Teorema 3.10. Skup svih rešenja homogenog sistema (\mathcal{S}_0) ima strukturu vektorskog prostora.

Teorema 3.11. Svaki sistem linearnih jednačina:

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\},$$

za $a_{ij}, b_i \in F$ ($i = 1, \dots, m \wedge j = 1, \dots, n$), može se GAUSSovim algoritmom, elementarnim transformacijama,

⁶tzv. homogeni kvadratni sistem

dovesti do ekvivalentnog trougaonog sistema:

$$(\mathcal{S}_T) \left\{ \begin{array}{l} p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \dots + p_{1r}y_r = q_1 - p_{1(r+1)}y_{r+1} - \dots - p_{1n}y_n \\ p_{22}y_2 + \dots + p_{2r}y_r = q_2 - p_{2(r+1)}y_{r+1} - \dots - p_{2n}y_n \\ \vdots \\ p_{rr}y_r = q_r - p_{r(r+1)}y_{r+1} - \dots - p_{rn}y_n \\ 0 = \mu \end{array} \right.$$

za $p_{ij}, q_i \in F$ ($i = 1, \dots, r \wedge j = i, \dots, n$), $\mu \in F$ i $r = \text{rang}(A) \leq n$. Pri tome je $p_{11} \cdot p_{22} \cdot \dots \cdot p_{rr} \neq 0$ i (y_1, \dots, y_n) predstavlja jednu permutaciju od (x_1, \dots, x_n) .

Napomena 3.3. Sistem (\mathcal{S}) je saglasan akko je $\mu=0$. Ako je sistem (\mathcal{S}) homogen tada je $q_1 = \dots = q_r = \mu=0$.



4. KARAKTERISTIČNI KORENI I VEKTORI

1⁰. Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$. Glavni predmet proučavanja ovog dela su skalari $\lambda \in F$ i ne-nula matrice kolone $x = [x_1 \dots x_n]^T \in F^{n \times 1}$ koji ispunjavaju uslov $Ax = \lambda x$, tj. za koje važi:

$$(K) \quad (A - \lambda I)x = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array} \right\}.$$

Definicija 4.1. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ homogeni sistem (K) se naziva *karakterističan (sopstveni) sistem matrice A*. Skalar $\lambda \in F$ se naziva *karakteristična (sopstvena) vrednost matrice A* ako za taj skalar karakterističan sistem ima netrivialno rešenje $x = [x_1 \dots x_n]^T \in F^{n \times 1}$ – *karakteristični (sopstveni) vektor matrice A koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ* .

Primetimo da potreban i dovoljan uslov da karakterističan sistem (K) ima netrivialno rešenje je dat sa:

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Definicija 4.2. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ polinom:

$$P_n(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix}$$

se naziva *karakteristični (sopstveni) polinom matrice A*. Koreni karakterističnog polinoma se nazivaju *karakteristični (sopstveni) koreni matrice A* i skup svih tih korena određuju *spektar matrice A*.

Napomena 4.1. Za matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ pojmovi karakteristične vrednosti i karakterističnog korena se podudaraju. Zaista, na osnovu Posledice 3.2. (Teoreme 3.9.) skup skalara $\lambda \in F$ za koje razmatramo karakterističan sistem (K) matrice A , tako da ima netrivialna rešenja x u $F^{n \times 1}$, je konačan i određen je spektrom matrice A . Napomenimo da za svaki skalar $\lambda \in F$ izvan spektra matrice, homogeni sistem (K) ima samo trivialno rešenje $x = 0$ u $F^{n \times 1}$.

Definicija 4.3. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ *karakteristični (sopstveni) potprostor matrice A*, koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ , jeste skup svih vektora x u $F^{n \times 1}$ koji su rešenje karakterističnog sistema uključujući i nula vektor $x = 0$ u $F^{n \times 1}$.

Primer 4.1. Odrediti karakteristične vrednosti, vektore i potprostore sledećih matrica:

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Proveriti rezultate koji su dobijeni pomoću Maple-a:

```
> restart;
> with(linalg):
> A:=matrix([[3,2,0],[2,4,-2],[0,-2,5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> charpoly(A,lambda); # karakteristični polinom
```

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28$$

```
> e:=eigenvalues(A); # karakteristične vrednosti
```

$$e := 1, 4, 7$$

```
> v:=eigenvectors(A); # karakteristični vektori
```

$$v := [1, 1, \{-2, 2, 1\}], [4, 1, \{2, 1, 2\}], [7, 1, \{1, 2, -2\}]$$

```
> v1:=v[1]; # za jednostruki koren lambda_1 = 1 karakterističan potprostor je generisan sa [-2, 2, 1]^T
```

$$v1 := [1, 1, \{-2, 2, 1\}]$$

```
> v2:=v[2]; # za jednostruki koren lambda_2 = 4 karakterističan potprostor je generisan sa [2, 1, 2]^T
```

$$v2 := [4, 1, \{2, 1, 2\}]$$

```
> v3:=v[3]; # za jednostruki koren lambda_3 = 7 karakterističan potprostor je generisan sa [1, 2, -2]^T
```

$$v3 := [7, 1, \{1, 2, -2\}]$$

Za karakteristične vrednosti λ_i odgovarajući karakteristični potprostori V_i i karakteristični vektori \vec{v}_i su dati redom sa:

$$\lambda_1 = 1 : \quad V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in R \right\} \quad \text{i} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \quad (t \in R \setminus \{0\}),$$

$$\lambda_2 = 4 : \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in R \right\} \quad \text{i} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} \quad (t \in R \setminus \{0\}),$$

$$\lambda_3 = 7 : \quad V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in R \right\} \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{bmatrix} \quad (t \in R \setminus \{0\}).$$

(ii)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Proveriti rezultate koji su dobijeni pomoću Maple-a:

```
> restart;
> with(linalg):
> B:=matrix([[3,1,1],[1,3,1],[0,0,2]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> charpoly(B,lambda); # karakteristični polinom
```

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16$$

```
> e:=eigenvalues(B); # karakteristične vrednosti
```

$$e := 2, 2, 4$$

```
> v:=eigenvectors(B); # karakteristični vektori
```

$$v := [2, 2, \{-1, 1, 0\}], [2, 2, \{-1, 1, 0\}], [4, 1, \{1, 1, 0\}]$$

> $v1:=v[1]$; # za dvostruki koren $\lambda_{1,2} = 2$ karakterističan potprostor je generisan sa $[-1, 1, 0]^T$ i $[-1, 0, 1]^T$

$$v1 := [2, 2, \{[-1, 1, 0], [-1, 0, 1]\}]$$

> $v3:=v[3]$; # za jednostruki koren $\lambda_3 = 4$ karakterističan potprostor je generisan sa $[1, 1, 0]^T$

$$v3 := [4, 1, \{[1, 1, 0]\}]$$

Za karakteristične vrednosti λ_i odgovarajući karakteristični potprostori V_i i karakteristični vektori \vec{v}_i su dati redom sa:

$$\lambda_{1,2} = 2 : \quad V_{1,2} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q \mid p, q \in R \right\} \quad \text{i} \quad \vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} -p-q \\ p \\ q \end{bmatrix} \quad (p, q \in R \wedge \neg(p = q = 0)),$$

$$\lambda_3 = 4 : \quad V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in R \right\} \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in R \setminus \{0\}).$$

Primetimo da je dimenzija $\dim(V_{1,2}) = 2$, u ovom primeru, jednaka redu $r = 2$ višestrukosti karakterističnog korena $\lambda_{1,2}$.

(iii)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 1 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix}$$

Proveriti rezultate koji su dobijeni pomoću **Maple-a**:

> **restart**;

> **with(linalg)**:

> **C:=matrix**([[2,-10,6],[8,-15,-1],[16,-15,3]]);

$$C := \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 8 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix}$$

> **charpoly**(C, λ); # karakteristični polinom

$$-\lambda^3 - 10\lambda^2 + 100\lambda + 1000$$

> **e:=eigenvalues**(C); # karakteristične vrednosti

$$e := -10, -10, 10$$

> **v:=eigenvectors**(C); # karakteristični vektori

$$v := [-10, 2, \{[1, 3/2, 1/2]\}], [10, 1, \{[4, 1, 7]\}]$$

> $v1:=v[1]$; # za dvostruki koren $\lambda_{1,2} = -10$ karakterističan potprostor je generisan sa $[1, 3/2, 1/2]^T$

$$v1 := [-10, 2, \{[1, 3/2, 1/2]\}]$$

> $v3:=v[3]$; # za jednostruki koren $\lambda_3 = 10$ karakterističan potprostor je generisan sa $[4, 1, 7]^T$

$$v3 := [10, 1, \{[4, 1, 7]\}]$$

Za karakteristične vrednosti λ_i odgovarajući karakteristični potprostori V_i i karakteristični vektori \vec{v}_i su dati redom sa:

$$\lambda_{1,2} = -10 : \quad V_{1,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in R \right\} \quad \text{i} \quad \vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} t \\ 3/2 \cdot t \\ 1/2 \cdot t \end{bmatrix} \quad (t \in R \setminus \{0\}),$$

$$\lambda_3 = 10 : \quad V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in R \right\} \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4t \\ t \\ 7t \end{bmatrix} \quad (t \in R \setminus \{0\}).$$

Primetimo da je dimenzija $\dim(V_{1,2}) = 1$, u ovom primeru, manja od reda višestrukosti $r = 2$ karakterističnog korena $\lambda_{1,2}$!

2⁰. Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ i skalari $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ ($\alpha_n \neq 0$). Tada izraz:

$$P_n(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

se naziva *matricni polinom* stepena n .

Teorema 4.1. (CAYLEY–HAMILTON) Neka je za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ određen karakteristični polinom:

$$P_n(\lambda) = |A - \lambda I| = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k,$$

za koeficijente $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \in F$ ($\alpha_n \neq 0$), tada važi:

$$P_n(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = 0.$$

Napomena 4.1. Neka je za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ određen karakteristični polinom:

$$P_n(\lambda) = |A - \lambda I| = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k,$$

tada važi:

$$\alpha_n = (-1)^n, \quad \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) \quad \text{i} \quad \alpha_0 = |A|$$

gde je $\text{Tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii}$ – *trag matrice* A .

Definicija 4.4. Kvadratne matrice $A, B \in F^{n \times n}$ su *slične matrice*, što označavamo $A \sim B$, ako postoji regularna matrica $C \in F^{n \times n}$ takva da važi $B = C^{-1} A C$.

Teorema 4.2. Sličnost matrica jeste relacija ekvivalencije skupa matrica $F^{n \times n}$.

Dokaz. ...

Teorema 4.3. Slične matrice imaju isti spektar.

Dokaz. ...

Definicija 4.5. Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$, tada polinom $m(\lambda)$ takav da ispunjava uslove:

- (i) $m(A) = 0$,
- (ii) koeficijent uz najveći stepen polinoma $m(\lambda)$ jednak je 1,
- (iii) $m(\lambda)$ je polinom najmanjeg stepena za koje važe prethodni uslovi (i) i (ii);

naziva se *minimalni polinom matrice* A .

Teorema 4.4. Svaka kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ ima jedinstven minimalan polinom $m(\lambda)$ i on je delilac karakterističnog polinoma $P_n(\lambda) = |A - \lambda I|$.

Dokaz. ...

Teorema 4.5. Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$. Svaka nula karakterističnog polinoma $P_n(\lambda)$ je i nula minimalnog polinoma $m(\lambda)$.

Napomena 4.2. Nule minimalnog i karakterističnog polinoma se podudaraju i mogu se razlikovati samo svojim redom!

Algoritam za određivanje minimalnog polinoma matrice $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$:

- 1^o. Prvo odredimo karakteristični polinom $P_n(\lambda) = |A - \lambda I|$.
- 2^o. Izvršimo faktorizaciju polinoma $P_n(\lambda)$ na nerastavljive faktore.
- 3^o. Formirajmo sve moguće delitelje karakterističnog polinoma tako da sadrže sve korene karakterističnog polinoma i da su jediničnog vodećeg koeficijenta.
- 4^o. Među prethodno određenim deliteljima izdvajamo one polinome koji se anuliraju u matrici A .
- 5^o. Minimalni polinom je polinom najnižeg stepena među polinomima određenim u prethodnom koraku.

Primer 5.2. Odrediti minimalni polinom matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3}.$$

Primenom prethodnog algoritma nalazimo:

- 1^o. $P_3(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2$.
- 2^o. $P_3(\lambda) = -\lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda - 3)$.
- 3^o. Delitelji $g(\lambda) = \lambda(\lambda - 3) = \lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3) = \lambda^3 - 3\lambda^2$ karakterističnog polinoma $P_3(\lambda)$ sadrže sve korene karakterističnog polinoma i jediničnog su vodećeg koeficijenta.
- 4^o. Za oba polinoma $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2$ važi $g(A) = A^2 - 3A = 0$ (proveriti) i $f(A) = A^3 - 3A^2 = 0$.
- 5^o. Minimalni polinom je $m(\lambda) = g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$.

Napomena: U prethodnom materijalu date su samo definicije, iskazi teorema i algoritama *a izostavljeni su (...) primeri i dokazi teorema koji su rađeni na časovima predavanja!*

LITERATURA:

D. Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić: "Matematika I – ALGEBRA"