Електротехнички факултет, Београд

МАТЕМАТИКА 2 – ПРВИ КОЛОКВИЈУМ – Задаци

14. 04. 2013.

Забрањена је употреба графитне („обичне") оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. У загради поред сваког задатка стоји број поена које тај задатак носи. Испит се ради максимално 150 min.

Број индекса:

Име и презиме:

Наставна група:

Сала:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Сума

1. [9] Наћи интеграл $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x\,(1 + tg^2 x)}\,dx$.

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x\,(1+tg^2 x)}dx=\int\frac{tg\,x+1}{tg^3 x\,(1+tg^2 x)}\frac{dx}{\cos^2 x}=\left\{\begin{array}{l} t=tg\,x\\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{array}\right\}=\int\frac{t+1}{t^3\,(1+t^2)}dt$$

$$\frac{t+1}{t^3\,(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+\frac{Dt+E}{t^2+1}$$

$$(At^2+Bt+C)(1+t^2)+(Dt+E)t^3=At^2+Bt+C+At^4+Bt^3+Ct^2+Dt^4+Et^3=t+1$$

$$A+D=0,\quad B+E=0,\quad A+C=0,\quad B=1,\quad C=1\qquad B=1,\quad C=1,\quad A=-1,\quad E=-1,\quad D=1$$

$$\int\frac{t+1}{t^3\,(1+t^2)}dt=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t^3}+\int\frac{t-1}{t^2+1}dt=-\ln|t|-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-arctg\,t+C$$

Одговор :

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x\,(1+tg^2 x)}dx=$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{1+tg^2 x}}{tg\,x}\right|-\frac{1}{tg\,x}-\frac{1}{2}\frac{1}{tg^2 x}-x+C$$

2. [7] Израчунати вредност интеграла $\int_0^{\sqrt{3}} x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx$.

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} & dv=xdx\\ du=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4x}{1+x^2}}}\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}dx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}=$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} & dv=xdx\\ du=\dfrac{2}{|1-x^2|}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}dx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x^2\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\pi}{3}-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\int_1^{\sqrt{3}}dx-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$\frac{\pi}{2}-x\Big|_0^1+arctg\,x\Big|_0^1+x\Big|_1^{\sqrt{3}}-arctg\,x\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{4}+\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}-2$$

Одговор :

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}-2$$

3. [9] Дата је диференцијална једначина $y'(x^2y^3+xy)=1$.

а) Одредити опште решење дате једначине.

б) Одредити ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(1,0)$.

$$x'=x^2y^3+xy$$

$$x'-yx=y^3x^2\qquad -z^{-2}z'-yz^{-1}=y^3z^{-2}$$

$$z=x^{-1},\ x=z^{-1},\qquad z'+yz=-y^3$$

$$x'=-z^{-2}z'\qquad z=e^{-\int ydy}\left(C-\int y^3e^{\int ydy}dy\right)$$

$$\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy=\left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{y^2}{2}\\ dt=ydy\end{array}\right\}=2\int te^t dt=\left\{\begin{array}{ll} u=t & dv=e^t dt\\ du=dt & v=e^t\end{array}\right\}$$

$$=2te^t-2\int e^t dt=2te^t-2e^t+\tilde{C}$$

$$z=e^{-\frac{y^2}{2}}\left(C-\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy\right)=e^{-\frac{y^2}{2}}\left(C-(y^2-2)e^{\frac{y^2}{2}}\right)$$

Одговор :

а) $x=(Ce^{-y^2/2}-y^2+2)^{-1}$

б) $1=(C+2)^{-1}$, $\quad C=-1$

$x=(-e^{-y^2/2}-y^2+2)^{-1}$

4. [12] Дата је диференцијална једначина $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$. Одредити опште решење дате једначине ако се зна да је једно партикуларно решење одговарајуће хомогене једначине линеарна функција.

$$x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0 \qquad \begin{aligned} y_1&=ax+b\\ y_1'&=a\\ y_1''&=0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&ax-ax-b=0\\ &b=0,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0\end{aligned} \qquad y_1=x$$

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=0 \qquad y_2=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}}dx$$

$$\int\frac{dx}{x(\ln x-1)}=\left\{\begin{aligned}t&=\ln x\\ dt&=\frac{dx}{x}\end{aligned}\right\}=\int\frac{dt}{t-1}=\ln|t-1|+C=\ln|\ln x-1|+C$$

$$y_2=x\int\frac{\ln x-1}{x^2}dx=\left\{\begin{aligned}u&=\ln x-1 & dv&=\frac{dx}{x^2}\\ du&=\frac{dx}{x} & v&=-\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}=1-\ln x+x\int\frac{dx}{x^2}=-\ln x \qquad \begin{aligned}y_h&=C_1x+C_2\ln x\\ y&=C_1(x)x+C_2(x)\ln x\end{aligned}$$

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=\frac{1-\ln x}{x^3}$$

$$C_1'(x)x+C_2'(x)\ln x=0 \qquad C_1(x)=-\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\left\{\begin{aligned}u&=\ln x & dv&=\frac{dx}{x^3}\\ du&=\frac{dx}{x} & v&=-\frac{1}{2x^2}\end{aligned}\right\}=$$

$$C_1'(x)+C_2'(x)\frac{1}{x}=\frac{1-\ln x}{x^3}$$

$$C_1'(x)=-\frac{\ln x}{x^3} \qquad \frac{\ln x}{2x^2}-\int\frac{dx}{2x^3}=\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}+C_1,$$

$$C_2'(x)=\frac{1}{x^2} \qquad C_2(x)=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C_2$$

Одговор :

$$y=\left(\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}+C_1\right)x+\left(-\frac{1}{x}+C_2\right)\ln x$$

$$y=C_1x+C_2\ln x-\frac{\ln x}{2x}+\frac{1}{4x}$$

5. [8] Одредити број Булових функција $f:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$ таквих да је формула

$$((p\wedge\neg q)\vee f(p,q)\Rightarrow f(p,q))\wedge(((f(p,q)\Rightarrow p\vee q)\downarrow\neg q))$$

контрадикција.

p	q	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$(p\wedge\neg q)\vee f(p,q)$	L	$p\vee q$	$f(p,q)\Rightarrow(p\vee q)$	D	$L\wedge D$
1	1	0	0	$f(1,1)$	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	$f(1,0)$	1	1	0	0
0	1	0	0	$f(0,1)$	1	1	1	0	0
0	0	1	0	$f(0,0)$	1	0	$\neg f(0,0)$	0	0

Вредност датог израза не зависи од вредности функције $f:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$.
Према томе, за све Булове функције са два параметра израз ће бити контрадикција.

Одговор :

Булових функција за које је формула контрадикција има $2^{2^2}=2^4=16$.

6. [5] У колико се пермутација скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ између бројева 1 и n налази тачно r, $1\le r\le n-2$, других бројева?

$$1\ \underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{r}\ n\ \underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{n-2-r}$$

$$\_\ 1\ \underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{r}\ n\ \underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{n-3-r}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{n-3-r}\ 1\ \underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{r}\ n\ \_$$

$$\underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{n-2-r}\ 1\ \underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{r}\ n$$

Број могућности за распоред бројева 1 и n тако да се између њих налази тачно r других бројева из скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ и таквих да је 1 испред n је $n-1-r$. Како можемо заменити места бројевима 1 и n имамо да је број могућности за њихов распоред $2(n-1-r)$. Када изаберемо позиције за бројеве 1 и n остале елементе можемо распоредити на $(n-2)!$ начина. Према томе, тражени број пермутација је $2(n-1-r)(n-2)!$

Одговор :

Збирка задатака из Алгебре, први део
Глава 3.1. Комбинаторика
Задатак 22.