Јована Станковић

Математика 2

• Диференцијалне једначине •

• Булова алгебра •

(са вежби)

СУ ЕТФ

Београд

2015.

СУ ЕТФ

Диференцијалне једначине

19.3.2015

Нека је F реална функција $n+2$ променљиве. Једначина $\boxed{F(x, y(x), y'(x) \dots y^{(n)}(x)) = 0}$ где је $y(x)$ n пута диференцијабилна функција назива се ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА ако се у њој појављује извод $y^{(n)}(x)$.

Опште решење диференцијалне једначине је свака функција $y = y(x)$ за $x \in (a, b)$ за коју важи $G(x, y, \underbrace{C_1, \dots C_n}_{\text{константе}}) = 0$

Диференцијалне једначине I реда

Једначина која раздваја променљиве

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

1. Решити једначине

$$x \ln x \, dy - y \ln y \, dx = 0 \quad / \frac{1}{x\ln x \cdot y \ln y} \qquad x>0, \; y>0$$

$$\frac{dy}{y\ln y} - \frac{dx}{x \ln x} = 0 \quad / \int \qquad x \neq 1, \; y \neq 1$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} - \int \frac{dx}{x \ln x} = c$$

$$\ln|\ln y| - \ln|\ln x| = c$$

$$\ln\left|\frac{\ln y}{\ln x}\right| = c$$

$$\left|\frac{\ln y}{\ln x}\right| = \bar{c} = e^{c}$$

опште решење: $|\ln y| = \bar{c}\, |\ln x|$

$$y = x^{\bar{c}}$$

партикуларно решење: $x = 1 \quad y = 1$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

2. Наћи опште решење диференцијалне ј-не

$$(xy-x)dx + (xy+x-y-1)dy = 0$$

$$x(y-1)dx + (x(y+1)-(y+1))dy = 0$$

$$x(y-1)dx + (x-1)(y+1)dy = 0 \quad / \frac{1}{(y-1)(x-1)}$$

$$\frac{x\,dx}{x-1} + \frac{(y+1)\,dy}{y-1} = 0 \quad / \int \qquad x \neq 1 \quad y \neq 1$$

$$\int \frac{x-1+1}{x-1}dx + \int \frac{y-1+2}{y-1}dy = C$$

$$\int dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int dy + 2\int \frac{dy}{y-1} = C$$

опште решење: $x + \ln|x-1| + y + 2\ln|y-1| = C$

партикуларно р.: $x = 1 \qquad y = 1$

Домаћи 832, 833, 834

СУ ЕТФ

Scanned by CamScanner

26.03.2015.

Домаћи 832

1. Наћи опште решење диф. једначине $y' = \cos(x-y+1)$

смена: $z = x-y+1 \Rightarrow z_x' = 1 - y_x' \Rightarrow y' = 1 - z'$

$$1 - z' = \cos z$$

$$z' = 1 - \cos z$$

$$\frac{d}{dx} = 1 - \cos z$$

$$\frac{dz}{1-\cos z} - dx = 0 \;/\!\int$$

$$\int \frac{dz}{1-\cos z} - \int dx = C \qquad z \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dz}{2\sin^2 \frac{z}{2}} - x = C$$

$$-\operatorname{ctg} \frac{z}{2} - x = C$$

$$-\operatorname{ctg} \frac{x-y+1}{2} - x = C \quad \leftarrow \text{опште решење}$$

Хомогена диференцијална једначина

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

смена $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$z'x + z = f(z)$$

$$z'x = f(z) - z$$

$$\frac{dz}{dx} x = f(z) - z$$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x} \quad \text{- једначина која раздваја променљиве}$$

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$xy' = y + x \quad / \cdot \frac{1}{x} \qquad , \quad x \in (0, +\infty)$$

$$y' = \frac{y}{x} + 1$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow \boxed{y' = z'x + z}$$

$$z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + 1$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = 1$$

$$dz - \frac{dx}{x} = 0 \quad / \int$$

$$\int dz - \int \frac{dx}{x} = C$$

$$z - \ln|x| = C$$

$$\boxed{\frac{y}{x} - \ln x = C}$$ опште решење

2. Решити једначину ... а затим одредити интегралне криве које пролазе кроз тачке $A(2,2)$ и $B(1,-1)$

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0 \quad / \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\left(1 + 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx + \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} - 1\right)dy = 0$$

смена: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z \quad / \cdot dx \Rightarrow dy = x\,dz + z\,dx$$

$$(1 + 2z - z^2)dx + (z^2 + 2z - 1)(x\,dz + z\,dx) = 0$$

$$(1 + 2z - z^2 + z^3 + 2z^2 - z)dx + (z^2 + 2z - 1)x\,dz = 0$$

$$(z^3 + z^2 + z + 1)dx + (z^2 + 2z - 1)x\,dz = 0 \quad / \cdot \frac{1}{(z^3 + z^2 + z + 1)x}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z^2 + 2z - 1)dz}{(z+1)(z^2+1)} = 0 \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(z^2 + 2z - 1)dz}{(z+1)(z^2+1)}$$

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz + C}{z^2+1} \quad \ldots \quad A = -1 \quad B = 2 \quad C = 0$$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

$$\ln|x| - \int\frac{dz}{z+1} + \int\frac{2z\,dz}{z^2+1} = c$$

$$\ln|x| - \ln|z+1| + \ln(z^2+1) = c$$

$$\ln\frac{x(z^2+1)}{z+1} = c$$

$$\frac{x(z^2+1)}{|z+1|} = c_1\ ,\ c_1 = e^c$$

$$\frac{x(z^2+1)}{z+1} = c_2$$

$$\boxed{\frac{x^2+y^2}{x+y} = c_2} \leftarrow \text{опште решење}$$

$A(2,2)$: $\frac{2^2+2^2}{2+2} = c \Rightarrow c = 2$

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = 2$$

$B(1,-1)$: $\frac{1^2+(-1)^2}{1-1} = c\ ,\ c = \infty$

$$x+y=0$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\quad a_i,b_i,c_i \in \mathbb{R} \quad a_i^2+b_i^2 \neq 0 \quad i=1,2$$

1) $a_1^2+a_2^2 \neq 0$, $b_1^2+b_2^2 \neq 0$, $c_1^2+c_2^2 \neq 0$ и $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$, тада уводимо нове променљиве $u = x-\alpha$ и $v = y-\beta$ тако да се анулирају c_1 и c_2 тј $a_1x+b_1y+c_1 = a_1u+b_1v$ и $a_2x+b_2y+c_2 = a_2u+b_2v$

$$a_1(u+\alpha)+b_1(v+\beta)+c_1 = a_1u+b_1v \qquad a_2\alpha+b_2\beta = -c_2$$

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta &= -c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta &= -c_2 \end{aligned}\right\} *$$

Како је детерминанта система * различита од нуле => систем * има јединствено решење (α,β)

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right) \text{ — хомогена диф једн.}$$

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

2) Када је $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k\underbrace{(a_1x + b_1y)}_{z} + c_2}\right)$$

смена: $z = a_1x + b_1y \Rightarrow z' = a_1 + b_1y'$

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + \frac{dy}{dx}b_1$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right)}$$ ЈЕДНАЧИНА КОЈА РАЗДВАЈА ПРОМЕНЉИВЕ

1. $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 5y + 3}{2x + 4y - 6}$$

$2 \cdot 4 - 2(-5) = 18 \neq 0$

$u = x + \alpha$

$v = y - \beta$

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha - 5\beta = -3 \\ 2\alpha + 4\beta = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array}$$

$\boxed{\begin{array}{l} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{array}}$ $\Rightarrow x = u + 1$ $\Rightarrow y = v + 1$

$$(2u - 5v)du - (2u + 4v)dv = 0 \ / \cdot \frac{1}{u}$$

$$\left(2 - 5\frac{v}{u}\right)du - \left(2 + 4\frac{v}{u}\right)dv = 0$$

смена $z = \frac{v}{u}$

$v = zu$

$dv = u\,dz + z\,du$

$$(2 - 5z)du - (2 + 4z)(u\,dz + z\,du) = 0$$

$$(2 - 5z - 2z - 4z^2)du - u(2 + 4z)dz = 0$$

$$(4z^2 + 7z - 2)du + u(2 + 4z)dz = 0 \ / \cdot \frac{1}{(4z^2 + 7z - 2)u}$$

$= (z+2)(4z-1)$

$$\frac{du}{u} + \frac{(4z + 2)dz}{(z+2)(4z-1)} = 0 \ / \int$$

$u \neq 0$

$z \neq -2$

$z \neq \frac{1}{4}$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

$$\int\frac{du}{u}+\int\frac{(4z+2)dz}{(z+2)(4z-1)}=C$$

$$\frac{4z+2}{(z+2)(4z-1)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{4z-1}$$

$$\dots\ A=\frac{2}{3}\quad B=\frac{4}{3}$$

$$\ln|u|+\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z+2}+\frac{4}{3}\int\frac{4dz}{4z-1}=0$$

$$\ln|u|+\frac{2}{3}\ln|z+2|+\frac{1}{3}\ln|4z-1|=C$$

$$\ln|u|\sqrt[3]{(z+2)^2|4z-1|}=C \qquad u=x-1$$

$$v=y-1$$

$$u\sqrt[3]{(z+2)^2(4z-1)}=C_1,\quad C_1=e^C$$

$$u\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{v}{u}+2\right)^2\left(4\frac{v}{u}-1\right)}=C_1$$

$$\sqrt[3]{(v-2u)^2(4v-u)}=C_1$$

$$(v-2u)^2(4v-u)=C_2$$

опште решење $(y+2x-3)^2(4y-x-3)=C_2$

2. Решити једначину

$$(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{-(3x+3y-4)} \qquad 1\cdot(-3)-(-3)\cdot 1=0$$

смена: $z=x+y \Rightarrow \boxed{dz=dx+dy} \Rightarrow dy=dz-dx$

$$z\,dx+(3z-4)(dz-dx)=0$$

$$(4-2z)dx+(3z-4)dz=0 \quad /\cdot\frac{1}{4-2z}$$

$$dx+\frac{3z-4}{4-2z}dz=0 \quad /\int \qquad z\neq 2$$

$$\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{(3z-4)dz}{z-2}=C$$

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

$$x - \frac{1}{2}\left(3\int \frac{(z-2)\,dz}{z-2} + 2\int \frac{dz}{z-2}\right) = C$$

$$x - \frac{3}{2}z - \ln|z-2| = C$$

$$x - \frac{3}{2}(x+y) - \ln|x+y-2| = C$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - \ln|x+y-2| = C}$$ опште решење

Домаћи $(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$

Линеарна диференцијална једначина

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

о.р. $y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$

1. Наћи опште решење једн. ... по наћи партикуларно решење за које је $y(2)=1$

$$y' + \frac{y}{x} = 3x \quad , \quad y(2)=1$$

о.р. $y(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int 3x e^{\int \frac{dx}{x}}dx\right) = \frac{1}{|x|}\left(C + \int 3x|x|dx\right)$

$$= \frac{C}{|x|} + \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x^3 = \frac{C}{|x|} + x^2 \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{C}{x} + x^2} \text{ о.р.}$$

$$1 = y(2) = \frac{C}{2} + 4 \Rightarrow C = -6$$

партикуларно решење $y(x) = -\frac{6}{x} + x^2$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

2. Одредити опште решење диф. једначине

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x+\cos y+\sin y}$$

$$\frac{dx}{dy} = x + \cos y + \sin y$$

$$x' = x + \cos y + \sin y$$

линеарна диф. једн. по x

$$x' + p(y)x = Q(y)$$

о.р. $x(y) = e^{-\int p(y)dy}\left(C + \int Q(y) e^{\int p(x)dy} dy\right)$

о.р. $x(y) = e^{-\int -dy}\left(C + \int (\cos y + \sin y) e^{\int -dy} dy\right)$

$$= Ce^{y} + e^{y}\int (\cos y + \sin y) e^{-y}\, dy = *$$

$$* \int \cos e^{-y} dy = \begin{bmatrix} u = \cos y & dv = e^{-y}dy \\ du = -\sin y dy & v = -e^{-y} \end{bmatrix} = -e^{-y}\cos y - \int \sin y e^{-y}\, dy$$

$$\int (\cos y - \sin y) e^{-y} dy = -e^{-y}\cos y$$

$*$ $ce^{y} - e^{y}e^{-y}\cos y = ce^{y} - \cos y \Rightarrow$ о.р. $\boxed{x(y) = ce^{y} - \cos y}$

Домаћи: Наћи оно решење диф. једн. које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi+2}{4}$

$$\cos x\, y' = \cos x + 2\sin x\, y$$

Scanned by CamScanner

3. Погодно одабраном сменом одредити опште решење

а) $3xy^2y' + y^3 = 2x$

б) $(2x+1)y' + 4e^{-y} + 2 = 0$

в) $(x^2-1)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$ } домаћи

а) $y = y(x)$

$(y^3(x))' = 3y^2 \cdot y'$

смена: $z = y^3$

$z' = 3y^2 \cdot y'$

$z'x + z = 2x \quad / \frac{1}{x}$

$z' + \frac{z}{x} = 2$

о.р. $z(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int 2e^{\int \frac{dx}{x}} dx\right)$

$= \frac{C}{|x|} + \frac{1}{|x|} 2\int |x| dx = \frac{C}{|x|} + \frac{x}{|x|}\operatorname{sgn} \frac{x^2}{2}$

б) $(2x+1)y' + 4e^{-y} + 2 = 0 \quad / \cdot e^{y}$

$(2x+1)\underbrace{e^{y}y'}_{(e^{y})'} + 4 + 2e^{y} = 0$

$z = e^{y} \Rightarrow z' = e^{y}y'$

$(2x+1)z' + 2z = -4 \quad / \frac{1}{2x+1}$

$z' + \underbrace{\frac{2}{2x+1}}_{P(x)} z = \underbrace{-\frac{4}{2x+1}}_{Q(x)}$

ор $z(x) = \ldots$

в) $(x^2-1)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$

смена: $z = \cos y \Rightarrow z' = -\sin y\, y'$

$-(x^2-1)z' + 2xz = 2x - 2x^3 \quad / \frac{1}{1-x^2}$

$z' + \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{P(x)} \cdot z = \underbrace{\frac{2x-2x^3}{1-x^2}}_{Q(x)}$

СУ ЕТФ

Abbott A Promise for Life

Scanned by CamScanner

Бернулијева диференцијална једначина

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

смена: $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z'}$

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' + P(x) z^{\frac{1}{1-\alpha}} = Q(x) z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Big/ (1-\alpha) z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\boxed{z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)}$$

1) $y' + \frac{x}{1-x^2} y = x\sqrt{y} \qquad x \in (-1,1)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

смена: $z = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \Rightarrow y = z^2 \Rightarrow y' = 2zz'$

$2zz' + \frac{x}{1-x^2} z = \frac{1}{2} x$ линеарна диф-једн.

о.р. $z(x) = e^{-\int \frac{x\,dx}{2(1-x^2)}} \left(C + \frac{1}{2} \int x e^{\int \frac{x\,dx}{2(1-x^2)}} dx \right)$

$$\int \frac{x\,dx}{2(1-x^2)} = \frac{1}{4} \int \frac{-2x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{4} \ln|1-x^2| = -\frac{1}{4} \ln(1-x^2)$$

$$z(x) = \sqrt[4]{1-x^2} \left(C + \frac{1}{2} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{1-x^2}} \right) = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x\,dx}{\sqrt[4]{\underbrace{1-x^2}_{t}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/4}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt[4]{(1-x^2)^3} = -\frac{2}{3} \sqrt[4]{(1-x^2)^3}$$

$dt = -2x\,dx$

о.р. $\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

2. Наћи опште решење

смена: $z = y^{-1} \Rightarrow y = z^{-1}$

$y' = -z^{-2} z'$

$y' = x^3 y^2 + xy$

$y' - xy = x^3 y^2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$

$-z^{-2} z' - x z^{-1} = x^3 z^{-2} \quad / \cdot (-z^2)$

$z' + xz = -x^3$ – линеарна диф. једн.

опште р. $z(x) = e^{-\int x dx} \left(C - \int x^3 e^{\int x dx} dx \right) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx$

$\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = x e^{\frac{x^2}{2}} dx \\ du = 2x dx & v = \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx \underset{t = \frac{x^2}{2}}{=} \int e^t dt = e^{\frac{x^2}{2}} \end{array} \right] =$

$= x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2 \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 - 2)$

о.р. $z(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 - 2)$

$z(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 + 2$

о.р. $\boxed{y(x) = \left(Ce^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 + 2 \right)^{-1}}$

Домаћи $y'(xy - y^3 x^4) = 1$

$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{xy - y^3 x^4}$

$x' = \frac{dx}{dy} = xy - y^3 x^4$

$x' - yx = -y^3 x^4 \Rightarrow \alpha = 4$

$z = x^3$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

Рикатијева диференцијална једначина

$$\boxed{y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)}$$

Ако је познато једно партикуларно решење $y_1 = y_1(x)$ Рикатијеве ј-не, тада сменом $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{z}}$ добијамо линеар. диф. ј-ну

$$\Downarrow$$

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

$$\begin{cases} y_1' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R(x) \\ y_1' = P(x)\, y_1^2 + Q(x)\, y_1 + R(x) \end{cases}$$

— y_1 је партик. решење

$$P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_1^2 + 2y_1\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R(x)$$

$$-\frac{z'}{z^2} = 2y_1 \frac{1}{z} P(x) + \frac{1}{z^2} P(x) + \frac{1}{z} Q(x) \quad / \cdot (-z^2)$$

$$z' = -2y_1 z P(x) - P(x) - z Q(x)$$

$$\boxed{z' + \left[2y_1 P(x) + Q(x)\right] z = -P(x)}$$ линеарна диф. једн.

1. $y' = y^2 - 2y + 1$ $\quad y_1 = ax + b$, $\quad y_1' = a$

$y_1' = y_1^2 - xy_1 + 1 \leftarrow y_1$ је решење

$a = (ax+b)^2 - x(ax+b) + 1$

$a = a^2x^2 + 2abx + b^2 - ax^2 - bx + 1$

$x^2(a^2 - a) + (2ab - b)x + b^2 - a + 1 = 0$

$a^2 - a = 0 \iff a(a-1) = 0 \iff a = 0,\ b = 0 \ \vee\ a = 1,\ b = 0$

$2ab - b = 0$

$b^2 - a + 1 = 0$

$$y_1 = x$$

Scanned by CamScanner

смена: $y = y_1 + \frac{1}{z}$

$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$

$y_1' - \frac{z'}{z^2} = y_1^2 + 2y_1\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - x\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + 1$

$y_1^2 - xy_1 + 1 - \frac{z'}{z^2} = y_1^2 + 2y_1\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - xy_1 - x\frac{1}{z} + 1$

$-\frac{z'}{z^2} = \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2} - x\frac{1}{z} \quad (-z^2)$

$z' = -2y_1 z - 1 + xz$

$z' + (2y_1 - x)z = -1$

$\Rightarrow z' + xz = -1$ ← линеарна једначина I реда

опште решење:

$z(x) = e^{-\int x dx}\left(c - \int e^{\int x dx} dx\right)$

$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(c - \int e^{\frac{x^2}{2}} dx\right) = F(x)$ једначина се не може одредити

$z(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} F(x)$

опште решење:

$y = x + \left(ce^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} F(x)\right)^{-1}$ $\quad y_1 = x$ $\quad z = \frac{1}{y-x}$ враћамо смену

Домаћи: Решити: $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$

$y = ax + b$ ← партикуларно решење

решење: $y = x + \frac{1}{cx+1}$

СУ ЕТФ

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

20.10.2015.

Линеарне диференцијалне једначине вишег реда

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x) \quad \text{нехомогена д. ј-на} \quad (*)$$

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = 0 \quad \text{хомогена диф. ј-на} \quad (**)$$

Теорема: Ако су $y_1, y_2, \dots, y_n$ линеарно независна решења хомогене дифер. ј-не $(**)$, тада је опште решење те ј-не $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

Лиувилова ф-ла: Ако је y_1 једно нетривијално партикуларно решење линеарне хомогене диф. ј-не другог реда, $y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = 0$, тада је
$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1(x)dx} dx$$
друго њено партикуларно решење линеарно зависно од y_1

Ако је опште решење $-y_h$ хомогене диф. ј-не $(**)$ и y_p партикуларно решење нехомогене диф ј-не $(*)$. Тада је опште решење нехомогене диф. ј-не $y = y_h + y_p$

Метод варијације константи:
Нека су $y_1, y_2, \dots, y_n$ линеарно независна решења хомогене диф. ј-не $(**)$ тада је опште реш. нехомогене диф. ј-не $(*)$ облика $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$, где су $C_1(x), C_2(x) \dots C_n(x)$ функције чије изводе добијамо решавањем система ј-на

$$\left.\begin{array}{l}
C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots C_n'y_n = 0 \\
C_1'y_1' + C_2'y_2' + \dots C_n'y_n' = 0 \\
\vdots \\
C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\
C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = F(x)
\end{array}\right\}$$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

1. Одредити опште решење диф. ј-не

$(2x^2+x)y''+2(x+1)y'-2y=0$ ако се зна да је једно њено партикуларно решење $y_1=ax^2+bx+c$

$y_1'=2ax+b$
$y_1''=2a$

$(2x^2+x)2a+2(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)=0$
$4ax^2+2ax+4ax^2+2bx+4ax+2b-2ax^2-2bx-2c=0$
$6ax^2+6ax+2b-2c=0 \Rightarrow a=0 \wedge b=c$

$\boxed{y_1=x+1}$ $\qquad y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx}dx$

$$y''+\underbrace{\frac{2(x+1)}{2x^2+x}}_{=f_1(x)}y'-\frac{2}{2x^2+x}y=0$$

$$dx=(x+1)\int\frac{1}{(x+1)^2}e^{-\int\frac{2(x+1)dx}{2x^2+x}}dx \qquad **$$

$$2\int\frac{(x+1)dx}{x(2x+1)}=*$$

$$\frac{x+1}{x(2x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}\quad \ldots \quad \begin{matrix}A=1\\B=-1\end{matrix}$$

$$*\ 2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{2x+1}=2\ln|x|-\ln|2x+1|=\ln\frac{x^2}{|2x+1|}$$

$$**\ =(x+1)\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{(2x+1)dx}{x^2}=(x+1)\int\frac{(x+1)^2-x^2}{x^2(x+1)^2}dx=$$

$$=(x+1)\left(\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}\right)=(x+1)\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=(x+1)\frac{\cancel{-x}-1+\cancel{x}}{x(x+1)}=-\frac{1}{x}$$

$y_2=-\frac{1}{x}$ $\qquad y=C_1(x+1)+C_2\frac{1}{x}$ → опште решење

Дошаци: 1. Одредити о.р. диф. ј-не $xy'' + (2x\ln x+1)\cdot y' + (x\ln^2 x+\ln x+1)y=0$ ако је једно парт. решење $y_1=\left(\frac{e}{x}\right)^x$

решење: $y = C_1\left(\frac{e}{x}\right)^x + C_2\left(\frac{e}{x}\right)^x \ln|x|$

2. $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0$

$y_1 = \cos\frac{1}{x}$ реш: $y = C_1\cos\frac{1}{x} + C_2\sin\frac{1}{x}$

2. Дата је диф. ј-на $(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2e^x$. Нађи опште решење дате ј-не ако знамо да је једно партикуларно решење облика $y_1 = ax+b$.

$(1-x)y'' + xy' - y = 0$ – одгов. хомогена $\left\{\begin{array}{l} y_1' = a \\ y_1'' = 0 \end{array}\right.$

$\cancel{x}a - \cancel{ax} - b = 0 \implies b=0$

$y_1 = x \qquad y_2 = y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx}dx = *$

$$y'' + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{f_1(x)}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$$

$$* \quad dx = x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{x\,dx}{1-x}}dx = x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{x\,dx}{x-1}}dx =$$

$$= x\int\frac{1}{x^2}\left(e^{x+\ln|x-1|}\right)dx = x\left(\int\frac{1}{x^2}(x-1)e^x dx\right) =$$

$$= \int\frac{(x-1)e^x dx}{x^2} = \int\frac{e^x dx}{x} - \int\frac{e^x dx}{x^2} = \left\lceil \begin{array}{ll} u=e^x & dv=\frac{dx}{x^2} \\ du=e^x dx & v=-\frac{1}{x} \end{array}\right\rfloor =$$

$$= \int\frac{e^x dx}{x} + \frac{e^x}{x} - \int\frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x}$$

$$\implies x\int\frac{1}{x^2}\left(e^{x+\ln|x-1|}\right)dx = x\int\frac{1}{x^2}(x-1)e^x dx = x\cdot\frac{e^x}{x} = e^x$$

$y_2 = e^x \qquad y_h = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x + C_2e^x$

$C_1'x + C_2'e^x = 0 \quad /(-1)$

$C_1' + C_2'e^x = (1-x)e^x \quad \Big) + \; (*)$

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = (1-x)e^x = F(x)$$

$(*) \quad C_1'(1-x) = (1-x)e^x \Rightarrow C_1'(x) = e^x$

$C_2'(x) = -x$

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = \int e^x dx = e^x + \overline{C}_1$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = \int -x\,dx = -\frac{x^2}{2} + \overline{C}_2$$

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = xe^x - \frac{x^2}{2}e^x + \overline{C}_1 x + \overline{C}_2 e^x$$

Домаћи: Наћи о.р. ј-не $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$ ако је $y_h = C_1 x + C_2 \ln x$

реш: $y = \overline{C}_1 x + \overline{C}_2 \ln x + \frac{1-2\ln x}{4x}$

3. Дата је диф. ј-на $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Доказати да се const A, B и C могу одредити тако да ф-ја $y = Ax^2 + Bx + C$ буде опште р., а затим наћи о.р. ј-не $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = x^2+1$

$y_h = Ax^2 + Bx + C$

$y_h' = 2Ax + B$

$y_h'' = 2A$

$$(x^2+1)2A - 2x(2Ax+B) + 2(Ax^2+Bx+C) = 0$$

$2A + 2C = 0 \Rightarrow C = -A$

$y_h = A(x^2-1) + Bx$

$y_h = A(x)(x^2-1) + B(x)x$

$A'(x)(x^2-1) + B'(x)x = 0$

$A'(x)\cdot 2x + B'(x) = 1$

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 1 = F(x)$$

$$D = \begin{vmatrix} x^2-1 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = -(x^2+1)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x$$

СУ ЕТФ

$$D_2 = \begin{vmatrix} x^2-1 & 0 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2-1$$

$$A'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow A(x) = \int A'(x)\,dx = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$$

$$B'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{-(x^2-1)}{x^2+1} \Rightarrow B(x) = \int B'(x)\,dx = -\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^2+1} =$$

$$= -(x - 2\operatorname{arctg} x) = -x + 2\operatorname{arctg} x + C_2$$

$$y = C_1(x^2-1) + C_2 x + \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2+1) - x^2 + 2x\operatorname{arctg} x$$

Линеарне диф. ј-не вишег реда са const коефицијентима

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ - константе

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ одговарајућа карактк. ј-на

- Карактеристична ј-на има n корена и сваки од њих одговара једном партикуларном решењу диф. ј-не (*)
- λ је прост реалан корен карактеристичне ј-не, тада је партикуларно решење диф ј-не * $y_p = e^{\lambda x}$
- λ је реалан корен реда k, $k>1$, карактеристичне ј-не, тада је партикуларно реш. диф. ј-не * $y_{p_1} = e^{\lambda x}$, $y_{p_2} = xe^{\lambda x}, \dots$ $\dots y_{p_k} = x^{k-1}e^{\lambda x}$
- $\lambda = \alpha + i\beta$ прост комплексан корен ј-не, тада је $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ је прост компл. корен каракт. ј-не. Одговарајућа парт. реш. диф. ј-не (*) су $y_{p_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{p_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$
- $\lambda = \alpha + i\beta$ компл. корен реда $k>1$, то је и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, па су одговарајућа парт. реш. диф. ј-не * $y_{p_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{p_2} = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, y_{p_k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{p_{k+1}} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_{p_{k+2}} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, y_{p_{2k}} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x)$

$F(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x) \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = \ldots \\ \beta = \ldots\end{matrix}$

* $\alpha + i\beta$ није корен карактер. ј-не, тада је партик. реш нехом. ј-не

$y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$

$\deg Q_1 = \deg Q_2 = m$

$m = \max\{m_1, m_2\}$; $m_1 = \deg P_1(x)$, $m_2 = \deg P_2(x)$

* $\alpha + i\beta$ јесте корен кар. ј-не, тада је партик. реш нехом. д. ј-не

$y_p = x^k e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$, при чему је k ред тог корена

$\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$

- Ако је $F(x) = F_1(x) + \ldots + F_n(x)$, тада примењимо претх. поступак на сваку ф-ју $F_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$

Специјални случајеви:

1) $\alpha = \beta = 0$ $F(x) = P_1(x)$ $y_{p_1} = Q_1(x)$, $\deg Q_1 = \deg P_1$

$y_{p_2} = x^k Q_1(x)$, $\deg Q_1 = \deg P_1$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = 0$ $F(x) = e^{\alpha x} P_1(x)$ — $y_{p_1} = e^{\alpha x} Q_1(x)$, $\deg P_1$

$y_{p_2} = x^k e^{\alpha x} Q_1(x)$; $\deg Q_1 = \deg P_1$

3) $\alpha = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ $F(x) = P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x$

$y_{p_1} = Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x$

$y_{p_2} = x^k(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$

$\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$

СУ ЕТФ

1. Нађи опште решење диф. ј-на.

а) $y'' - y = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

б) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$

в) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$

$\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda^4(\lambda + 1) + 2\lambda^2(\lambda + 1) + (\lambda + 1) = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_{2,3} = i \quad \lambda_{4,5} = -2$

$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 x \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \sin x$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

2. Одредити опште решење диф. ј-не

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x + \cos x$$

$F_1(x) = e^x$, $F_2(x) = \cos x$

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1$

	1	-3	4	-2
1	1	-2	2	

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \quad \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^x \cos x + C_3 e^x \sin x$$

$F_1(x) = e^x \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = \alpha + i\beta = 1$

$\lambda = 1$ јесте корен кар. ј-не

$y_{p_1} = Axe^x \qquad y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x$

$$\left.\begin{aligned} y_{p_1}' &= A(1+x)e^x \\ y_{p_1}'' &= A(2+x)e^x \\ y_{p_1}''' &= A(3+x)e^x \end{aligned}\right\}$$

$$A(3+x)\cancel{e^x} - 3A(2+x)\cancel{e^x} + 4A(1+x)e^x - 2Axe^x = e^x$$

$A\cancel{e^x} = e^x$

$A = 1$

$$y_{p_1} = xe^x$$

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

$F_2(x) = \cos x \Rightarrow \alpha = 0,\quad \beta = 1 \Rightarrow \lambda = \alpha + i\beta = i$ није корен кар. ј-не

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \cos x$$

$$y_{p_2} = A\cos x + B\sin x$$

$$y_{p_2}' = -A\sin x + B\cos x$$

$$y_{p_2}'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$y_{p_2}''' = A\sin x - B\cos x$$

$$A\sin x - B\cos x + 3A\cos x + 3B\sin x - 4A\sin x + 4B\cos x - 2A\cos x - 2B\sin x = \cos x$$

$$\cos x\,(A + 3B) + \sin x\,(-3A + B) = \cos x$$

$$A + 3B = 1 \quad /3$$

$$B - 3A = 0 \quad +$$

$$10B = 3$$

$$B = \frac{3}{10}$$

$$A = \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow y_{p_2} = \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$$

О.Р.: $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^x + C_2 e^x \cos x + C_3 e^x \sin x + x e^x + \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$

3. $y''' - y'' - y' + y = \underbrace{3x}_{F_1(x)} + \underbrace{(24x - 4)e^x}_{F_2(x)}$

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_{2/3} = 1 \qquad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

$y''' - y'' - y' + y = 3x$

$F_1(x) = 3x \Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha = 0\\ \beta = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = \alpha + i\beta = 0$ није корен кар. ј-не

$y_{p1} = Ax + B$ $\qquad -A + Ax + B = 3x$

$y_{p1}' = A$ $\qquad Ax + B - A = 3x$

$y_{p1}'' = y_{p1}''' = 0$ $\qquad A = 3 \land B - A = 0$

$\Downarrow$

$B = 3$

$\boxed{y_{p1} = 3x + 3}$

$y''' - y'' - y' + y = (24x - 4)e^x$

$F_2(x) = (24x - 4)e^x \Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha = 1\\ \beta = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = \alpha + i\beta = 1$ је корен реда 2 кар. ј-не

$y_{p2} = x^2(Ax + B)e^x$ $\qquad y_{p2} = (2x - 4)x^2e^x$

$y_{p2}' = \dots$

$y_{p2}'' = \dots$ $\qquad A = 2$, $B = -4$

$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x + 3x + 3 + (2x-4)x^2e^{x}$

$y_{p3}''' = \dots$

4. Одредити ону интегралну криву диф. ј-не ... која пролази кроз коорд. почетак под углом од $\frac{\pi}{4}$ у односу на x-осу

$$y'' + y' - 2y = \underbrace{3e^x}_{F_1} + \underbrace{8e^{2x}}_{F_2}$$

$y'' + y' - 2y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$

$y_h = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

$y'' + y' - 2y = 3e^x$

$y_{p1} = Axe^x$

$y_{p1}' = A(x+1)e^x$

$y_{p1}'' = A(x+2)e^x$

$F_1(x) = 3e^x$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha = 1\\ \beta = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = 1$ јесте корен кар. ј-не реда 1

Scanned by CamScanner

$A(x+2)e^x + A(x+1)e^x - 2Axe^x = 3e^x$

$3Ae^x = 3e^x \Rightarrow A = 1$

$y_{p1} = xe^x$

$y'' + y' - 2y = 8e^{2x} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha = 2\\ \beta = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = 2$ није корен кар. ј-не

$y_{p2} = Ae^{2x}$

$y_{p2}' = 2Ae^{2x}$ $\quad 4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 8e^{2x}$

$y_{p2}'' = 4Ae^{2x}$ $\quad 4A = 8 \Rightarrow A = 2$

$y_{p2} = 2e^{2x}$

$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = C_1e^x + C_2e^{-2x} + xe^x + 2e^{2x}$

$O(0,0)$

$\measuredangle = \frac{\pi}{4}$

$C_1 + C_2 + 2 = 0$

$y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + (x+1)e^x + 4e^{2x}$

$C_1 - 2C_2 + 1 + 4 = \quad = tg\frac{\pi}{4}$

$C_1 + C_2 = -2 \quad (-1)$

$C_1 - 2C_2 = -4$

$-3C_2 = -2$

$C_2 = \frac{2}{3} \quad C_1 = -\frac{8}{3}$

$\Rightarrow y = \left(x - \frac{8}{3}\right)e^x + \frac{2}{3}e^{-2x} + 2e^{2x}$

Домаћи: Наћи о.р. диф. ј-не $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = f(x)$

$y'' - y = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$

$y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$

$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$

$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0$

$C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$

реш: $\overline{C_1}e^x + \overline{C_2}e^{-x} - 4\sqrt{x}$

9.04.2015.

1. У зависности од вредности параметра $n \in N_0$ наћи решење диф. ј-не.

$$y^{(IV)} - 2ny''' + n^2 y'' = e^{(n-1)x}$$

$y^{(IV)} - 2ny''' + n^2 y'' = 0$ -> хомогена ј-на

$\lambda^4 - 2n\lambda^3 + n^2\lambda^2 = 0$ -> карактеристична ј-на

$\lambda^2(\lambda^2 - 2n\lambda + n^2) = 0$

$\lambda^2 = 0 \quad (\lambda - n)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_{3,4} = n$

$n \neq 0$: $\quad y_h = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{nx} + C_4 x e^{nx}$

$n = 0$: $\quad y_h = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 x^2 e^{0x} + C_4 x^3 e^{0x}$

$n = 0$: $\quad y_h = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$

$$F(x) = e^{(n-1)x} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha = n-1 \\ \beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = \alpha + i\beta = n-1$$

$n-1 = 0 \quad \vee \quad n-1 = n \quad \vee \quad n-1 \neq 0$

$n = 1 \qquad\quad -1 = 0 \; ↯ \qquad n \neq 1$

I $\quad n = 1$; $\quad \lambda = n - 1 = 0$ јесте корен карактер. ј-не реда 2

$y_p = A \cdot x^2 e^{(n-1)x} = Ax^2$

$y_p' = 2Ax$

$$\left.\begin{matrix} y_p'' = 2A \\ y_p''' = y_p^{IV} = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2A = e^{0x} = 1 \\ A = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$y_p = \frac{x^2}{2}$ у случају $n = 1$

II $\quad n \neq 1$: $\quad y_p = Ae^{(n-1)x}$

$\lambda = n-1$ није корен карakt. ј-не

$y_p' = (n-1) Ae^{(n-1)x}$

$y_p'' = (n-1)^2 Ae^{(n-1)x}$

$y_p''' = (n-1)^3 Ae^{(n-1)x}$

$y_p^{IV} = (n-1)^4 Ae^{(n-1)x}$

СУ ЕТФ

Scanned by CamScanner

$$(n-1)^4 A e^{(n-1)x} - 2n(n-1)^3 A e^{(n-1)x} + n^2(n-1)^2 A e^{(n-1)x} = e^{(n-1)x}$$

$$A(n-1)^2 e^{(n-1)x}\left((n-1)^2 - 2n(n-1) + n^2\right) = e^{(n-1)x}$$

$$A(n-1)^2 e^{(n-1)x} = e^{(n-1)x} \Rightarrow A = \frac{1}{(n-1)^2}$$

Разликујемо 3 случаја:

I $n=0$

II $n=1$ $\qquad y = y_h + y_p$

III $n \neq 0,1$

I $\underline{n=0}$:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}$$

II $\underline{n=1}$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + \frac{x^3}{2}$$

III $\underline{n \neq 0,1}$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{nx} + C_4 x e^{nx} + \frac{e^{(n-1)x}}{(n-1)^2}$$

Домаћи: У зависности од параметра a наћи оп. диф. ј-не

$$y'' - (2a+1)y' + a(a+1)y = \underbrace{e^{-x}}_{F_1} + \underbrace{x+1}_{F_2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

I $a=0$ $\qquad$ III $a=-2$

II $a=-1$ $\qquad$ IV $a \neq 0,-1,-2$

СУ ЕТФ

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

Булова алгебра

$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ – Булова ф-ја

$$\{0,1\}^n = \underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\dots\times\{0,1\}}_{n \text{ пута}}$$

Скуп $\{0,1\}^n$ је скуп уређених n-торки $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ чији су елементи $x_i\in\{0,1\}$, $(i=\overline{1,n})$. Број елемената скупа $\{0,1\}^n$ је 2^n

x_1	x_2	...	x_n	f
1	1	...	1	< 0, 1
⋮	⋮	⋮	⋮	< 0, 1
0	0	...	0	< 0, 1

Број Булових ф-ја је 2^{2^n}

1. Одредити број различитих Булових ф-ја $f(P_1,P_2,\dots,P_n)$ за које су исказне формуле:

   а) $p_1\wedge p_2\wedge\dots\wedge p_n \Rightarrow f(p_1,p_2,\dots,p_n)$

   б) $p_1\vee p_2\vee\dots\vee p_n \Rightarrow f(p_1,p_2,\dots,p_n)$ ТАУТОЛОГИЈЕ

а)

p_1	p_2	...	p_n	$f(p_1\dots p_n)$	F
1	1	...	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	< 0, 1	1
0	0	...	0	< 0, 1	1

2^n-1 шеста

Број Булових ф-ја је 2^{2^n-1}

б)

p_1	p_2	...	p_n	f	F
1	1	...	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	1	1
0	0	...	0	< 0, 1	1

2 Булове ф-је

f_1	f_2
1	1
⋮	⋮
1	1
1	0

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

Булову ф-ју $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ можемо представити у облику

а) савршене дисјунктивне нормалне форме (СДНФ)

$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \bigvee x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}, \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \in F$

$F = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \mid f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 1\}$

б) савр

1. Одредити по датом Булов израз за $F(p,q,r), G(p,q,r)$

p	q	r	F	G
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1

СДНФ за $F(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$

СКНФ за $G(p,q,r) = (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$

2. Одредити све Булове ф-је тако да формула f буде таутологија и одредити СДНФ и СКНФ.

$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ $\quad F: (\underbrace{q \wedge f(p,q) \Rightarrow \neg p}_{L}) \Rightarrow (\underbrace{(p \Rightarrow \neg q)}_{D} \Rightarrow f(p,q))$

	p	q	¬p	$q \wedge f(p,q)$	L	¬q	$p \Rightarrow \neg q$	D	F	
2^2	1	1	0	$f(1,1)$	$\overline{f(1,1)}$	0	0	1	1	*
	1	0	0	0	1	1	1	$f(1,0)$	$f(1,0)$	= 1
	0	1	1	$f(0,1)$	1	0	1	$f(0,1)$	$f(0,1)$	= 1
	0	0	1	0	1	1	1	$f(0,0)$	$f(0,0)$	= 1

Број Булових ф-ја $2^{бр.*}$

$2^1 = \underline{\underline{2}}$

p	q	$f_1(p,q)$	$f_2(p,q)$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

СДНФ $f_1(p,q) = (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

СКНФ за $f_1(p,q)$ не постоји

СДНФ $f_2(p,q) = (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

СКНФ $f_2(p,q) = \bar{p} \vee \bar{q}$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner

3. Одредити у облику СДНФ Булову ф-ју $A(p,q,r)$

$F: (\bar{r} \vee (p \wedge \bar{q}) \Rightarrow A) \wedge (\overline{r \wedge (p \Rightarrow q) \wedge A})$ тако да ова формула буде контрадикција.

p	q	r	$\bar{r}$	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$\bar{r} \vee (p \wedge \bar{q})$	L	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge A$	D	F
1	1	1	0	0	0	0	1	1	$A(1,1,1)$	$\overline{A(1,1,1)}$	$\overline{A(1,1,1)} = 0$
1	1	0	1	0	0	1	$A(1,1,0)$	1	0	1	$A(1,1,0) = 0$
1	0	1	0	1	1	1	$A(1,0,1)$	0	0	1	$A(1,0,1) = 0$
1	0	0	1	1	1	1	$A(1,0,0)$	0	0	1	$A(1,0,0) = 0$
0	1	1	0	0	0	0	1	1	$A(0,1,1)$	$\overline{A(0,1,1)}$	$A(0,1,1) = 0$
0	1	0	1	0	0	1	$A(0,1,0)$	1	0	1	$A(0,1,0) = 0$
0	0	1	0	1	0	0	1	1	$A(0,0,1)$	$\overline{A(0,0,1)}$	$A(0,0,1) = 0$
0	0	0	1	1	0	1	$A(0,0,0)$	1	0	1	$A(0,0,0) = 0$

p	q	r	$A(p,q,r)$	
1	1	1	1	✓
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	0	0	0	
0	1	1	1	✓
0	1	0	0	
0	0	1	1	✓
0	0	0	0	

СДНФ за $A(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$

Scanned by CamScanner

СУ ЕТФ

Скуп $\{\neg, \vee\}$ је база Булових ф-ја

4. Доказати да Лукашијевичева ф-ја („нили") чини базу Булових ф-ја

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

$$\bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x$$
$$x \vee x = \overline{\overline{x \downarrow x}} = (x \downarrow x) \downarrow (x \downarrow x)$$

Изразити импликацију и Шеферову ф-ју („ни") помоћу Лукашијевичеве ф-је

$\uparrow$ ни $\qquad x \uparrow y = \overline{x \wedge y}$

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = (x \downarrow x) \vee y = ((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y)$$

$$x \uparrow y = \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} = (x \downarrow x) \vee (y \downarrow y) = [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)] \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))$$

ни преко нили

5. Изразити еквиваленцију помоћу Шеферове („ни") ф-је.

$\Leftrightarrow$

$$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) = (\overline{x \wedge \bar{y}}) \wedge (\overline{y \wedge \bar{x}}) =$$
$$= (x \uparrow \bar{y}) \wedge (y \uparrow \bar{x}) = (x \uparrow (y \uparrow y)) \wedge (y \uparrow (x \uparrow x)) = \overline{[(x \uparrow (y \uparrow y)) \uparrow (y \uparrow (x \uparrow x))]} \uparrow$$
$$[(x \uparrow (y \uparrow y)) \uparrow (y \uparrow (x \uparrow x))]$$

$$\bar{x} = \overline{x \wedge x} = x \uparrow x$$
$$x \wedge y = \overline{\overline{x \uparrow y}} = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$$

Домаћи

1. Наћи све Булове ф-је за које важи формула
$F: (r \Rightarrow \bar{q} \vee p \Rightarrow \varphi(p,q,r)) \Rightarrow (\varphi(p,q,r) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge r)$ ТАУТОЛОГИЈА

2. Представити булов израз $(p \Rightarrow q) \vee q$ помоћу "ни" ф-је

3. Колико има различитих Булових ф-ја таквих да важи
$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ а) $f(a,a,\dots,a) = \bar{a}$ б) $f(\bar{a},\bar{a},\bar{a},\dots,\bar{a}) = a$

Abbott
A Promise for Life

Scanned by CamScanner