МАТЕМАТИКА 2 - ТЕОРИЈА
13.02.2016.

Име и презиме, бр. индекса	Група	Сала

1.	2.	Сума

Напомена: није дозвољена употреба графитне оловке.

1. [25]

1) Дефинисати следеће појмове (и објаснити све ознаке које се користе у дефиницији):

1^0 . неодређени интеграл функције f на интервалу I;

2^0 одређени (Риманов) интеграл функције f на сегменту $[a,b]$.

2) Одредити (без израчунавања интеграла) да ли су функције f, g и h интеграбилне на сегменту $[0,2]$ и одговор образложити.

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x - 10 \qquad g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}}, & x > 1 \\ \ln(3-x), & x \le 1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1}, & x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$$

3) Увести смену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ у интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{5 - 2\cos x}$ (само увести смену, без даљег израчунавања интеграла).

4) Уколико је тачно следеће тврђење доказати га (и образложити сваки корак доказа), а у случају нетачног тврђења навести контрапример (и образложити зашто је то контрапример).

Ако је функција f интеграбилна на $[a,b]$ и ако је $x \in [a,b]$ тада је функција $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{dt}$ непрекидна функција на сегменту $[a,b]$.

2. [25] Дефинисати следеће појмове:

– **нумерички ред са *позитивним* члановима:** *Пример:*

– **нумерички ред са *алтернирајућим* члановима:** *Пример:*

За нумерички ред са *позитивним* члановима исказати **Cauchy-јев интегрални критеријум конвергенције.**

За нумерички ред са *алтернирајућим* члановима исказати **један критеријум конвергенције.**

Допунити исказ теореме: *Нека је* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ *ред са члановима произвољног знака.*

Ако је ред $\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k|$ _____, *тада је ред* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ _____.

При доказивању те теореме користи се _____ критеријум.

Исказати **Abel-ову теорему за степене редове**.

Написати четири (од пет) познатих Maclaurin-ових развоја и написати област конвергенције за сваки.

1)	*функција*	*Maclaurin-ов развој*	*област конвергенције*
2)	*функција*	*Maclaurin-ов развој*	*област конвергенције*
3)	*функција*	*Maclaurin-ов развој*	*област конвергенције*
4)	*функција*	*Maclaurin-ов развој*	*област конвергенције*

Математика 2 – Теорија СЕПТЕМБАРСКИ ИСПИТНИ РОК – 4. септембар 2016. год. Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.	*Име, презиме, број индекса*		Група:	Сала:
	1.	2.	*Сума:*	

1. [25] *1)* Дефинисати следећа два појма:

а) Обична **диференцијална једначина** реда ***три***:

б) **Решење** диференцијалне једначине на интервалу I јесте:

2) **Рикатијева диференцијална једначина**:

а) навести њен општи облик;

б) навести смену која се користи и објаснити ознаке;

в) показати како се коришћењем предложене смене једначина своди на ..... :

3) ***Непотпуна*** **диференцијална једначина другог реда.**

Навести 3 случаја, објаснити за сваки од њих како гласе смене и на шта се своди решавање тих једначина.

I случај:	*II случај:*	*III случај:*
једначина:	*једначина:*	*једначина:*
смена:	*смена:*	*смена:*
на шта се своди решавање:	*на шта се своди решавање:*	*на шта се своди решавање:*

4) а) Написати у општем облику *нехомогену линеарну диференцијалну једначину* ***трећег реда*** *са функционалним коефицијентима*, у случају када је коефицијент уз y''' једнак 1: .....

б) За шта се користи Lagrange-ов **метод варијације константи**? .....

.....

в) У специјалном случају једначине *а)* када је нехомогени део једнак $-\ln|\sin x|$, написати систем једначина који представља полазну етапу у примени Lagrange-овог **метода варијације константи** (објаснити ознаке):

2. [25]

1) Допунити следећу дефиницију:

Системи линеарних алгебарских једначина су еквивалентни _____

_____

2) Навести елементарне трансформације којима се систем линеарних алгебарских једначина своди на еквивалентан систем.

1^0 _____

2^0 _____

3^0 _____

3) Допунити следеће теореме:

а) *Потребан услов да систем линеарних алгебарских једначина буде сагласан је* ...

б) *Сваки хомоген систем линеарних алгебарских једначина има само тривијално решење* ...

Доказати тврђење наведено под а).

4) Ако су $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ неке карактеристичне вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

одредити све карактеристичне вредности матрице A и израчунати $\det A$.
Образложити одговор.

5) Дата је једначина $x + y + z + u = 0$ где су x, y, z, u непознате. Навести пример квадратног, хомогеног система линеарних једначина који садржи дату једначину и који има и нетривијална решења и образложити зашто има и нетривијална решења.

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет, Катедра за примењену математику

Математика 2 – Теорија ОКТОБАРСКИ ИСПИТНИ РОК – 25. септембар 2016. год. Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.	*Име, презиме, број индекса*		Група:	Сала:
	1.	2.	*Сума*:	

1. [25] *1)* Дефинисати следећа три појма:

а) Обична **диференцијална једначина** другог реда:

б) **Линеарна диференцијална једначина** другог реда:

в) **Решење** диференцијалне једначине на интервалу I јесте:

2) **Рикатијева диференцијална једначина**:

а) навести њен општи облик;

б) навести смену која се користи и објаснити ознаке;

в) показати како се коришћењем предложене смене једначина своди на ..... :

3) ***Непотпуна*** **диференцијална једначина другог реда.**

Навести три случаја, објаснити за сваки од њих како гласе смене и на шта се своди решавање тих једначина.

I случај:	*II случај:*	*III случај:*
једначина:	*једначина:*	*једначина:*
смена:	*смена:*	*смена:*
на шта се своди решавање:	*на шта се своди решавање:*	*на шта се своди решавање:*

4) За шта се ефективно користи Lagrange-ов **метод варијације константи**?

2. (1.1) Допунити исказ теореме (и именовати употребљене математичке ознаке):

Теорема. За произвољне векторе x_1 и x_2 из унитарног простора V важи неједнакост троугла:

(1.2) Доказати ову теорему.

(2.1) Нека је дата права p као пресек равни α и β. Детаљно описати два начина да се изведе **параметарски облик** једначине праве p ако су познате једначине равни α и β.

1. начин:	2. начин:

(2.2) Применити претходно описане методе на примеру $\alpha: x+2z=8$, $\beta: x-y+z=6$.

1. начин Рачун: права $p:$	2. начин Рачун: права $p:$

(3) Написати све варијације са понављањем треће класе скупа $\{3,c\}$.

Варијације:	Колико их је?

Математика 2 - теорија Парцијални испит, 13. јун 2015. Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.	Име, презиме, број индекса		Група:	Сала:
	1.	2.	Сума:	

1. [25] (1.1) Навести Кејли-Хамилтонову теорему.

Теорема.

(1.2) На примеру матрице A показати тврђење претходне теореме.

Резултат:	Рачун: $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$	Објашњење шта је рачунато:

(1.3) Одредити сопствене вредности матрице A^{17}, где је A матрица из претходног примера.

Резултат: $\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$	Рачун:	Образложење:

(2.1) Навести дефиницију потпуног (комплетног) графа. **Дефиниција.**	Нацртати потпун граф са 3, 4 и 5 чворова.		
	$n=3$	$n=4$	$n=5$

(2.2) Одредити број **делимичних подграфова** са 4 чвора и 3 гране **потпуног** графа са 7 чворова.

Резултат:	Рачун и образложење:

2. [25] Дефинисати следеће појмове:

– **нумерички ред са *позитивним* члановима:** *Пример:*

– **нумерички ред са *алтернирајућим* члановима:** *Пример:*

За нумерички ред са *позитивним* члановима исказати **Cauchy-јев интегрални критеријум конвергенције.**

За нумерички ред са *алтернирајућим* члановима исказати **један критеријум конвергенције.**

Допунити исказ теореме: *Нека је* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ *ред са члановима произвољног знака.*

Ако је ред $\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k|$ _____, *тада је ред* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ _____.

При доказивању те теореме користи се _____ критеријум.

Исказати **Abel-ову теорему за степене редове**.

Доказати Abel-ову теорему за степене редове.

МАТЕМАТИКА 2 - ТЕОРИЈА
Интегрални испит
13.06.2015.

Име и презиме, број индекса	Група	Сала

1.	2.	Сума

Напомена:
није дозвољена употреба графитне оловке.

1. [25]

1) Дефинисати следеће појмове:

1^0 неодређени интеграл функције f на интервалу I;

2^0 одређени (Риманов) интеграл функције f на сегменту $[a,b]$;

3^0 несвојствени интеграл непрекидне функције f на интервалу $[a,+\infty)$ је дивергентан.

2) За функције $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3}\le x\le 1 \end{cases}$ и $g(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{1}{3} \\ 5, & x=\frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3}<x\le 1 \end{cases}$ упоредити интеграле $I_1=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$ и $I_2=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{dx}$ по величини (без израчунавања) и одговор образложити.

3) Допунити следеће исказе тако да се добију тачна тврђења:

Нека је функција f интеграбилна на $[a,b]$ и нека је, за $x\in[a,b]$ $R(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{dt}$.

а) Функција $R(x)$ је _____.

б) Ако је функција f непрекидна на $[a,b]$ тада је функција $R(x)$ _____
_____.

ц) Ако је функција f непрекидна на $[a,b]$ тада је $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=$ _____.

Доказати (по избору) једно од ових тврђења.

2. [25] Дефинисати следеће појмове:

– **нумерички ред са *позитивним* члановима:** *Пример:*

– **нумерички ред са *алтернирајућим* члановима:** *Пример:*

За нумерички ред са *позитивним* члановима исказати **Cauchy-јев интегрални критеријум конвергенције.**

За нумерички ред са *алтернирајућим* члановима исказати **један критеријум конвергенције.**

Допунити исказ теореме: *Нека је* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ *ред са члановима произвољног знака.*

Ако је ред $\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k|$ _____, *тада је ред* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ _____.

При доказивању те теореме користи се _____ критеријум.

Исказати **Abel-ову теорему за степене редове**.

Доказати Abel-ову теорему за степене редове.

Математика 2 – теорија 14. 4. 2013. Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.	Име, презиме, број индекса		Група:	Сала:
	1.	2.	Сума:	

1. [25] Дата је теорема Булове алгебре.

(1.1) У датом доказу теореме образложити сваки корак.

(1.2) Исказати дуалну теорему дате теореме и доказати је.

Теорема. $(\forall x \in B)\, x \wedge x = x$. У сваком реду доказа теореме написати објашњење датог корака.	Дуална теорема датој теореми:
Доказ. $x \wedge x = (x \wedge x) \vee 0$ $= (x \wedge x) \vee (x \wedge \overline{x})$ $= x \wedge (x \vee \overline{x})$ $= x \wedge 1$ $= x$	**Доказ.**

(1.3) Исказати принцип дуалности у Буловој алгебри.

(2.1) Допунити исказ теореме. **Теорема.** Број комбинација са понављањем .....

Написати све комбинације друге класе са понављањем скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Колико их има?

Комбинације:	Колико их је?

(2.2) На датом примеру описати како се пребројавају комбинације са понављањем. (Описати модел, представити две комбинације помоћу модела и детаљно објаснити пребројавање.)

2. [25] Дат је неодређени интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^m}}$.

За које је целобројне вредности параметра m овај интеграл елементарна функција?

Рад и образложење:	Одговор:

За сваку добијену вредност параметра m написати одговарајућу смену којом се интеграл трансформише у интеграл рационалне функције.

m		...
смена		...

Дефинисати следеће појмове:

1° Риманов (одређени интеграл) функције f на одсечку $[a, b]$.

2° Функција интеграбилна на одсечку $[a, b]$.

Да ли је функција f интеграбилна на одсечку $[-1, 1]$? Навести одговарајућу теорему која гарантује тачност одговора.

функција	f је интеграбилна на $[-1, 1]$	Образложење: теорема
$f(x) = \lvert x \rvert$	Да Не	
$f(x) = \operatorname{sgn} x$	Да Не	
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$	Да Не	

Извести интегралну формулу за запремину обртног тела.

Математика 2 – Теорија ЈУНСКИ ИСПИТНИ РОК – 8. јун 2013. год. **ПАРЦИЈАЛНИ ИСПИТ** Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.	Име, презиме, број индекса		Група:	Сала:
	1.	2.	*Сума*:	

1. [25] Дефинисати следеће појмове:

– нумерички ред са *позитивним* члановима: *Пример:*

– нумерички ред са *алтернирајућим* члановима: *Пример:*

За нумерички ред са *позитивним* члановима исказати **Gauss-ов критеријум конвергенције.**

За нумерички ред са *алтернирајућим* члановима исказати **један критеријум конвергенције.**

Допунити исказ теореме: *Нека је* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ *ред са члановима произвољног знака.*

Ако је ред $\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k|$ _____, *тада је ред* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ _____.

При доказивању те теореме користи се _____ критеријум.

Исказати **Abel-ову теорему за степене редове.**

Доказати Abel-ову теорему за степене редове.

2. [25] (1.1) Дефинисати еквивалентне матрице.

Дефиниција.

(1.2) Допунити исказ теореме.

Теорема. Елементарне трансформације ...

(2.1) Допунити исказ теореме о хомогеним системима.

Теорема. Нека је дат хомоген систем m једначина са n непознатих. Тада:

(1) Ако је $\operatorname{rang} A$

(2) Ако је $\operatorname{rang} A$

(2.2) Решити хомогени систем и на том примеру показати тврђење претходне теореме.

$$x+3y-2z=0$$
$$-3x+ay+6z=0$$
$$-2x-6y-(a+5)z=0$$

У доња два поља уписати решење система у зависности од параметра a.

(1) a	(2) a
Решење:	Решење:

Закључак (у вези са тврђењем теореме):

(2.3) За вредност параметра a за коју овај систем има нетривијалних решења, описати структуру коју она образују.

Математика 2 – Теорија ЈУНСКИ ИСПИТНИ РОК – 8. јун 2013. год. **ИНТЕГРАЛНИ ИСПИТ** Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.	Име, презиме, број индекса		Група:	Сала:
	1.	**2.**	***Сума*:**	

1. [25] Написати дефиниције следећих појмова:

1) Примитивна функција функције f на интервалу I.

2) Одређени (Риманов) интеграл функције f на одсечку $[a,b]$.

3) Функција f интеграбилна на одсечку $[a,b]$.

У следећим случајевима написати једну смену којом се дати неодређени интеграл трансформише у интеграл рационалне функције:

1) $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$

2) $\int\frac{\sqrt[3]{x+2}}{1+\sqrt{3x+6}}\,dx$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^5}}$

4) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$

Формулисати став о средњој вредности интегралног рачуна.

Применити ову теорему на функцију $y=\sqrt[3]{x}$ и одсечак $[0,2]$ и на овом примеру објаснити њен геометријски смисао.

Доказати ову теорему.

2. [25] (1.1) Дефинисати еквивалентне матрице.

Дефиниција.

(1.2) Допунити исказ теореме.

Теорема. Елементарне трансформације ...

(2.1) Допунити исказ теореме о хомогеним системима.

Теорема. Нека је дат хомоген систем m једначина са n непознатих. Тада:

(1) Ако је $\operatorname{rang} A$

(2) Ако је $\operatorname{rang} A$

(2.2) Решити хомогени систем и на том примеру показати тврђење претходне теореме.

$$x+3y-2z=0$$
$$-3x+ay+6z=0$$
$$-2x-6y-(a+5)z=0$$

У доња два поља уписати решење система у зависности од параметра a.

(1) a	(2) a
Решење:	Решење:

Закључак (у вези са тврђењем теореме):

(2.3) За вредност параметра a за коју овај систем има нетривијалних решења, описати структуру коју она образују.

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет, Катедра за примењену математику

Математика 2 – теорија 29. 6. 2013. Интегрални испит Напомена: Није дозвољена употреба графитне оловке.	Име, презиме, број индекса		Група:	Сала:
	1.	2.	Сума:	

1. [25] (1.1) Навести дефиниције композиција и партиција природног броја n.

Дефиниција. Композиција ...

Дефиниција. Партиција ...

(1.2) Написати све партиције броја 6.

Партиције:	Колико их је?

(1.3) Навести теорему о броју композиција природног броја n.

Теорема. (1)

(2)

(1.4) Написати све композиције броја 7 са 3 сабирка. Колико их има?

Композиције:	Колико их је?

(1.5) На датом примеру описати како се пребројавају композиције са датим бројем сабирака. (Описати модел, представити две композиције из примера помоћу модела и детаљно објаснити пребројавање.)

2. [25] **2.** [25] Дефинисати следеће појмове:

– **нумерички ред са *позитивним* члановима:** *Пример:*

– **нумерички ред са *алтернирајућим* члановима:** *Пример:*

За нумерички ред са *позитивним* члановима исказати **Gauss-ов критеријум конвергенције.**

За нумерички ред са *алтернирајућим* члановима исказати **један критеријум конвергенције.**

Допунити исказ следеће теореме: *Нека је* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ *ред са члановима произвољног знака.*

Ако је ред $\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k|$ _____, *тада је ред* $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ _____.

При доказивању те теореме користи се _____ критеријум.

Исказати **Cauchy-јев интегрални критеријум** и навести за какве редове се он користи.

Доказати **Cauchy-јев интегрални критеријум**.